ANNALEN DER PHYSIK UND CHEMIE: ERGÄNZUNGSBAND

Digitized by Google

530.5
A613
2

Digitized by Google

Digitized by Google

ANNALEN

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

ERGÄNZUNGSBAND VII.

Digitized by Google

Digitized by Google

ANNALEN

DER

PHYSIK

UND

CHEMIE.

HERAUSGEGEBEN ZU BERLIN

VON

J. C. POGGENDORFF.

ERGÄNZUNGSBAND VII.

NEBST VI FIGURENTAFELN.

LEIPZIG, 1876.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

Digitized by Google

111612

Digitized by Google

Inhalt

des Ergänzungsbandes VII der Annalen der Physik und Chemie.

Erstes Stück.

Seite

I. Bestimmung der Elasticitätsconstante des Steinsalzes; von Woldemar Voigt 1

II. Ueber den Mechanismus der magnetischen Induction; von O. Chwolson 53

III. Ueber Temperatur und Adiabate; von A. J. von Oettingen 83

IV. Ueber die specifische Wärme und wahre Wärmecapacität der Körper; von E. Herrmann 134

V. Der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie abgeleitet aus dem ersten; von C. Szily 154

VI. Neue tönende Flammen; von C. Decharme 168

VII. Untersuchung über die magnetische Polarisationsdrehung; von Henri Becquerel 171

VIII. Neue Methode, Schallschwingungen und Interferenzen auf Quecksilber hervorzubringen; von C. Decharme 176

IX. Physikalische Eigenschaften der Collodiumblättchen; von E. Gripon 176

Digitized by Google

Zweites Stück.

Seite

I. Bestimmung der Elasticitätsconstanten des Steinsalzes; von W. Voigt 177

II. Die Torsionsconstante des Steinsalzes.

II. Ueber den Satz vom mittleren Ergal und seine Anwendung auf die Molecularbewegungen der Gase; von R. Clausius 215

III. Ueber das Verhalten der Amalgame und der geschmolzenen Legirungen gegen den galvanischen Strom und über die Natur der bei der Amalgamation der Metalle auftretenden elektrischen Ströme; von E. Obach 280

IV. Anwendung des mechanischen Wärmeaequivalents auf Molecularkräfte, Moleculargröfse und Moleculardistanz; von J. Weinberg (Zweiter Theil) 312

V. Ueber eine Eigenschaft einer elektrisirten Wasserfläche; von G. Lippmann 330

VI. Ueber das Maximum der Rotationsgeschwindigkeit der Influenzmaschinen; von W. Holtz 332

VII. Ueber das Verhältnifs der beiden specifischen Wärmen insbesondere der festen Körper; von A. Kurz 334

VIII. Untersuchung der Gase aus dem 12. Februar 1875 in Jowa County niedergefallenen Meteoriten; von A. W. Wright . 336

Drittes Stück.

I. Die unbegränzten regelmäfsigen Punktsysteme als Grundlage einer Theorie der Krystallstructur; von L. Sohncke . . . 337

II. Untersuchungen über den Magnetismus von Stahlstäben; von C. Fromme 390

III. Ueber die galvanische Ausdehnung der Metalldrähte; von F. Exner 431

Digitized by Google

Seite

IV. Ueber die Zersetzung einiger Ammoniumsalze in wässeriger Lösung durch Kalium- und Natriumsalze; von H. C. Dibbits 462

V. Ueber die polarelektrische Attraction suspendirter Theilchen in Flüssigkeiten, über eine neue Art elektrischer Figuren und über ein merkwürdiges Rotationsphänomen; von W. Holtz 490

Viertes Stück.

I. Einige Formveränderungen der Leydner Batterie und ihr Gebrauch bei Influenzmaschinen, nebst Beschreibung einiger sehr schönen Entladungsphänomene; von W. Holz . . . 497

II. Ueber den Mechanismus der magnetischen Induction; von O. Chwolson. (Zweite Abhandlung.) 535

III. Neue Untersuchungen über die Häufigkeit des Funkelns der Sterne in Bezug auf die Beschaffenheit ihres Lichts nach der Spectral-Analyse; von Ch. Montigny 605

IV. Zur Theorie der elastischen Nachwirkung; von L. Boltzmann 624

V. Neues Heber-Barometer; von H. Wild 655

Digitized by Google

Nachweis zu den Figurentafeln.

Taf. I. — W. Voigt, Fig. 1, S. 6; Fig. 2, S. 8; Fig. 3, S. 10; Fig. 4 u. 5, S. 11; Fig. 6, S. 13; Fig. 7, S. 14; Fig. 8 u. 9, S. 16; Fig. 10, S. 20; Fig. 11, S. 45; Fig. 12, S. 49.

Taf. II. — W. Voigt, Fig. 14 u. 15, S. 179; Fig. 16, S. 181; Fig. 17 u. 18, S. 182; Fig. 19, S. 183; Fig. 20 u. 21, S. 185; Fig. 22 u. 23, S. 186; Fig. 24, S. 187; Fig. 25—27, S. 190 u. 191; Fig. 28, S. 192; Fig. 29, S. 203; Fig. 30, S. 209; Fig. 31, S. 212.

Taf. III. — E. Obach, Fig. 1, S. 282; Fig. 2, S. 283; Fig. 3, S. 293; Fig. 4 u. 5, S. 306; Fig. 6, S. 309; Fig. 7—10, S. 307.

Taf. IV. — L. Sohncke, Fig. 1, S. 345; Fig. 2, S. 349; Fig. 3—5, S. 351; Fig. 6 u. 7, S. 353; Fig. 8, S. 354; Fig. 9—11, S. 355; Fig. 12, S. 357; Fig. 13, S. 358; Fig. 14, S. 361; Fig. 15, S. 363; Fig. 16, S. 364; Fig. 17, S. 365; Fig. 18, S. 366; Fig. 19, S. 368.

Taf. V. — L. Sohncke, Fig. 20 u. 21, S. 371; Fig. 22 u. 23, S. 372; Fig. 24, S. 373; Fig. 25, S. 376; Fig. 26, S. 377; Fig. 27, S. 378.

Taf. VI. — W. Holtz, Fig. 1, S. 502; Fig. 2, S. 503; Fig. 3, S. 504; Fig. 4, S. 506; Fig. 5 u. 6, S. 510; Fig. 7, S. 511; Fig. 8, S. 514; Fig. 9, S. 517; Fig. 10 u. 11, S. 518. — H. Wild, Fig. 12, S. 655. — Montigny, Fig. 13—15, S. 611; Fig. 16, S. 618.

Digitized by Google

ANNALEN
DER PHYSIK UND CHEMIE.
Band VII. ERGÄNZUNG. Stück 1.

I. *Bestimmung der Elasticitätsconstanten des Steinsalzes; von Dr. Woldemar Voigt.*

Darlegung der Aufgabe.

Der Zweck meiner Untersuchung ist die Bestimmung der Elasticitätsconstanten des Steinsalzes. Zu deren Definition gelangt man auf folgende Weise.

Die Dilatation, die ein beliebigen Druckkräften ausgesetzter elastischer Körper erfährt, besteht aus zwei Theilen: der eine verschwindet mit dem Druck und wird die elastische Dilatation genannt; der andere bleibt bestehen und heifst darum Rückstand oder dauernde Dilatation. War dieser Druck sehr lange (streng genommen unendlich lange) Zeit auf den Körper ausgeübt, so bringen alle darnach in gleicher Richtung angewandten Drucke geringerer Intensität nur elastische, aber keine dauernden Dilatationen hervor. Der gröfstmögliche derartige Druck heifst die Gränze der Elasticität für die gleichgerichteten Kräfte.

Die Beobachtung hat gezeigt, dafs die elastische Dilatation der Druckkraft proportional ist, so lange diese die Elasticitätsgränze nicht überschreitet; darauf basirt man die Theorie der Elasticität innerhalb dieser Gränze.

Die Dilatation einer Länge ϱ in einem elastischen Medium ist unabhängig von den durch die ausgeübten Druckkräfte hervorgebrachten Verschiebungen ihrer Endpunkte x, y, z und $x + a$, $y + b$, $z + c$. Die Längen a, b, c

1) Die vorliegende Arbeit wurde angeregt durch meines Freundes Dr. Baumgarten, Beobachtung der Elasticität von Kalkspathstäbchen. Diese Ann. CLII, 3.

Digitized by Google

und daher auch ϱ, sind so klein angenommen, dafs man aus der Verrückung von x, y, z nach $x+u$, $y+v$, $z+w$, die des andern Endpunktes $x+a$, $y+b$, $z+c$ durch Entwickelung, unter Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung, finden kann; dieser Punkt rückt nämlich nach

$$(x+a)+u+a\frac{\partial w}{\partial x}+b\frac{\partial w}{\partial y}+c\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$(y+b)+v+a\frac{\partial v}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial y}+e\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$(z+c)+w+a\frac{\partial w}{\partial x}+b\frac{\partial w}{\partial y}+c\frac{\partial \dot{w}}{\partial z}.$$

Da $\varrho^2 = a^2+b^2+c^2$, so giebt sich $\Delta\varrho$, die Dilatation von ϱ durch die Verschiebung seiner Endpunkte um die angegebenen Stücke wie folgt:

$$\frac{\Delta\varrho}{\varrho}=\frac{a^2}{\varrho^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{b^2}{\varrho^2}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{c^2}{\varrho^2}\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{a\,b}{\varrho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$+\frac{b\,c}{\varrho^2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{a\,c}{\varrho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right).$$

Wenn die durch die Verschiebungen erregten elastischen Kräfte diesen Dilatationen proportional seyn sollen, so müssen sie von denselben Elementen lineär abhängen, durch die *jene* lineär ausgedrückt sind. Bezeichnet man, wie gebräuchlich, die Componenten der inneren Kräfte, die auf ein Flächenelement normal zur X-Axe wirken, mit X_x, Y_x, Z_x und analog die sechs anderen, wo dann $X_y = Y_x$, $X_z = Z_x$, $Y_z = Z_y$ ist, so hat man für die sechs unabhängigen Componenten sechs Gleichungen mit sechs Argumenten, und also 36 Constanten. Es sey

$$-X_x = A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial v}{\partial y}+C\frac{\partial w}{\partial z}+D\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$+E\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+F\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

und daraus $-Y_y$ und $-Z_z$ durch Vertauschung von A mit A_1 und A_2 usw. zu erhalten, und analog aus

Digitized by Google

$$-X_x = -Y_z = \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial v}{\partial y} + \gamma\frac{\partial w}{\partial z} + \delta\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \zeta\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

auch

$$-X_y = -Z_x \quad \text{und} \quad -Y_z = -Z_y.$$

Wendet man diese Formeln auf einen Krystall des regulären Systemes an, so ist zu berücksichtigen, dafs seine Massentheilchen in Bezug auf 3 zu einander senkrechte Ebenen symmetrisch, und seine drei Krystallaxen und unterschiedslos sind. Aus dem ersten Princip ergeben sich 24 von den genannten Constanten gleich Null, aus dem zweiten 9 von den übrig gebliebenen gleich den 3 andern. Also reducirt sich die Anzahl der Constanten auf nur 3: A, B und ε, von denen die Componenten der elastischen Kräfte in folgender Weise abhängen:

$$-X_x = A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial v}{\partial y} + B\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$-Y_y = B\frac{\partial u}{\partial x} + A\frac{\partial v}{\partial y} + B\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$-Z_z = B\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial v}{\partial y} + A\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$-X_y = -Y_x = \varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$-X_z = -Z_x = \varepsilon\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$-Y_z = -Z_y = \varepsilon\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

Eine weitere Reduction der Anzahl der Constanten ist auf Grund der hier reproducirten, von Hrn. Geheimrath Neumann entwickelten Vorstellungen nicht möglich.

Bekanntlich haben Navier und Poisson auf gewissen Vorstellungen von der Wirkung der Molekularkräfte Theorien der Elasticität erbaut. Beide geben die Elasticität in regulären Krystallen abhängig von nur 2 unabhängigen Constanten; durch eben dieselben findet Poisson die Elasticität in unkrystallinischen Medien bestimmt, während Navier für solche noch eine Relation zwischen beiden aufstellt

Digitized by Google

($A = 3B$). Damit die Neumann'schen Gleichungen für Krystalle des regulären Systems mit denen von Poisson und Navier übereinstimmen, müsste die Beobachtung ergeben $\varepsilon = B$; damit dies zugleich mit denen für unkrystallinische Medien stattfände, auch $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$, also wie bei Navier $A = 3B$. Die Resultate der Beobachtungen stehen hiermit in directem Widerspruch und erschüttern somit die Grundlagen jener Theorien, deren Ableitungen sonst unangreifbar sind.

Es sind also bis auf Weiteres die drei durch die Neumann'schen Gleichungen definirten Gröfsen A, B und ε als die Elasticitätsconstanten der Krystalle des regulären Systemes anzusehen. Alle Elasticitätserscheinungen an solchen sind von diesen drei Constanten abhängig, aber die Beobachtung keiner bekannten unter ihnen genügt für sich allein, um ihre Zahlwerthe zu bestimmen; jedenfalls müssen zwei combinirt werden. Dazu bietet sich besonders die Beobachtung der Biegung und der Torsion von Stäben, einerseits, weil diese Methoden die Aenderungen der Dimensionen der Stäbe nicht direct, sondern durch die von ihnen veranlafsten viel gröfseren Bewegungen messen; andererseits, weil das Material für beide auf ganz dieselbe Weise anzufertigen ist.

Gegen eine solche Combination von Beobachtungen könnte eingewandt werden, dafs die Theorie sich mit dem *natürlichen* Zustande der Medien beschäftigt, diese Beobachtungen aber an den auf zwei ganz verschiedene Weisen durch dauernde Dilatationen *veränderten* angestellt werden. In der That ist auch, wie ich (Dissert. S. 39) nachgewiesen habe, der natürliche Zustand eines Mediums nicht wiederherstellbar. Es haben aber frühere Beobachtungen von Coulomb (*Biot, Traité de physique*) und Lagerhjelm (diese Ann. XIII) den Elasticitätscoëfficienten von allen mechanischen Veränderungen der Substanz unabhängig ergeben und meine Untersuchung dieses Gegenstandes am Steinsalz (Dissert. S. 25) dasselbe gezeigt, — darum

Digitized by Google

steht zu erwarten, daſs die dauernden Dilatationen, die bei den Beobachtungen unvermeidlich, aber sehr viel kleiner sind, als die bei jenen Versuchen absichtlich hervorgebrachten, den Werth des Elasticitätscoëfficienten nicht beeinflussen werden. Im entgegengesetzten Falle bietet sich aber gerade durch die Combination von mehreren Beobachtungsarten, wie sich später zeigen wird, ein Mittel, den Einfluſs der dauernden Deformationen zu beurtheilen, das anderen Untersuchungen der Elasticität fehlt.

I. Theil.

Die Bestimmung der Elasticitätscoëfficienten des Steinsalzes.

I. Die Ableitung der elastischen Biegung eines Steinsalzstäbchens.

1. Abhängigkeit des Elasticitätscoëfficienten von der Richtung in dem Steinsalzkrystall. Die Beobachtung der Biegung von Stäben führt zu der Kenntniſs des sogenannten Elasticitätscoëfficienten der Substanz, aus der sie bestehen. Er wird nach Th. Young als das Gewicht definirt, welches, auf ein Prisma vom Querschnitt $= 1$ ausgeübt, dasselbe auf die doppelte Länge auszudehnen vermag. Der Elasticitätscoëfficient ist für jedes unkrystallinische Medium eine Constante, bei krystallinischen aber davon abhängig, welche Lage die Längsrichtung des Prismas im Krystall hat. Nennt man die Winkel dieser Längsrichtung l mit den Krystallaxen xyz resp. (l,x), (l,y), (l,z), den Elasticitätscoëfficienten E, und die Elasticitätsconstanten des Steinsalzes wie oben gesagt A, B und ε, so ist nach Geheimrath Neumann die Abhängigkeit:

$$\frac{1}{E_l} = \left(\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{B}{(A-B)(A+2B)}\right) - \left(\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{A-B}\right)(\cos^4(l,x)+\cos^4(l,y)+\cos^4(l,z)).$$

Darin führe ich die Abkürzung ein:

$$\frac{1}{E_l} = M - N(\cos^4(l,x)+\cos^4(l,y)+\cos^4(l,z)).$$

Digitized by Google

2. Der Elasticitätscoëfficient, bestimmt durch die Biegung eines vollkommenen Prismas. Es ist meine Absicht, den Elasticitätscoëfficienten durch die Messung der Biegungen von Stäben zu bestimmen.

Ist ein rechtwinkliges Prisma von der Länge l, Breite B, Dicke D an einem Ende in horizontaler Lage festgehalten, an dem anderen mit dem Gewicht P_1 belastet, so werden seine oberen Schichten ausgedehnt, die unteren zusammengedrückt, zwischen ihnen bleibt eine, die sogenannte neutrale Schicht, unverändert und erleidet nur eine Formveränderung. Sie habe in Bezug auf ein Coordinatensystem durch ihren festgehaltenen Punkt, dessen Abscissenaxe horizontal liegt, die Coordinaten ξ und η (Siehe Fig. 1, Taf. I). Zwei unendlich nahe Ebenen, normal zur neutralen Schicht, ad und bc, schneiden so kurze Stücke aus den dilatirten Schichten heraus, dafs wir in ihnen die elastischen Kräfte constant nehmen können. P_y sey die in einer Schicht $\overline{gh}$ im Abstand y von der neutralen erregte elastische Kraft, bezogen auf die Flächeneinheit; dann ist nach der Figur und der Definition von E

$$\frac{P_y}{E} = \frac{\overline{lh}}{\overline{gl}} = \frac{y}{\varrho},$$

wenn ϱ den Krümmungsradius der neutralen Schicht an jener Stelle bezeichnet.

Von aufsen wirkt auf das Prisma das angebrachte Gewicht P_1 und sein eigenes; ist ε das Gewicht seiner Masseneinheit, p das Perpendikel von dem Punkt e der neutralen Schicht auf die Richtung der Kraft, so ist die Bedingung des Gleichgewichtes zwischen den innern und äufsern Kräften:

$$\int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} B P_y y \, dy = p P_1 + \frac{p^2}{2} D B \varepsilon.$$

Dabei ist $P_y = \frac{E y}{\varrho}$, $p = l - \xi$, also ergiebt sich eine

Digitized by Google

Gleichung für den Krümmungsradius der neutralen Schicht im Abstand ξ vom festen Endpunkt:

$$\frac{1}{\varrho} = 12\,\frac{(l-\xi)\,P_1 + \frac{(l-\xi)^2}{2}\,D\,B\,\varepsilon}{E\,D^3\,B}.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dafs der Quotient $\left(\frac{\eta}{l}\right)^2$ gegen 1 zu vernachlässigen ist.

In meiner Untersuchung, wo die directen Ablesungen keine gröfsere Genauigkeit als $\frac{1}{500}$ des ganzen Werthes zu erreichen vermochten, sind Fehler von $\frac{1}{1000}$ in der mathematischen Entwickelung stets vernachlässigt worden; $\left(\frac{\eta}{l}\right)^2$ überstieg aber nie $\frac{1}{3000}$, ebenso auch $\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2$. Darum setze ich statt $\frac{1}{\varrho}$ | $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ und erhalte durch zweimalige Integration, da am festgehaltenen Ende $\eta = 0$ und $\frac{d\eta}{d\xi} = 0$ ist,

$$\eta = \frac{12}{E\,D^3\,B}\left[P_1\left(l\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{6}\right) + \frac{\varepsilon D B}{2}\left(\frac{l^2\xi^2}{2} - \frac{l\xi^3}{3} + \frac{\xi^4}{12}\right)\right]$$

und das giebt für das freie Ende, wo $\xi = l$ ist

$$\eta_1 = \frac{4\left(P^1 + \frac{3}{8}\,\varepsilon\,D\,B\,l\right)l^3}{E\,D^3\,B}.$$

Dies gilt also für das einerseits in horizontaler Lage festgehaltene Prisma. Die Biegung des beiderseitig aufliegenden, in der Mitte mit $\Pi = 2\,P_1$ belasteten Prismas von der doppelten Länge $L = 2\,l$ erhält man, wenn man dasselbe in der Mitte festgehalten und an beiden Enden mit dem halben Gewicht belastet denkt. So ergiebt sich der Niveauunterschied des Mittelpunkts und der Enden:

$$\eta_1 = \frac{\left(\Pi + \frac{3}{8}\,\Gamma\right)L^3}{4\,D^3\,B\,E},$$

wo mit Γ das Gewicht des Prismas bezeichnet sey.

(Vergleicht man diese Senkung η_1 mit der Dilatation desselben, mit demselben Gewicht ausgedehnten Stabes,

Digitized by Google

so sieht man, dafs sich beide verhalten wie $\frac{1}{4}\left(\frac{L}{D}\right)^2$ zu 1. Da nun L immer viel gröfser ist als D, so erkennt man den Vortheil *dieser* Beobachtungsmethode gegenüber der directen Messung der Ausdehnung.)

Bezeichne ich den Zuwachs der elastischen Biegung, der einem Zuwachs der Belastung um 1 Gramm entspricht, mit $\varkappa$, auf welche Einheit ich alle meine Messungen reducirt habe, so giebt sich der Ausdruck für den Elasticitätscoëfficienten:

$$E = \frac{L^3}{4 \varkappa D^3 B}.$$

3. Correction wegen der, nach der Länge veränderlichen, Dicke und Breite. Die von mir beobachteten Stäbchen aus Steinsalz waren keine vollkommenen Prismen, sondern hatten fast durchweg den Character eines der in Fig. 2, Taf. I gezeichneten Doppelkeile, darum lag es nahe, statt der winkligen Gestalt der Berechnung einen Doppelkeil zu Grunde zu legen, der mit jener möglichst genau übereinstimmte. Das Genauere darüber ist in dem Abschnitt über die Bestimmung der Dimensionen der Stäbchen gesagt; hier sey nur erwähnt, dafs die beiden Flächen der Keile höchstens um 1′ gegeneinander geneigt waren, also in den lineären Functionen für die Dicke der einen Hälfte des Stäbchens

$$D = D_0 + a\,\xi$$

a höchstens $\frac{1}{3000}$ war, also $\frac{a\frac{L}{2}}{D} = \frac{1}{50}$.

Es liegt also das Quadrat davon jedenfalls aufserhalb des zu berücksichtigenden.

Die Breite, die etwa das 8-fache der Dicke beträgt, variirt ebenfalls; da sie aber in der Formel für E nur lineär vorkommt, und die Coëfficienten von ξ absolut keine gröfsern Werthe haben, als bei der Dicke, so genügte es, die Breite für die ganze Länge des Stäbchens nach demselben Gesetz variiren zu lassen. Unterscheide ich die

Digitized by Google

beiden Hälften des Stäbchens durch griechische und lateinische Buchstaben, so sind hiernach die Dicken resp.:

$$D = D_{\scriptscriptstyle 0} + \alpha\,\xi \quad \Delta = D_{\scriptscriptstyle 0} + \alpha\,\xi$$

die Breiten:

$$B = B_{\scriptscriptstyle 0} + b\,\xi \quad \mathrm{B} = B_{\scriptscriptstyle 0} - b\,\xi,$$

wenn ich nach beiden Seiten hin die ξ positiv rechne.

Da das Glied, welches das Gewicht des Stäbchens enthält, sehr klein und der Einfluſs der Aenderung von Dicke und Breite darauf sehr gering ist, und dasselbe endlich in der bei der Beobachtung in Betracht kommenden Formel für E gar nicht mehr enthalten ist, so will ich es auch schon in der für den Krümmungsradius der neutralen Schicht ignoriren und unter Benutzung der obigen Werthe für D, Δ, B, B schreiben, für die zwei Hälften des Stäbchens

$$\frac{d^2\,y}{d\,\xi^2} = \frac{12\,(l-\xi)\,P_1}{E\,D_{\scriptscriptstyle 0}^{\,3}\,B_{\scriptscriptstyle 0}}\left(1 - \frac{3\,\alpha\,\xi}{D_{\scriptscriptstyle 0}} - \frac{b\,\xi}{B_{\scriptscriptstyle 0}}\right);$$

$$\frac{d^2\,\eta}{d\,\xi^2} = \frac{12\,(\lambda-\xi)\,H_1}{E\,D_{\scriptscriptstyle 0}^{\,3}\,B_{\scriptscriptstyle 0}}\left(1 - \frac{3\,\alpha\,\xi}{D_{\scriptscriptstyle 0}} + \frac{b\,\xi}{B_{\scriptscriptstyle 0}}\right)$$

und hieraus folgt durch zweifache Integration für die freien Enden:

$$\eta_1 = \frac{4\,l^3\,P_1}{E\,D_{\scriptscriptstyle 0}^{\,3}\,B_{\scriptscriptstyle 0}}\left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{3\,\alpha\,l}{D_{\scriptscriptstyle 0}} + \frac{b\,l}{B_{\scriptscriptstyle 0}}\right)\right];$$

$$\eta_1 = \frac{4\,\lambda^3\,H_1}{E\,D_{\scriptscriptstyle 0}^{\,3}\,B_{\scriptscriptstyle 0}}\left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{3\,\alpha\,\lambda}{D_{\scriptscriptstyle 0}} - \frac{b\,l}{B_{\scriptscriptstyle 0}}\right)\right]$$

Es ist im Allgemeinen nun gar nicht erfüllt, daſs bei gleicher Länge der beiden Hälften die Höhendifferenzen des festgehaltenen und des freien Endpunktes für beide gleich sind. Und doch ist das die Bedingung, unter welcher die Integrationsconstanten verschwinden, denn nur dann ist die Tangente in dem festgehaltenen mittleren Punkte horizontal. Ich muſste also über die zwei Längen l und λ, deren Summe die gegebene gesammte Länge des Stäbchens war, so verfügen, daſs $\eta_1 = y_1$, und daher die Tangente im Coordinatenanfang horizontal würde. D. h.

Digitized by Google

also, ich mufste nicht im ***Mittelpunkt***, sondern ein Stück davon belasten. Zur Bestimmung desselben setze ich

$$l = \frac{L}{2}(1 - A)$$

$$\lambda = \frac{L}{2}(1 + A)$$

und demgemäfs nach Fig. 3, Taf. I:

$$P_1 = \Pi\left(\frac{1+A}{2}\right)$$

$$\Pi_1 = \Pi\left(\frac{1-A}{2}\right)$$

(worin Π das wirklich angebrachte Gewicht bezeichnet), in die Ausdrücke für η_1 und y_1 und diese sich einander gleich. Da A nie $\frac{1}{40}$ übersteigt, so mufs ich sein Quadrat vernachlässigen, und erhalte unter Vernachlässigung von $a^2\,\alpha^2\,b^2$

$$A = -\frac{L}{32}\left[3\frac{a-\alpha}{D_m} + \frac{2b}{B_m}\right].$$

Dies A ist das später in den Tafeln aufgeführte, das mit $\frac{L}{2}$ multiplicirt die Abweichung des Mittelpunktes vom Belastungspunkte angiebt. Durch das Einsetzen dieses Werthes in η_1 und y_1 müssen diese gleich werden. Zuvor führe ich, wegen eines kleinen Vortheiles beim Berechnen, eine mittlere Dicke ein:

$$D = D_m + \frac{(a+\alpha)L}{8}$$

und setze für B_m kurz B, dann ist die wirklich beobachtete Biegung:

$$\eta_b = \frac{\Pi L^3}{4\,E\,D^3\,B}\left(1 + \frac{3}{16}(a+\alpha)\frac{L}{D}\right),$$

was ich bezeichne, (um die Correction wegen der ***Gestalt*** anzudeuten)

$$\eta_b = \frac{\Pi L^3}{4\,E\,D\,B^3}(1+\gamma)$$

wo

$$\gamma = +\frac{3}{16}(a+\alpha)\frac{L}{D}.$$

Digitized by Google

4. Correction wegen der Abweichung des Querschnittes vom Rechteck. Weder die Seitenflächen, noch die oben und unten sind bei meinen Stäbchen untereinander völlig parallel.

Der erstere Fehler hat nur den Einfluſs, daſs in § 2 in dem Integral

$$\int_{-\frac{D}{2}}^{+\frac{D}{2}} y^2 B \, dy$$

für B zu setzen ist $B_\mu + y \operatorname{tg} \beta$, dadurch wird dasselbe

$$= \frac{B_\mu D^3}{12} \left(1 + \frac{3}{8} \frac{D}{B} \operatorname{tg} \beta\right).$$

Das zweite Glied übersteigt aber nie $\frac{1}{1000}$ und ist darum zu vernachlässigen, d. h. an die Stelle des trapezförmigen Querschnittes ein Paralleltrapez zu setzen, das, wie Fig. 4, Taf. I zeigt, von ihm abweicht.

Der zweite Fehler verursacht hingegen, daſs man an die Stelle von D | $D_\mu + z \operatorname{tg} \alpha$ zu setzen, und demgemäſs die ausgeübte Kraft in zwei Componenten zu zerlegen hat: $\Pi \cos \alpha = \pi$, $\Pi \sin \alpha = \vartheta$. (Vergl. Fig 5, Taf. I.)

Die letztere wirkt um die Mittellängslinie des Stäbchens drehend, da die Kraft nicht unmittelbar auf die Oberfläche desselben ausgeübt werden kann, sondern an einem, im nächsten Abschnitt zu beschreibenden, kleinen, auf der Oberfläche ruhenden Apparat in der Entfernung L von derselben angebracht werden muſs, die erstere hingegen gleichmäſsig auf der ganzen belasteten Linie. Es muſs daher die Biegung diesseits und jenseits des Stäbchens, an einem Hebelarm H resp. H_1 gemessen, die Form haben

$$N\pi + \mathrm{L}\,\vartheta \,.\, H \,.\, M$$

resp.

$$N\pi - \mathrm{L}\,\vartheta \,.\, H_1 \,.\, M.$$

$N\pi$ ist für den Fall $\alpha = 0$ die Biegung des Stäbchens, und muſs daher im Nenner D^3 enthalten, welches jetzt

Digitized by Google

$= (D_\mu + z \operatorname{tg} \alpha)$ ist. Da bei mir α stets äufserst klein war, ist sein etwaiger Einfluſs auf M zu vernachlässigen und $\pi = \Pi$ zu setzen, und man erhält die beiden Biegungen unter Vernachlässigung von $\operatorname{tg}^2 \alpha$:

$$N_0 \Pi \left(1 - \frac{3 \Pi \operatorname{tg} \alpha}{D}\right) + L \vartheta H M$$

$$N_0 \Pi \left(1 + \frac{3 H_1 \operatorname{tg} \alpha}{D}\right) - L \vartheta H_1 M,$$

wo N_0 der Werth von N für $\alpha = 0$ ist.

Es ist nun möglich, wie im nächsten Abschnitt erörtert werden wird, diese zwei Biegungen zugleich zu messen und H nahe $= H_1$ zu machen. Daher ist das Mittel aus den zwei Messungen frei von Fehlergliedern erster Ordnung und von denen zweiter ist nur das in L multiplicirte von Belang, wenn nicht L klein ist. Durch die sogleich zu erwähnende Anordnung sind die Glieder zweiter Ordnung gegen 1 kleiner als $\frac{1}{1500}$ geworden und darum ohne Einfluſs.

5. Einfluſs der Abweichung der Axe des Stäbchens von der geforderten Richtung. Da die Elasticitätscoëfficienten mit der Richtung im Steinsalz stark variiren, und diese Abhängigkeit zu bestimmen das Ziel meiner Arbeit war, so muſste nach der Anfertigung durch Messung mit einem Reflexionsgoniometer untersucht werden, in wie weit die Axen der Stäbchen die geforderte Richtung hatten. Bei der zweiten Serie ist von jeder Gattung nur ein Stäbchen untersucht worden, weil die Einrichtung beim Sägen so getroffen war, daſs alle aus einem Stück geschnittenen Prismen fast absolut dieselbe Richtung der Axe erhielten. Die Fehler blieben immer unter $\frac{1^\circ}{2}$, ja meist unter $\frac{1^\circ}{4}$ und waren deshalb gegenüber der sonstigen Unsicherheit des Endresultates, das ihre Berücksichtigung höchstens um $\frac{1}{300}$ des Werthes modificirt hätte, gänzlich ohne Belang.

Digitized by Google

Bei dem Stäbchen der dritten Serie waren die Abweichungen von derselben Ordnung, aber von noch geringerem Einflufs.

II. Ueber die Beobachtungsmethode.

6. Der Mefsapparat. Der Apparat, mittelst dessen ich die Steinsalzstäbchen belastete und ihre Biegungen mafs, war derselbe, den schon Hr. Dr. Baumgarten zu seiner Arbeit benutzt hatte, und den mir nach ihm Hr. Geheimrath Neumann zu leihen die Güte hatte. Die längere Beschäftigung mit ihm machte eine Reihe von Abänderungen und Zuthaten nothwendig, die durch die sogleich zu besprechenden Fehlerquellen bei seiner Handhabung motivirt werden. Der mir überkommene Theil [1]) seiner Einrichtung ist folgender:

Zwei messingene Schneiden sind bestimmt, die Enden des Stäbchens zu unterstützen; sie sind auf einer starken Schiene einander parallel zu verschieben, um Stäbchen von verschiedenen Längen zu tragen. Eine in einen Bügel gefasste Schneide, an der eine Waagschaale zum Aufnehmen der Gewichte hängt, wird auf die Mitte des Stäbchens gelegt. Eine einfache Vorrichtung gestattet, die Waagschaale an ihrem Bügel zu unterstützen und so die Belastung, bis auf die Schneide, die während der ganzen Versuchsreihe unverändert liegen bleibt, zu arretiren. An der Schneide befindet sich eine Marke, deren Stellung mit einem normal zur Axe des Stäbchens gerichteten Mikroskop mit Mikrometerschraube abgelesen wird.

Da ich wegen der Abweichung des Belastungspunktes vom Mittelpunkt der beiden Schneiden dieselben öfter verschieben musste, um eine andere Stelle des Stäbchens in die Axe des Mikroskopes zu bringen, legte ich, um dabei ihren Abstand unverändert gleich der in Rechnung gezogenen Länge des Stäbchens zu erhalten, zwischen sie ein genau diese Länge darstellendes Messingblech von der in Fig. 6, Taf. I angegebenen Form. Der Bügel, in

1) Abbildung, diese Ann. CLII, 3.

Digitized by Google

den die Schneide gefasst war, und ein angeschraubter Draht bildeten zusammen den festen Ansatz, der in § 4 erwähnt ist und eine Länge L von 120^{mm} hatte; eine so bedeutende Länge machte die Fehlerglieder zweiter Ordnung, von denen dort gesprochen ist, durchaus nicht unbedeutend; ich wandte darum bei der zweiten und dritten Serie eine Schneide an, für die L nur $= 10^{mm}$ war und die nebenbei statt 8 Gramm nur 1,22 wog, was erlaubte, ein bedeutend gröfseres Intervall der elastischen Biegung zu messen, als früher; — denn die Schneide bleibt ja immer auf dem Stäbchen liegen. Statt an einer Kette, bei der nie bestimmt war, wie viel Glieder nach der Arretur der Waagschaale noch am Stäbchen zogen, hing ich dieselbe an einem Seidenfaden auf, der steif genug war, sich bei der Arretur der Waagschaale aus dem Haken an der Schneide heraus zu heben und wegen seiner Dehnbarkeit gestattete, fast ohne Erschütterung zu belasten. Die weiteren Einrichtungen zu motiviren, mufs ich erst einige Fehlerquellen erörtern.

7. Die Fehler beim Auflegen der Schneide. Es ist der theoretischen Erörterung zu Grunde gelegt, dafs das Stäbchen in einer bestimmten Linie normal zur Längsrichtung des Stäbchens und in derselben überall gleichmäfsig belastet sey.

Durch die Verschiebung der beiden Lager ist diese Belastungslinie gerade in die Axe des Mikroskopes gebracht; man hat also eine Controle, ob die Forderung erfüllt ist, dafs die *Schneide* in die Axe fällt. Da die Hand zu unsicher ist, die wünschenswerthe Genauigkeit zu erlangen, bin ich ihr durch die kleine in Fig. 7, Taf. I gezeichnete Vorrichtung zu Hülfe gekommen, in der *S* das Schneidegestell bezeichnet. Sie wird über die, die beiden Lager tragende Schiene des Apparates geklemmt und durch Hin- und Herschieben so gerichtet, dafs das in seiner Hülse vor und zurück gezogene Mikroskop das Bild der Schneide stets unter dem Fadenkreuz zeigt. So ist die Abweichung von der geforderten Belastungslinie sehr

Digitized by Google

klein zu machen möglich, und wird sie dadurch, daſs das Aufsetzen und Abnehmen der Schneide nur mittelst der Schraube dieser kleinen Vorrichtung geschieht, auch so erhalten.

Damit diese Linie überall gleich stark belastet werde, ist nöthig, daſs der Mittelpunkt der ausgeübten Kraft senkrecht unter der Längsmittellinie des Stäbchens liegt; das ist aber auch mit der obigen Vorrichtung nicht zu erreichen, weil diese Richtung keine äuſserlich bestimmt markirte ist. Der darum unvermeidliche Fehler ist aber von groſsem Einfluſs[1]); ich habe deshalb eine Methode ersonnen, ihn durch vier Beobachtungen gänzlich zu eliminiren. Dazu ist hier nur nöthig die Form zu bestimmen, in der er auftritt. Ist $p_0 + p_1 z$ (die z von der Mittellinie des Stäbchens gerechnet) der auf die Flächeneinheit im Abstand $+ z$ ausgeübte Druck, so gilt zu seiner Bestimmung

$$II = \int_{-\frac{B}{2}}^{+\frac{B}{2}} (p_0 + p_1 z)\, dz = p_0 B$$

und auſserdem, falls die Verticale durch den Schwerpunkt der angebrachten Last um $\frac{\delta}{2}$ von der Längsmittellinie des Stäbchens entfernt ist (s. Fig. 8, Taf. I):

$$II\,\frac{\delta}{2} = \int_{-\frac{B}{2}}^{+\frac{B}{2}} (p_0 + p_1 z)\, z\, dz = \frac{p_1 B^3}{12}.$$

p_0 ist also der in *derselben* Weise gleichmäſsig vertheilte Druck, als wenn der Fehler im Aufsetzen der Schneide $\delta = 0$ wäre; p_1 hingegen verursacht eine Drehung, die die Senkung auf der einen Seite vergröſsert, auf der an-

1) Trotz aller Vorsicht habe ich Fälle beobachtet, wo ohne Anwendung der folgenden Methode Fehler von $\frac{1}{40}$ des gesammten Werthes gemacht worden wären. Siehe z. B. Serie 3: W. XI und XIII. Gr. XI.

Digitized by Google

dern verkleinert, und mit $\delta\ \Pi$ proportional ist. Wird also die Senkung auf beiden Seiten an dem Hebelarm H resp. H_1 beobachtet, so giebt dies die beiden Werthe

$$\eta_r = \Pi N + \delta\ \Pi H M$$
$$\eta_l = \Pi N - \delta\ \Pi H_1 M.$$

Der nächstliegende Gedanke nun, die Senkung der *Mittellinie* selbst zu messen, wo H und $H_1 = 0$ sind, und man also direct die der Belastung Π entsprechende Biegung abliest, ist aus verschiedenen practischen Bedenken zu verwerfen, von denen das wichtigste ist, dafs keine Controle möglich ist, ob man auch wirklich die vom Mikroskop beobachtete Marke in der Längsmittellinie angebracht hat, welches auch ohne die andern genügt, den Vorschlag zu verwerfen.

Zur vollständigen Elimination des bestimmten Fehlers gelangte ich durch die folgende, in Fig. 9, Taf. I verdeutlichte Einrichtung der Schneide, deren Länge mit B bezeichnet seyn mag. In dem Bügel waren hart unter der eigentlichen Schneide an beiden Seiten runde Oeffnungen angebracht und über diese Spinnenfäden gespannt, und zwar in solchem Abstand von der Schneide, dafs man von der einen Seite unter dem Stäbchen hinweg das Mikroskop deutlich auf das an der andern Seite befindliche System einstellen konnte. Die Entfernungen dieser Fäden von der Vertikalen durch den Schwerpunkt der Schneide mit daran hängender Waagschaale konnten natürlich nicht vollständig gleich gemacht werden, sondern waren resp. $\frac{B + \Delta}{2}$ und $\frac{B - \Delta}{2}$, wo Δ den Fehler bezeichnet. Hiernach sind die Hebelarme H und H_1, an denen die Drehungen abgelesen wurden, gemäfs der Fig. 8, Taf. I resp.

$$= \frac{B + \Delta - \delta}{2} \text{ und } \frac{B - \Delta + \delta}{2}$$

also die Senkungen zu beiden Seiten abgelesen:

$$\eta_r' = \Pi N + \delta\ \Pi \frac{(B + \Delta - \delta)}{2} M$$

$$\eta_l' = \Pi N - \delta\ \Pi \frac{(B - \Delta + \delta)}{2} M.$$

Digitized by Google

Diese beiden Messungen sind bei ganz unveränderten Umständen gemacht; aus ihrem Mittel gehen schon die Glieder erster Ordnung heraus, nicht aber die zweiter, die zuweilen noch von Belang waren, zumal wenn Δ und δ entgegen gesetztes Vorzeichen hatten. Zu dem Zwecke, sie zu eliminiren, mufste eine zweite Beobachtungsreihe bei einer andern Lage der Schneide angestellt werden. Um zugleich die übrigen Umstände möglichst zu ändern, die zufällig störend wirken konnten, legte ich das Stäbchen um, d. h. die eine Seite, die eine gewisse Marke trug und zuvor (wie der obere Index *o* sagen sollte) *oben* gelegen hatte, nach *unten*. Da ergab sich beim Aufsetzen ein anderer Fehler δ_1, während die Ungenauigkeit der Schneide selbst $= \Delta$ blieb. So sind diese zwei Beobachtungen:

$$\eta_o'' = II\,N + \delta_1\; II\,\frac{(B + \Delta - \delta_1)}{2}\,M$$

$$\eta_k'' = II\,N - \delta_1\; II\,\frac{(B - \Delta + \delta_1)}{2}\,M.$$

Aus diesen 4 Gleichungen ist die wahre Biegung $II\,N$ zu bestimmen. Die einfache Rechnung ergiebt, wenn ich zur Abkürzung und zur Bequemlichkeit beim practischen Rechnen die Bezeichnung einführe:

$$\eta_r'' - \eta_k'' = d_u \qquad \eta_r'' - \eta_o'' = d_r$$
$$\eta_r^o - \eta_k^o = d_o \qquad \eta_k'' - \eta_k^o = d_k$$

$$II\,.\,N = \frac{\sum_1^4 \eta}{4} - \frac{(d_u + d_o)\,(d_r + d_k)}{4\,(d_u - d_o)} + \frac{B^2}{B^2}\,\frac{d_u\,d_o}{3\,\Sigma\,\eta}$$

wo das erste Glied das Mittel aus allen 4 Messungen bezeichnet, das letzte aber fast stets zu vernachlässigen ist. Ich bezeichne das Correctionsglied wegen des Aufsetzens der Schneide mit $\frac{\alpha}{4}$, so kommt das gesuchte Resultat

$$II\,N = \frac{\sum_1^4 \eta - a}{4}.$$

Digitized by Google

Die Schneide hat während der Belastung stets eine etwas andere Lage, als während der Arretur der Waagschaale, weil ihr eigner Schwerpunkt nicht senkrecht über dem der angehängten Waagschaale liegt. Durch besondere Versuche konnte controlirt werden, dafs dieser Fehler ein sehr kleines, zulässiges Maafs nicht überschritt.

8. Die Bestimmung der Dimensionen der Stäbchen. Die in Rechnung gezogene Länge der beobachteten Stäbchen ist die senkrechte Entfernung der beiden Schneiden, auf denen dieselben liegen. Diese Entfernung bestimmte ich für alle Beobachtungen der II. und III. Serie im Voraus, indem ich die in I, § 6 erwähnten Metallbleche nach dem Normalmeter auf dem Königsberger Aichamt auf die Länge von 50 und 63^{mm} brachte (für die kürzeren und längeren Stäbchen). Diese zwei Längen waren erwählt, weil sie, aufser dafs sie den wirklichen Längen der Stäbchen recht gut entsprachen, die Eigenschaft haben, dafs bis auf 0,0002 genau

$$50^3 = \frac{63^3}{2}$$

ist, was die Vergleichung der den Stäbchen von verschiedener Länge entsprechenden Biegungen erleichterte.

Die Bestimmung der Dicke und Breite der Stäbchen, d. h. die Messungen derselben zur Berechnung derjenigen lineären Functionen, welche die Gestalt der Stäbchen am genähersten wiedergeben, geschah in folgender Weise.

Da die Kanten der Stäbchen beim Schleifen nicht völlig rein zu erhalten waren, sondern stets, entweder durch eine sehr geringe Auflösung oder durch Ansetzen von kleinen Salzkörnchen aus der beim Schleifen benutzten Lösung verändert wurden, so war es nicht thunlich, die Breite der Flächen der Stäbchen zur Bestimmung der Dimensionen zu messen. Statt dessen führte ich, gemäfs dem Vorschlag meines verehrten Lehrers, Geheimrath Neumann, gegen das, wie in Fig. 13, Taf. I angedeutet, an eine feste Widerlage gelegte Stäbchen *ss* ein Messinglineal *ll* heran, das einige Theilstriche trug, auf welche dasselbe Mikro-

Digitized by Google

skop, das zur Messung der Biegungen diente, eingestellt war. Die Stäbchen der dritten Serie lagen während der Messungen in einem kleinen mit Terpentinöl gefüllten Trog.

Indem das Lineal *l l* einmal bis an die feste Widerlage und dann gegen das Stäbchen geführt wurde, liefs sich mit Genauigkeit die Dicke und Breite an derselben Stelle bestimmen. Wiederholte Beobachtungen differirten selten um 1 oder 2 Trommeltheile der Mikrometerschraube $\left(=\frac{1^{mm}}{800}\right)$, zumal seitdem ich das an das Stäbchen herangeschobene Ende des Lineals mit einer kleinen festgekitteten Salzplatte bedeckte und so verhinderte, dass sich nach und nach eine Vertiefung in der festen Widerlage bildete. Mit dieser Vorrichtung wurde die Dicke der längeren Gattung Stäbchen an 7, der kürzeren an 5 gleich weit von einander entfernten Punkten gemessen, darnach die vorher obere Fläche des Stäbchens nach unten gelegt, und die Messungen wiederholt. Die Mittelwerthe aus ihnen setzte ich gleich den in der Mittellängslinie stattfindenden Dimensionen und berechnete aus ihnen nach der Methode der kleinsten Quadrate die zwei lineären Functionen für die zwei Hälften des Stäbchens.

9. Die Ablesungsfehler. Um die Fehler beim Ablesen zu verringern, musste zunächst das Object, auf das das Fadenkreuz des Mikroskopes eingestellt wurde, ein möglichst günstiges seyn. Daher spannte ich über die Oeffnungen der Schneide statt *einfacher* Spinnenfäden *parallele* im Abstand von $\frac{1}{20}$ bis $\frac{1^{mm}}{40}$ und erreichte dadurch eine Sicherheit in der Ablesung von mehr als $\frac{1^{mm}}{2000}$.

Ehe mir diese mühsame Arbeit recht gelingen wollte, wandte ich, und fast mit demselben günstigen Erfolg, starke gezogene Schellackfäden *einzeln* an, die sich im durchgehenden Licht bei günstigen Umständen so scharf als Doppellinien markirten, dafs einmal ein sehr erfahrner Beobachter einen solchen für zwei parallele Spinnenfäden

Digitized by Google

hielt. Ich kann dies Verfahren sehr empfehlen; es ist nur bei wechselnder Beleuchtung (also bei Tageslicht) gefährlich.

Die zur Messung der Biegungen angebrachte Mikrometerschraube war schon mehrmals benutzt und gut befunden, so dafs ich, ohne sie zu prüfen, die erste Serie Beobachtungen mit ihr anstellte. Erst bei deren Berechnung bemerkte ich so bedeutende Abweichungen gleichseinsollender Werthe, dafs ich mich zur Prüfung der Schraube entschloss. Ich mafs dieselbe kleine Entfernung innerhalb 7 bis 8 Umläufen der Schraube sehr oft an verschiedenen Stellen, nahm an, dafs das Mittel aus allen die wirkliche Länge sey, und suchte nun, welche Gröfse zu jeder an der Trommel der Schraube abgelesenen Zahl zu addiren sey, um durch Anwendung dieser Correction alle Messungen übereinstimmend zu machen. Es gelang, alle auf dem fast ausschliefslich benutzten Intervall von 7 bis 8 Umgängen angestellten Messungen bis auf 0,3 Trommeltheile (und so grofs schätze ich den Fehler in der Ablesung) zur Uebereinstimmung zu bringen durch die in Fig. 10, Taf. I dem Bild der Trommel beigefügten Correctionen. Darum hielt ich mich für berechtigt, diese Correctionszahlen als Mittelwerthe der in dem ganzen benutzten Intervall erforderlichen anzuwenden. — Die ganzen Schraubenumgänge zeigen keine Verschiedenheiten.

Wenn ich noch hinzufüge, dafs die Vergleichung der Mikrometerschraube mit dem auf dem Königsberger Aichamte vorhandendn Normalmeter, soweit dessen dicke Theilstriche eine scharfe Messung gestatteten, (Unsicherheit von 5 Trommeltheilen!) genau 8 Umgänge oder 800 Trommeltheile $= 1^{mm}$ ergaben, so wird man nach dem Gesagten ein vollständig klares Bild der Zuverlässigkeit der Messungen und ihrer Reduction auf absolutes Maafs haben.

10. Die Wiederholungen der Beobachtungen. Behufs gröfserer Sicherheit wurden die Messungen der elastischen Biegungen in folgender Weise wiederholt, wie es durch die vorausgeschickten Betrachtungen bereits motivirt ist.

Digitized by Google

Jede Einstellung des Fadenkreuzes wurde drei Mal, jede Belastung zwei Mal bei sonst unveränderten Umständen wiederholt.

Bei einem jeden Stäbchen wurde mit 4 bis 6 verschiedenen Gewichten belastet. Diese ganze Beobachtungsreihe wurde erst mit dem vordern Faden der Schneide angestellt, dann mit dem hintern wiederholt, darnach das Stäbchen umgelegt und sämmtliche Beobachtungen für diese Lage vorgenommen. Von jeder Gattung wurde eine gröfsere Anzahl Stäbchen (2 bis 9) beobachtet. Durch letzteres wurden die Fehler bei der Bestimmung der Dimensionen und der Einfluſs von Unregelmäſsigkeiten im Material nach Möglichkeit beseitigt.

Die vorstehenden zahlreichen Fehlererörterungen habe ich, trotz ihres abschreckenden Eindruckes, mitgetheilt, um zu zeigen, daſs keine Vorsicht versäumt ist, das Endresultat von fremden Einflüssen zu befreien, und zugleich zu beweisen, daſs dieselben zum gröſsten Theil von Belang sind. Ich habe *diese* Discussionen der Angabe der Resultate vorausgeschickt, weil sie die Einzelheiten der Beobachtungsmethode motivirten, werde aber an dieselben nun sogleich die Beobachtungstafeln anschlieſsen, um im Zusammenhang zu bleiben und erst *nach* diesen die, in der Einleitung schon angedeuteten, Fragen erörtern, die zwar zum Endresultat theilweise eine Correction fügten, aber die Beobachtungsmethode nicht modificirten: nämlich nach dem Einfluſs von Rückstand, elastischer Nachwirkung und Temperatur.

III. Die Resultate der Messungen der elastischen Biegungen.

11. Die I. Serie von Beobachtungen. Schon in der Einleitung ist erwähnt worden, daſs die Untersuchung der ersten mit der Hand angefertigten Stäbchen erst die Veranlassung zur Bestimmung der verschiedenen Fehler war. Es ist nur *eine* Correctur bei ihnen angebracht, die wegen der Gestalt, die nachträglich noch zu

Digitized by Google

bestimmen möglich war, unter der Voraussetzung, dafs die wirklich eintretende Biegung gleich dem Mittel aus den den beiden Hälften des Stäbchens für sich entsprechenden gesetzt werden könne. Ihr Werth ist nach § 3:

$$\gamma = + \frac{3}{16} \frac{(a + \alpha) L}{D}.$$

Die untersuchten Gattungen von Stäbchen sind charakterisirt durch die Richtung ihrer Axe; je nachdem dieselbe lag in der

Normale einer Würfel-, Granatoëder-, Octaëderfläche sind dieselben bezeichnet mit *W.* *G.* *O.*

Bei den Normalen zu Pyramidenwürfelflächen ist zu dem Zeichen *Pw.* noch der Winkel gefügt, den dieselbe mit der Würfelnormale macht, also res p. *Pw.* $11\frac{1}{4}^0$, *Pw.* $22\frac{1}{2}^0$, *Pw.* $33\frac{3}{4}^0$.

Die verschiedenen Stäbchen derselben Gattung sind durch Nummern unterschieden, die als die mehrfach erwähnte Marke an einem Ende eingeritzt war.

Ich wiederhole die Bedeutung der angewandten Bezeichnungen: Es war D = Dicke, B = Breite, L = Länge, γ die Correction wegen der Gestalt, $\varkappa$ die der Belastung mit 1 gr. entsprechende Biegung.

$\varkappa$ ist aus den beobachteten Biegungen nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet; die daraus bestimmten, den verschiedenen Belastungen entsprechenden Biegungen sind im Folgenden mit den beobachteten verglichen, um ein Urtheil über die Uebereinstimmung zu gewähren. Es ist ferner

Sa das Gewicht der Waagschaale = 6,66 Gramm.

E der Elasticitätscoëfficient.

Da die Messungen vor der Prüfung der Schraube gemacht sind, welche die ganzen Schraubenumgänge als völlig gleich ergeben hat, so enthalten zwar alle Messungen ihre Fehler *unreducirt*, dieselben sind aber bei Biegungen von sehr nahe 100 Trommeltheilen verschwindend, und diese Werthe sind demnach zuverlässiger, als die andern Ab-

Digitized by Google

lesungen. Ich habe aus ihnen noch einmal für sich bei den betreffenden Stäbchen $\varkappa$ und E bestimmt und diese Werthe als $\varkappa_1$ und E_1 beigegeben. Noch erinnere ich, dafs 800 Trommeltheile = 1 Millimeter sind.

W. Stäbchen normal zur Würfelfläche.

W. No. II. $D = 819{,}5 = 1{,}024^{mm}$ $B = 2471 = 3{,}09^{mm}$ $L = 45^{mm}$ $\gamma = -0{,}02$

Belastung:	Sa + 10	Sa + 20	Sa + 30	Sa + 40	Sa + 50
Biegung: ber.	22,5	36,0	49,5	63,0	76,5
beob.	21,2	35,7	49,8	62,8	77,3
Fehler	+ 1,3	+ 0,3	− 0,3	+ 0,2	− 1,8

$\varkappa = 1{,}35$ $E = 3980000$ gr.

W. No. III. $D = 916 = 1{,}145^{mm}$ $B = 2552 = 3{,}19^{mm}$ $L = 45^{mm}$ $\gamma = -0{,}03$

	Sa + 10	Sa + 20	Sa + 30	Sa + 40	Sa + 50
ber.	16,8	25,3	34,8	42,3	53,8
beob.	16,7	26,1	35,1	44,5	52,7
	+ 0,1	− 0,8	− 0,3	− 2,2	+ 1,1

$\varkappa = 0{,}948$ $E = 3900000$ gr.

W. No. IV. $D = 704 = 0{,}88^{mm}$ $B = 2102 = 2{,}63^{mm}$ $L = 60{,}75^{mm}$ $\gamma = -0{,}04$

	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	Sa + 20
ber.	114,6	143,9	173,2	202,4
beob.	113,3	143,3	173,6	203,5
	+ 1,3	+ 0,6	− 0,4	− 1,1

$\varkappa = 5{,}846$ $E = 3980000$ gr.
$\varkappa_1 = 5{,}92$ $E_1 = 3930000$ gr.

Pw. 22½°. Stäbchen normal zum Pyramidenwürfel von 22½°.

Pw. No. I. $D = 755 = 0{,}94^{mm}$ $B = 2144 = 2{,}68^{mm}$ $L = 45^{mm}$ $\gamma = -0{,}006$

	Sa + 10	Sa + 20	Sa + 30	Sa + 40
ber.	37,0	57,6	79,2	100,8
beob.	34,6	56,5	79,4	101,4
	+ 2,4	+ 1,1	− 0,2	− 0,6

$\varkappa = 2{,}215$ $E = 3630000$ gr.
$\varkappa_1 = 2{,}228$ $E_1 = 3610000$ gr.

Digitized by Google

Pw. No. III. (1). $D = 986 = 1{,}23^{mm}$ $B = 2122 = 2{,}65^{mm}$ $L = 60{,}75^{mm}$ $\gamma = -0{,}04$

	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	Sa + 20	Sa + 25	Sa + 30
ber.	44,7	56,1	67,5	78,9	90,3	101,7
beob.	44,6	56,7	67,8	78,5	89,7	101,8
	+ 0,1	− 0,6	− 0,3	+ 0,4	+ 0,6	− 0,1

$x = 2{,}28$ $E = 3830000$ gr.

(2.) Dasselbe theilweise wiederholt:

	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	Sa + 20	Sa + 25	Sa + 30
ber.	46,0	57,7	69,4	81,1	92,8	104,6
beob.	46,5	58,3	69,5	81,0	93,0	104,1
	− 0,5	− 0,6	− 0,1	+ 0,1	− 0,2	+ 0,5

$x = 2{,}345$ $E = 3730000$ gr.

Pw. No. III. (3.) $D = 1000 = 1{,}25^{mm}$ $B = 2122 = 2{,}65^{mm}$ $L = 45^{mm}$ $\gamma = -0{,}023$

	Sa + 10	Sa + 20	Sa + 30	Sa + 40	Sa + 50
ber.	15,2	24,3	33,4	42,5	51,6
beob.	14,6	23,6	33,4	42,7	51,4
	+ 0,6	+ 0,7	0	− 0,2	+ 0,2

$x = 0{,}910$ $E = 3800000$ gr.

Pw. No. IV. $D = 1003 = 1{,}25^{mm}$ $B = 1799 = 2{,}25^{mm}$ $L = 45^{mm}$ $\gamma = -0{,}004$

	Sa + 10	Sa + 20	Sa + 30	Sa + 40	Sa + 50
ber.	18,3	29,3	40,3	51,3	62,5
beob.	18,6	30,0	41,0	50,9	61,9
	− 0,3	− 0,7	− 0,7	+ 0,4	+ 0,6

$x = 1{,}10$ $E = 3670000$ gr.

G. Stäbchen normal zur Granatoëderfläche.

G. No. I. (1) $D = 894 = 1{,}12^{mm}$ $B = 1616 = 2{,}02^{mm}$ $L = 60{,}75^{mm}$ $\gamma = -0{,}024$

	Sa+5	Sa + 10	Sa + 15	Sa + 20	Sa + 25	Sa + 30
ber.	90,6	113,6	136,7	159,8	182,9	206,0
beob.	90,5	114,4	137,3	158,2	182,0	208,4
	+ 0,1	− 0,8	− 0,6	+ 1,6	+ 0,9	− 2,4

$x = 4{,}62$ $E = 3360000$ gr.
$x_1 = 4{,}65$ $E_1 = 3310000$ gr.

Digitized by Google

G. No. I. (2.) $D = 896$ $B = 1616$ $L = 45^{mm}$
$= 1{,}145^{mm}$ $= 2{,}02^{mm}$ $\gamma = -0{,}004$

Belastung:	Sa + 10	Sa + 20	Sa + 30	Sa + 40
Biegung: ber.	31,3	50,1	68,9	87,7
beob.	31,5	51,4	69,1	87,1
Fehler:	− 0,2	− 1,3	− 0,2	+ 0,6

$\varkappa = 1{,}883$ $E = 3400000$ gr.

G. No. II. $D = 806$ $B = 1665$ $L = 45^{mm}$
$= 1{,}01^{mm}$ $= 2{,}81^{mm}$ $\gamma = -0{,}028$

	Sa + 10	Sa + 20	Sa + 30	Sa + 40
ber.	40,6	65,2	89,6	114,2
beob.	40,9	62,9	89,6	115,3
	− 0,3	+ 2,3	0	− 1,1

$\varkappa = 2{,}45$ $E = 3390000$ gr.
$\varkappa_1 = 2{,}41$ $E_1 = 3460000$ gr.

O. Stäbchen normal zu einer Octaëderfläche.

O. No. I. $D = 803{,}5$ $B = 2394$ $L = 45^{mm}$
$= 1{,}004^{mm}$ $= 2{,}99^{mm}$ $\gamma = -0{,}008$

	Sa + 10	Sa + 20	Sa + 30	Sa + 40
ber.	31,7	50,8	69,9	89,0
beob.	31,5	49,0	69,6	91,0
	+ 0,2	+ 1,8	+ 0,3	− 2,0

$\varkappa = 1{,}914$ $E = 3170000$ gr.

O. No. II. $D = 782$ $B = 2560$ $L = 45^{mm}$
$= 0{,}98^{mm}$ $= 3{,}20^{mm}$ $\gamma = -0{,}023$

	Sa + 10	Sa + 20	Sa + 30	Sa + 40
ber.	31,8	51,1	70,3	89,5
beob.	30,3	51,0	71,1	89,9
	+ 1,5	+ 0,1	− 0,8	− 0,4

$\varkappa = 1{,}89$ $E = 3180000$ gr.

Digitized by Google

O. No. II. (2.) $D = 778$ $B = 2560$ $L = 60{,}75^{mm}$
$= 9{,}972$ $= 3{,}20^{mm}$ $\gamma = -0{,}028$

	Sa+5	Sa + 10	Sa + 15	Sa + 20	Sa + 25	Sa + 30
ber.	56,9	79,8	103,9	126,9	152,0	176,1
beob.	56,6	80,0	102,6	127,3	152,4	175,7
	+ 0,3	— 0,2	+ 1,3	— 0,4	— 0,4	+ 0,4

$x = 4{,}81$ $E = 3090000$ gr.
$x_1 = 4{,}78$ $E_1 = 3110000$ gr.

Ich stelle die Werthe von E für die 4 untersuchten Gattungen hier noch einmal zusammen, um den Ueberblick zu erleichtern, und nehme das Mittel daraus:

W. II. 3980000
III. 390
IV. 396
3950000 gr.

Pw. $22\frac{1}{2}°$ I. 3620000
III. 378
III. 380
IV. 367
3720000 gr.

G. I. 3340000
II. 340
II. 343
3390000 gr.

O. I. 3170000
II. 318
II. 310
3150000 gr.

Wendet man die in § 1 angeführte Neumann'sche Formel

$$\frac{1}{E_l} = M - N(\cos^4(l, x) + \cos^4(l, y) + \cos^4(l, z))$$

auf die vier untersuchten Lagen der Prismenaxe im Krystall an, setzt für E die ebengefundenen Werthe und berechnet daraus die Constanten M und N, so findet sich (für den Fall E in Grammen ausgedrückt ist)

$$M = \frac{0{,}347}{1000000}$$

$$N = \frac{0{,}098}{1000000}.$$

Aus diesen Werthen rückwärts die Elasticitätscoëfficienten für die vier Gattungen Stäbchen bestimmt und mit den

Digitized by Google

beobachteten verglichen ergiebt in Millionen Grammen ausgedrückt folgendes Tableau:

	W.	*Pw.* 22½°	*G.*	*O.*
berechnet:	401	366	336	318
beobachtet:	395	372	339	315

Es ist mehrfach hervorgehoben worden, daſs die Beobachtungen der ersten Serie den Character *vorläufiger* Versuche haben; darum wird man auf die geringe Uebereinstimmung geringes Gewicht legen; ihre Resultate bekommen aber mit denen der zweiten und dritten Serie verbunden einige Wichtigkeit.

Ich wiederhole die Ursachen, die den Beobachtungen der ersten Serie so geringe Uebereinstimmung gegeben haben:

Die Unregelmäſsigkeiten in der Gestalt, die durch die Art der Anfertigung vergröſsert und in der Rechnung nur wenig berücksichtigt waren,

der nicht berücksichtigte Fehler der Mikrometerschraube,

der durch die Beobachtungsmethode *nicht* eliminirte Fehler beim Aufsetzen der Schneide, dem ich den gröſsten Einfluſs von allen zuschreiben möchte.

Diese sind sämmtlich vermieden bei den Beobachtungen der 2. Serie.

12. Auszug aus der II. Serie von Beobachtungen. Die 2. Serie unterscheidet sich von der ersten durch die Anwendung aller in den vorausgeschickten Betrachtungen erörterten Vorsichtsmaſsregeln und Fehlercorrectionen, zu deren Aufsuchung ich eben durch die schlechte Uebereinstimmung der durch die erste Serie von Beobachtungen gefundenen Resultate veranlaſst war.

Diese Correctionen werden in der folgenden Zusammenstellung bei jedem Stäbchen und zwar unter folgenden Buchstaben angeführt werden:

Die Correction wegen der Gestalt des Stäbchens $= \gamma$

„ „ wegen des Fehlers beim Aufsetzen der Schneide . . . . $= \frac{\alpha}{4}$

Digitized by Google

Die Correction wegen der Abweichung der Temperatur, bei der die Messungen vorgenommen sind, von 15° R. . . . . $= \vartheta$

Die eingesetzt wird der gesuchte Elasticitätscoëfficient

$$E = \frac{L^3}{4 \varkappa D^3 B} \left(1 + \gamma + \frac{\alpha}{4 \varkappa} + \vartheta\right).$$

L, *D*, *B* und $\varkappa$ haben dieselbe Bedeutung wie in der ersten Serie, ich wiederhole nur, dafs $\varkappa$ die elastische Biegung für die Belastung von 1 Gramm ist.

Die Ableitung der Correction ϑ wird erst in einem folgenden Abschnitt auf Grund einiger darauf bezüglicher Beobachtungen abgeleitet werden. Der Werth von γ ist in § 3, der von $\frac{\alpha}{4}$ in § 7 angegeben.

Ich stelle im Folgenden die aus dem Mittel der vier Beobachtungen η', η''_1 η_r'' η_1'' gefundenen Biegungen (s. § 7) mit den aus $\varkappa$ rückwärts berechneten zusammen; dazu ihre Abweichungen, um ein Urtheil über die Zuverlässigkeit der Messungen zu gewähren. Die Einheiten der Längen sind, wo nichts anderes angeführt ist, Trommeltheile der Schraube, deren jeder $= \frac{1\,\text{mm}}{800} \cdot \frac{\alpha L}{2}$ resp. $\frac{\alpha L}{2}$ giebt die Differenz der Dicken in der Mitte und an den Enden des Stäbchens; $\frac{AL}{2}$ den Abstand des Belastungspunktes vom Mittelpunkte (s. § 3), der aus Werthen von jenen berechnet ist, welche durch *vorläufige* Dimensionenbestimmungen sich ergaben und von den beigeschriebenen, (die zur Berechnung der Correction γ dienten,) mitunter abwichen.

Sa, das Gewicht der Waagschaale, ist für diese Serie = 6,704 Gramm.

W. Stäbchen in der Würfelnormale.

W. No. III, V sind wegen einer nachträglich bemerkten Veränderung des Objectivs am Mikroskop von der Berechnung ausgeschlossen. Sie ergaben resp. $E = 3670000$

Digitized by Google

und 3500000: das Verhältnifs der Abweichung zu dem Mittel aus den übrigen ist dasselbe wie bei *Gr.* II., und liegt darin die Berechtigung ihrer Ausschliefsung.

W. No. II.

$D = 498{,}4$ $B = 4160$ $L = 63^{mm}$ $\frac{aL}{2} = -11{,}25$

$= 0{,}623^{mm} = 5{,}21$ $\frac{AL}{2} = +0{,}12^{mm}$ $\frac{\alpha L}{2} = -4{,}2$

Belastung:	Sa	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	
Biegung ber.:	64,9	113,3	161,7	210,1	
beob.:	63,8	112,5	161,4	210,9	$x = 9{,}68$
Fehler		+ 1,1	+ 0,8	+ 0,3	− 0,8

$\gamma = -0{,}02$ $\frac{\alpha}{4} = -0{,}013$ $\vartheta = 0$

$E = 4020000$ gr.

W. No. VII.

$D = 604{,}7$ $B = 4173$ $L = 63^{mm}$ $\frac{aL}{2} = -17{,}7$

$= 0{,}756^{mm} = 5{,}22^{mm}$ $\frac{LA}{2} = 0{,}54^{mm}$ $\frac{\alpha L}{2} = +28{,}5$

Sa	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	Sa + 20	Sa + 25	
37,5	65,4	93,4	121,3	149,3	177,2	
36,5	64,8	93,1	120,9	149,8	177,6	$x = 5{,}59$
+1,0	+0,6	+0,3	+ 0,4	− 0,5	− 0,4	

$\gamma = +0{,}005$ $\frac{\alpha}{4} = 0$ $\vartheta = 0$

$E = 3920000$ gr.

W. No. VIII.

$D = 454{,}4$ $B = 3855$ $L = 63^{mm}$ $\frac{aL}{2} = -16{,}8$

$= 0{,}568^{mm} = 4{,}82^{mm}$ $\frac{LA}{2} = -0{,}31^{mm}$ $\frac{\alpha L}{2} = +39{,}0$

Sa	Sa + 2	Sa + 4	Sa + 6	
105,3	136,7	168,1	199,5	
104,9	136,1	168,4	199,9	$x = 15{,}71$
+ 0,4	+ 0,6	− 0,3	− 0,4	

$\gamma = +0{,}006$ $\frac{\alpha}{4} = 0$ $\vartheta = 0$

$E = 4000000$ gr.

Digitized by Google

W. No. IX.

$D = 540$ $B = 4102$ $L = 63^{mm}$ $\frac{aL}{2} = +36{,}0$

$= 0{,}675^{mm}$ $= 5{,}15^{mm}$ $\frac{LA}{2} = 0{,}38^{mm}$ $\frac{\alpha L}{2} = +13{,}2$

	Sa	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	Sa + 20	
ber.	54,1	94,4	134,8	175,1	215,5	
beob.	53,5	93,8	134,2	175,1	215,9	$x = 8{,}07$
	+ 0,6	+ 0,6	+ 0,6	0	− 0,4	

$\gamma = +0{,}034$ $\frac{\alpha}{4} = 0{,}004$ $\vartheta = 0$

$E = 4030000$ gr.

Pw. $11\frac{1}{4}°$. Stäbchen normal zum Pyramidenwürfel von $11\frac{1}{4}°$.

No. I.

$D = 584{,}1$ $B = 3770$ $L = 63^{mm}$ $\frac{aL}{2} = +14{,}1$

$= 0{,}730^{mm}$ $= 4{,}71^{mm}$ $\frac{LA}{2} = 0{,}14^{mm}$ $\frac{\alpha L}{2} = +22{,}8$

Sa	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	
51,1	89,2	127,3	165,4	
51,0	89,0	126,8	165,4	$x = 7{,}62$
+ 0,1	+ 0,2	+ 0,5	0	

$\gamma = +0{,}020$ $\frac{\alpha}{4} = -0{,}05$ $\vartheta = 0$

$E = 3670000$ gr.

Pw. $22\frac{1}{2}°$. Stäbchen normal zum Pyramidenwürfel.

Pw. $22\frac{1}{2}°$. No. III.

$D = 489$ $B = 3738$ $L = 50^{mm}$ $\frac{aL}{2} = -8{,}0$

$= 0{,}611^{mm}$ $= 4{,}67^{mm}$ $\frac{AL}{2} = 0{,}4^{mm}$ $\frac{\alpha L}{2} = -10{,}0$

Sa	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	Sa + 20	
47,0	82,1	117,2	152,3	187,4	
46,0	82,0	116,5	151,8	188,3	$x = 7{,}02$
+ 1,0	+ 0,1	+ 0,7	+ 0,5	− 0,9	

$\gamma = +0{,}006$ $\frac{\alpha}{4} = -0{,}10$ $\vartheta = 0$

$E = 3450000$ gr.

Digitized by Google

Pw. $22\frac{1}{2}°$. No. IV.

$D = 616{,}7$ $B = 4492$ $L = 63^{mm}$ $\frac{\alpha L}{2} = -\ 1{,}8$

$= 0{,}771^{mm}$ $= 5{,}61^{mm}$ $\frac{A L}{2} = 0{,}5^{mm}$ $\frac{\alpha L}{2} = -\ 13{,}8$

	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	Sa + 20	Sa + 25
ber.	66,8	95,4	123,9	158,2	181,0
beob.	67,9	97,1	126,0	154,7	184,3 $x = 5{,}71$
	− 1,1	− 1,7	− 2,1	+ 3,5	− 3,5

$\gamma = -\ 0{,}004$ $\frac{\alpha}{4} = 0{,}004$ $\vartheta = 0$

$E = 3400000$ gr.

Hierbei müssen irgendwelche störenden Einflüsse, z. B. ein Kippen der aufgesetzten Schneide, stattgefunden haben.

Pw. $33\frac{3}{4}°$. Stäbchen normal zum Pyramidenwürfel von $33\frac{1}{4}°$.

No. I [1]).

$D = 437{,}1$ $B = 3760$ $L = 50^{mm}$ $\frac{\alpha L}{2} = -\ 23$

$= 0{,}586^{mm}$ $= 4{,}70^{mm}$ $\frac{L A}{2} = 0{,}42$ $\frac{\alpha L}{2} = +\ 36$

	Sa	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15
	75,1	131,2	187,2	243,3
	74,8	130,8	187,2	243,5 $x = 11{,}21$
	+ 0,3	+ 0,4	0	− 0,2

$\gamma = +\ 0{,}011$ $\frac{\alpha}{4} = +\ 0{,}02$ $\vartheta = 0$

$E = 2970000$ gr.

1) No. 1 war der Länge nach zu $\frac{2}{3}$ gespalten, daher die gemessene Dicke zu grofs, also E zu klein gefunden ist.

Digitized by Google

Pw. $33\frac{3}{4}°$. No. II [1]).

$D = 403{,}2$ $B = 3748$ $L = 63^{mm}$ $\frac{La}{2} = -2{,}5$

$= 0{,}504^{mm}$ $= 4{,}68^{mm}$ $\frac{LA}{2} = 0$ $\frac{La}{2} = 0$

Sa	Sa + 1	Sa + 2	Sa + 3	
ber. 173,6	199,5	225,4	251,3	
beob. 173,3	199,4	225,9	251,1	$x = 25{,}91$
+ 0,3	+ 0,1	− 0,5	+ 0,2	

$\gamma = + 0{,}002$ $\frac{a}{4} = 0$ $\vartheta = 0$

$E = 3210000$ gr.

Pw. $33\frac{3}{4}°$. No. III.

$D = 545{,}5$ $B = 4545$ $L = 63^{mm}$ $\frac{aL}{2} = -11{,}0$

$= 0{,}682^{mm}$ $= 5{,}68^{mm}$ $\frac{AL}{2} = 0{,}47^{mm}$ $\frac{aL}{2} = +6$

Sa	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	
62,0	108,2	154,5	200,7	
62,2	108,1	154,6	200,7	$x = 9{,}25$
− 0,2	+ 0,1	− 0,1	0	

$\gamma = + 0{,}013$ $\frac{a}{4} = + 0{,}08$ $\vartheta = 0$

$E = 3040000$ gr.

Pw. $33\frac{3}{4}°$. No. IV.

$D = 591{,}5$ $B = 4572$ $L = 50^{mm}$ $\frac{aL}{2} = +25$

$= 0{,}780^{mm}$ $= 5{,}72$ $\frac{LA}{2} = 0{,}25^{mm}$ $\frac{aL}{2} = +2$

Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	Sa + 20	Sa + 25	
41,5	59,3	77,0	94,8	112,5	
41,4	59,2	77,2	94,6	112,4	$x = 3{,}55$
+ 0,1	+ 0,1	− 0,2	+ 0,2	+ 0,1	

$\gamma = + 0{,}012$ $\frac{a}{4} = - 0{,}025$ $\vartheta = 0$

$E = 3060000$ gr.

1) Ich bemerke, dafs, während sämmtliche Stäbchen dieser Serie *vor* den angeführten Beobachtungen zu anderen verwandt worden waren, dieses eine Ausnahme machte (s. § 12).

Digitized by Google

G. Stäbchen normal zur Granatoëderfläche.

G. No. I.

$D = 713 \quad B = 4139 \quad L = 50^{mm} \quad \frac{aL}{2} = +40$

$+ 0{,}891^{mm} \quad = 5{,}17^{mm} \quad \frac{AL}{2} = -1{,}17^{mm} \quad \frac{aL}{2} = -36{,}8$

Sa+10	Sa+20	Sa+30	Sa+40	Sa+50	Sa+60	
38,7	61,9	85,1	108,3	131,5	154,7	
38,7	61,9	85,1	108,2	132,0	155,2	$\varkappa = 2{,}32$
0	0	0	+ 0,1	− 0,5	− 0,5	

$\gamma = + 0{,}0015 \quad \frac{a}{4} = ? \quad \vartheta = - 0{,}005$

$E = 2950000$ gr.

G. No. II. Ist wegen des bei *W.* III erwähnten Fehlers ausgeschlossen.

G. No. III.

$D = 388{,}4 \quad B = 3732 \quad L = 63^{mm} \quad \frac{aL}{2} = -68$

$= 0{,}485^{mm} \quad = 4{,}66^{mm} \quad \frac{AL}{2} = +1{,}6^{mm} \quad \frac{aL}{2} = +46$

Sa	Sa+2	Sa+3	Sa+4	Sa+5	Sa+6	
201,9	262,2	292,4	322,5	352,6	382,8	
201,3	262,2	292,6	322,9	352,6	382,7	$\varkappa = 30{,}14$
+0,6	0	− 0,2	− 0,4	0	+ 0,1	

$\gamma = - 0{,}022 \quad \frac{a}{4} = ? \quad \vartheta = 0{,}005$

$E = 3020000$ gr.

G. No. IV.

$D = 522{,}6 \quad B = 3936 \quad L = 50^{mm} \quad \frac{aL}{2} = +0{,}7$

$= 0{,}656^{mm} \quad = 4{,}92^{mm} \quad \frac{LA}{2} = 0 \quad \frac{aL}{2} = -2{,}4$

Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	Sa + 20	Sa + 25	Sa + 30
72,1	102,9	133,7	164,5	195,3	226,1
72,1	102,6	133,6	164,5	195,4	226,3
0	+ 0,3	+ 0,1	0	= 0,1	− 0,2

$\gamma = - 0{,}002 \quad \frac{a}{4} = ? \quad \vartheta = - 0{,}005$

$E = 2950000$ gr.

Digitized by Google

Bei diesen Beobachtungen und aufserdem bei *O.* No. II. war die Einrichtung zur Elimination des Fehlers beim Aufsetzen der Schneide noch nicht getroffen, darum ist $\frac{\alpha}{4}$ nicht bestimmbar gewesen.

O. Stäbchen in der Normale zu einer Octaëderfläche.

O. No. I.

$D = 504$ $B = 2375$ $L = 63^{mm}$ $\frac{aL}{2} = +\ 5,5$

$= 0,630^{mm}$ $= 2,84^{mm}$ $\frac{AL}{2} = -\ 0,4^{mm}$ $\frac{\alpha L}{2} = -\ 41,5$

	Sa	Sa + 2	Sa + 4	Sa + 6	Sa + 8	
ber.	158,4	205,7	253,0	300,2	347,5	
beob.	158,8	205,2	252,8	300,5	347,7	$x = 23,64$
	− 0,4	+ 0,5	+ 0,2	− 0,3	− 0,2	

$\gamma = -\ 0,054$ $\frac{\alpha}{4} = 0,006$ $\vartheta = 0$

$E = 2780000$ gr.

O. No. II.

$D = 691,8$ $B = 2575$ $L = 63^{mm}$ $\frac{aL}{2} = -\ 0,12$

$= 0,865^{mm}$ $= 3,22^{mm}$ $\frac{AL}{2} = -\ 0,17^{mm}$ $\frac{\alpha L}{2} = -\ 25,5$

Sa	Sa+5	Sa+10	Sa+15	Sa+20	
55,8	97,5	139,3	181,0	222,8	
55,0	97,2	139,3	180,8	223,5	$x = 8,35$
+0,8	+0,3	0	+0,2	−0,7	

$\gamma = -\ 0,031$ $\frac{\alpha}{4} = ?$ $\vartheta = -\ 0,004$

$E = 2810000$ gr.

Diese Zahlenwerthe geben zusammengestellt folgende Mittel:

W. II.	4020000	*Pw.* $11\frac{1}{4}^0$ I.	3670000 gr.
VII.	392		
VIII.	400	*Pw.* $22\frac{1}{2}^0$ III.	3450000 gr.
IX.	403	IV.	340
	3990000 gr.		3425000

Digitized by Google

Pw. $33\frac{3}{4}°$	I. 2970000 gr.	*G.* I.	2950000 gr.
	II. 304	III.	302
	III. 321 (?)	IV.	295
	IV. 306		2970000 gr.
	3080000 gr.		

O. I. 2780000
281
2795000 gr.

Diese Werthe in die Neumann'sche Formel § 1 eingesetzt ergeben die beiden Constanten:

$$M = \frac{0{,}419}{1000000} \qquad N = \frac{0{,}166}{1000000}$$

Berechnet man hieraus rückwärts die Elasticitätscoëfficienten für die verschiedenen Richtungen im Steinsalze, so erhält man die folgende Uebereinstimmung mit den beobachteten Werthen:

	W.	*Pw.* $11\frac{1}{4}°$	$22\frac{1}{2}°$	$33\frac{3}{4}°$	*G.*	*O.*	
ber.	3,95	3,77	3,40	3,10	2,98	2,75	Millionen Gramme.
beob.	3,99	3,67	3,42	3,08	2,97	2,79	
Diff.	−4	+10	−2	+2	+1	−4.	

Bei der Berechnung von *M* und *N* aus den sechs Zahlen der zweiten Reihe ist jeder von ihnen ein Gewicht beigelegt gleich der Anzahl von Stäbchen, die zu ihrer Bestimmung verwandt worden sind. Es darf also der auffällig grofse Fehler bei *Pw.* $11\frac{1}{4}°$ nicht Wunder nehmen.

13. Die III. Serie der Beobachtungen der elastischen Biegung. Es kann nicht geleugnet werden, dafs trotz der guten Uebereinstimmung der gefundenen Elasticitätscoëfficienten in den verschiedenen Richtungen mit dem für sie geltenden Gesetz, die Uebereinstimmung der bei verschiedenen Stäbchen derselben Gattung gefundenen Werthe untereinander, (an denen die Methode der kleinsten Quadrate nicht ihre, Fehler bedeckende Wirkung gezeigt hat) zu wünschen übrig läfst, und dafs namentlich die Abweichung der *absoluten* Werthe der Constanten der ersten und zweiten Serie von Beob-

Digitized by Google

achtungen Bedenken erregt. Der Umstand, dafs die durch die zweite Serie gefundenen Elasticitätscoëfficienten sämmtlich kleiner sind, als die aus der ersten, dafs also die gemessenen Biegungen den Umständen nach *gröfser* gewesen sind als jene, und endlich die Gewifsheit, bei der Beobachtung der Biegungen jeden Fehler von Belang vermieden oder eliminirt zu haben, wiesen mich mit Sicherheit darauf, in der Bestimmung der Dimensionen Fehler begangen zu haben. Ein Fehler von $\frac{1}{100}$ der Dicke verursachte ja aufserdem einen von $\frac{1}{30}$ des Elasticitätscoëfficienten.

In der That zeigten die, vorher vielfach zu Untersuchungen der dauernden Biegung verwandten, Stäbchen der zweiten Serie eine merkliche Aenderung in der Politur der Oberfläche, und da die Stäbchen immer mit Petroleum (aus einer Flasche, die stets Stücken Steinsalzes enthielt) bestrichen der Luft ausgesetzt wurden, so konnte nur eine Veränderung des Petroleums *an der Luft*, eine Art Zersetzung, wie sie Hr. Geheimrath Neumann beobachtet zu haben mir mittheilte, dasselbe in einen Zustand bringen, in dem es das Steinsalz angriff. Denn Stücken, die monatelang in einer Büchse in Petroleum aufbewahrt waren, zeigten keine Spur einer ähnlichen Aenderung der Oberfläche. So war bei den Stäbchen, die längere Zeit an der Luft geblieben waren, die Oberfläche zerfressen und dadurch der Widerstand gegen die Biegung vermindert worden, ohne dafs ihre Dicke merklich abgenommen hatte. Diese Annahme wird durch das Folgende begründet werden, vorläufig vergleiche man die Beobachtungen von *Pw.* $33\frac{3}{4}{}^0$ No. I mit III und IV, und sämmtliche Beobachtungen der zweiten Serie mit denen der ersten [1]). Jene

1) Ich mache darauf aufmerksam, dafs, obgleich (aufser *Pw.* $33\frac{3}{4}{}^0$ II) alle Stäbchen ziemlich gleichviel der Luft ausgesetzt gewesen sind, die Zerstörung der Oberfläche bei den verschiedenen Gattungen sehr verschieden vorgeschritten ist. Die Vergleichung mit den Resultaten der dritten Serie zeigt, dafs, wenn man den Krystall aus lauter gleichen Würfelchen zusammengesetzt denkt, das Eindringen der Zerstörung bei den verschiedenen Gattungen Stäbchen ungefähr der Dicke ihrer Oberflächenschicht proportional ist.

Digitized by Google

Stäbchen waren nur zur Bestimmung der Elasticitätsconstanten benutzt worden und zeigten darum eine leidlich gute Politur. zugleich hatten sie gröfsere Dicken; es war daher anzunehmen, dafs die mit ihnen ermittelten Constantenwerthe die genaueren wären.

Die Beobachtungen der zweiten Serie lehren somit, dafs zwar die angebrachten Correctionen die Beobachtungen unter einander besser stimmen lassen als früher, dafs aber die absoluten Werthe der Resultate unsicher bleiben, so lange die Flächen der Stäbchen nicht gegen jede Feuchtigkeit geschützt werden können.

Ich ging also mit aller Vorsicht, die mich die in ihren Resultaten nicht genügende Arbeit der I. und II. Serie gelehrt hatte, an die Herstellung einer neuen Serie von Stäbchen; die alten waren sämmtlich bis auf zwei den Beobachtungen der dauernden Biegung geopfert worden. Jede polirte Fläche wurde augenblicklich mit einer Schicht venetianischen Terpentins bedeckt und die fertigen Stäbchen in kleinen Röhrchen mit Terpentinöl aufbewahrt. Einige, die durch ein wenig Feuchtigkeit, die sie von der Wand der Röhrchen angenommen haben mochten, trübe Flecken erhalten hatten, wurden von Neuem polirt. Auch die Messungen von Dicke und Breite wurden nun in Terpentinöl vorgenommen, wie in § 8 bereits erwähnt worden ist.

Einige vorläufige Versuche zeigten, dafs die elastische Biegung sich nicht änderte, wenn man das Stäbchen mit einer Schicht Terpentin überzogen belastete, — wie ja zu erwarten stand, da sich Terpentin sehr lange flüssig erhält. Beim Umlegen des Stäbchens wurde der Terpentinüberzug erneuert, die Schneiden von dem etwa anhaftenden gereinigt.

Die an den neun Stäbchen der III. Serie angestellten Messungen sind in meiner Dissertation vollständig mitgetheilt; hier folgt ein Auszug.

Die Stäbchen sind nur in drei verschiedenen Richtungen geschnitten: in der

Digitized by Google

Würfel-
Granatoëder- } Normale.
Octaëder-

Die ersten beiden konnten aus demselben Krystall geschnitten werden; von den Stücken, die in der Octaëdernormale die geforderten Dimensionen hatten, besafs ich nur eines, und das gestattete, schon vielfach benutzt, keine Stäbchen anderer Gattungen darzustellen.

Im Folgenden sind nun auf diese neun Stäbchen bezüglich zusammengestellt:

1) Die auf die Mittellängslinie reducirten Dicke- und Breitemessungen[1]), wie sie in dem darauf bezüglichen § 8 erklärt sind.
2) Die der Belastung zu Grunde gelegte Dicke D und Breite B, sowohl in Trommeltheilen, als in Millimetern.
3) Die Entfernung der beiden Schneiden, auf denen das Stäbchen lag, d. i. seine in Rechnung gezogene Länge L.
4) Die Aenderung der Dicke vom Belastungspunkt des Stäbchens bis zu jedem Endpunkt, resp. $\frac{\alpha L}{2}$ und $\frac{\alpha L}{2}$ (siehe § 3).
5) Die Entfernung des Belastungspunkts vom Mittelpunkt des Stäbchens, aus dem vorigen berechnet $= \frac{A L}{2}$.
6) Hierauf folgt die Reihe der wegen des Fehlers der Schraube bereits corrigirten Beobachtungen für die zwei Lagen des Stäbchens, o und u, dadurch unterschieden, dafs die Marke daran sich oben oder unten befand, an der hintern (h) und vordern (v) Seite der Schneide.

1) Die Längen sind, wo nicht eine Benennung den Zahlen beigefügt ist, stets in Trommeltheilen der Mikrometerschraube $= \frac{1}{800}$ Millimeter angegeben.

Digitized by Google

In den Belastungen ist das Gewicht der Waagschaale, die die Grammstücken aufnahm, Sa = 6,704 gr. stehen gelassen, die hinzugefügte Zahl giebt die der aufgelegten gr. an.

Zu unterst folgen die Mittel jeder Verticalreihe, ganz rechts die Mittel der Differenzen auf einander folgender Beobachtungen in jeder Horizontalreihe.

7) Aus diesen Beobachtungen ist die elastische Biegung für 1 Gramm Belastung $= \varkappa$ berechnet.

8) Die aus $\varkappa$ berechneten, den wirklich angewandten Belastungen entsprechenden Biegungen sind ebenso wie in der I. und II. Serie, mit den beobachteten verglichen. Es folgt

9) die aus den Mitteln der Differenzen in den Horizontalreihen berechnete Correction $\frac{a}{4}$ wegen des Fehlers beim Aufsetzen der Scheide.

10) Die aus den Dimensionenbestimmungen berechnete Correction γ wegen der Gestalt des Stäbchens.

Durch ihre Hinzufügung zu dem aus L, D, B und $\varkappa$ berechneten Elasticitätscoëfficienten erhält man den wirklichen, der mit E bezeichnet ist.

Die Beobachtungen wurden in einem Raume angestellt, der sehr constant die Temperatur 15° R. besafs, darum ist die Correctur wegen der Temperatur $\vartheta = 0$ bei allen Beobachtungen.

Anmerkung: In den folgenden Beobachtungstafeln der dritten Serie weichen (ebenso, wie in den früheren) die Resultate merklich von den in der Dissertation mitgetheilten ab. Der Grund liegt hauptsächlich in der Verbesserung der früher falsch angegebenen Correction

$$\gamma = \frac{3}{8}\frac{(\alpha+\alpha)L}{D} \text{ in } \frac{3}{16}\frac{(a+\alpha)L}{D},$$

dann aber auch in der oben angegebenen etwas abgeänderten Berechnungsart der Gröfsen a und α aus den gemessenen Dicken.

Digitized by Google

W. No. XI.

Dimensionenbestimmungen.

D [457 435 414 411 415 433 464,5] Δ B [3150 3400 3342] B

$D = 430{,}4 = 0{,}538^{mm}$; $L = 63^{mm}$; $B = 3398 = 4{,}25^{mm}$.

$$\frac{aL}{2} = 53{,}1 \qquad A = 0{,}001$$

$$\frac{aL}{2} = 46{,}2 \qquad \frac{LA}{2} = 0{,}03^{mm}$$

Messung der Biegungen.

Belastung	Sa	Sa + 1	Sa + 2	Sa + 3	Mittlere Differenzen
o v	138,8	159,4	180,4	202,0	21,1
o h	138,1	158,6	179,6	200,8	20,9
u h	135,4	156,7	176,9	198,1	20,9
u v	144,0	163,7	184,5	205,5	20,5
Mittel	139,1	159,6	180,4	201,6	20,8
berechnet . .	139,0	159,8	180,5	201,3	
Differenz . .	+ 0,1	− 0,2	− 0,1	+ 0,3	

$$\frac{\alpha}{4} = + 0{,}05 \qquad \gamma = + 0{,}12 \qquad \varkappa = 20{,}75$$

$$E = 409000 \text{ gr.}$$

Anmerkung: Wegen der besonders unregelmäfsigen Gestalt dieses Stäbchens ist für seine Dicke eine Function zweiten Grades eingeführt und mit dieser die Correction γ berechnet worden.

W. No. XII.

Dimensionenbestimmungen.

D [844 807 749 758 747 744 744] Δ B [2778 2808 2829] B

$D = 772{,}6 = 0{,}966^{mm}$; $L = 63^{mm}$; $B = 2806 = 3{,}51^{mm}$.

$$\frac{aL}{2} = 78{,}0 \qquad A = 0{,}022$$

$$\frac{aL}{2} = - 8{,}5 \qquad \frac{LA}{2} = 0{,}68^{mm}$$

Messung der Biegungen.

Belastung	Sa + 10	Sa + 20	Sa + 25	Sa + 30	Mittlere Differenzen
u v	67,5	106,6	127,4	148,0	20,1
u h	65,3	105,5	125,7	145,9	20,2
o h	66,3	105,9	125,7	146,5	20,2
o v	65,5	106,1	125,4	146,2	20,3
Mittel	66,15	106,02	126,05	146,65	20,2
berechnet . .	66,1	105,9	126,2	146,1	
Differenz . .	+ 0,1	+ 0,1	− 0,1	+ 0,6	

$$\frac{\alpha}{4} = 0 \qquad \gamma = + 0{,}034 \qquad \varkappa = 3{,}986$$

$$E = 4110000 \text{ gr.}$$

Digitized by Google

W. No. XIII.

Dimensionenbestimmungen.

D [755 739 726 722 720 723 726] A B [4298 4306 4314] B

$D = 730{,}2 = 0{,}913^{mm}$; $L = 63^{mm}$; $B = 4306 = 5{,}38^{mm}$.

$$\frac{aL}{2} = +28{,}5 \qquad A = 0{,}0055$$

$$\frac{\alpha L}{2} = +1{,}5 \qquad \frac{AL}{2} = 0{,}17$$

Messung der Biegungen.

Belastung	Sa + 10	Sa + 20	Sa + 30	Sa + 40	Mittlere Differenzen
o v	50,8	80,4	111,5	142,6	30,6
o h	49,3	78,8	109,6	141,1	30,6
u h	50,8	81,5	113,1	143,4	30,9
u v	49,1	78,9	109,2	139,8	30,2
Mittel	50,0	79,9	110,8	141,7	30,6
berechnet . .	50,5	80,7	110,9	141,1	
Differenz . .	− 0,5	− 0,8	− 0,1	+ 0,6	

$$\frac{\alpha}{4} = +0{,}002 \qquad \gamma = +0{,}015 \qquad \varkappa = 3{,}021$$

$$E = 411000 \text{ gr.}$$

Gr. No. IX.

Dimensionenbestimmungen.

D [676 670 670 659 653 638 628] A B [3691 3657 3596] B

$D = 657{,}0 = 0{,}821^{mm}$; $L = 63^{mm}$; $B = 3650 = 4{,}56^{mm}$.

$$\frac{aL}{2} = +19{,}5 \qquad A = 0{,}015$$

$$\frac{\alpha L}{2} = +33 \qquad \frac{LA}{2} = 0{,}47^{mm}$$

Messung der Biegungen.

Belastung	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15	Sa + 20	Mittlere Differenzen
o v	68,0	96,5	126,2	155,1	29,0
o h	67,0	96,3	124,8	154,0	28,8
u h	68,9	96,8	126,0	155,5	29,4
u v	67,8	97,2	125,7	155,1	29,2
Mittel	67,6	96,7	125,7	154,9	29,1
berechnet . .	67,9	96,9	125,9	154,9	
Differenz . .	− 0,3	− 0,2	− 0,2	0	

$$\frac{\alpha}{4} = 0 \qquad \gamma = -0{,}0033 \qquad \varkappa = 5{,}80$$

$$E = 3400000 \text{ gr.}$$

Digitized by Google

Gr. No. X.

Dimensionenbestimmungen.

D [760 768,5 777 779 799,5] A B [3901 3889 3884] B

$D = 773{,}2 = 0{,}966^{mm}$; $L = 50^{mm}$ $B = 3891 = 4{,}86^{mm}$.

$$\frac{\alpha L}{2} = -16{,}4 \qquad A = 0{,}003$$

$$\frac{\alpha L}{2} = +4{,}4 \qquad \frac{AL}{2} = 0{,}075^{mm}$$

Messung der Biegungen.

Belastung	Sa + 20	Sa + 30	Sa + 40	Sa + 50	Mittlere Differenzen
o v	44,2	61,2	77,0	93,7	16,5
o h	45,3	61,4	78,0	94,0	16,2
u v	45,0	61,0	77,5	94,2	16,4
u h	42,7	59,0	75,8	92,4	16,6
Mittel	44,30	60,65	77,10	93,60	16,5
berechnet . .	44,11	60,63	77,15	93,67	
Differenz . .	+ 0,2	+ 0,1	− 0,1	− 0,1	

$$\frac{\alpha}{4} = -0{,}001 \qquad \gamma = -0{,}05 \qquad \varkappa = 1{,}652$$

$$E = 3430000 \text{ gr.}$$

Anmerkung: In den zwei ersten Reihen ist − 0,3 resp. − 1,6 hinzugefügt. Es wurde ein Kippen der Schneide nach der Seite bemerkt und sein Einfluſs ermittelt. Für die zwei letzten Reihen habe ich die Bezeichnungen h und v gegen einander vertauscht, da das ursprüngliche mir verdächtig war und einen mit dem Uebrigen sehr schlecht stimmenden Werth 3490000 gab.

Gr. No. XI.

Dimensionenbestimmungen.

D [741 751 759 764 762 757 746] A B [3164 3648 3664] B

$D = 755{,}6 = 0{,}944^{mm}$; $L = 63^{mm}$; $B = 3644 = 4{,}55^{mm}$.

$$\frac{\alpha L}{2} = -25{,}5 \qquad A = 0{,}0023$$

$$\frac{\alpha L}{2} = -22{,}5 \qquad \frac{AL}{2} = 0{,}073^{mm}$$

Messung der Biegungen.

Belastung	Sa + 10	Sa + 20	Sa + 30	Sa + 40	Mittlere Differenzen
o v	62,6	100,6	138,6	178,6	38,7
o h	60,7	97,1	133,4	170,8	36,7
u h	60,5	97,6	135,2	172,0	37,2
u v	62,6	99,1	136,6	174,2	37,2
Mittel	61,6	98,6	136,0	173,9	37,6
berechnet . .	62,0	99,1	136,2	173,3	
Differenz . .	− 0,4	− 0,5	− 0,2	+ 0,6	

$$\frac{\alpha}{4} = -0{,}025 \qquad \gamma = -0{,}025 \qquad \varkappa = 3{,}71$$

$$E = 3400000 \text{ gr.}$$

Digitized by Google

O. No. I.

Dimensionenbestimmungen.

D [499 493,5 492,5 489 481 478 466,5] Δ B [2269 2383 2464] B

$D = 486{,}2 = 0{,}608^{mm}$; $L = 63^{mm}$; $B = 2375 = 2{,}97^{mm}$.

$$\frac{\alpha L}{2} = +9 \qquad A = 0{,}006$$

$$\frac{\alpha L}{2} = -24{,}0 \qquad \frac{L A}{2} = 0{,}26^{mm}$$

Messung der Biegungen.

Belastung	Sa	Sa + 2	Sa + 4	Sa + 6	Mittlere Differenzen
u v	161,0	209,5	258,3	307,2	48,7
u h	163,5	211,7	260,0	308,7	48,4
o h	160,7	209,5	257,6	306,8	48,7
o v	164,2	212,7	261,8	309,6	48,5
Mittel	162,4	210,9	259,4	308,1	48,6
berechnet . .	162,5	211,0	259,5	308,0	
Differenz . .	− 0,1	− 0,1	− 0,1	+ 0,1	

$$\frac{\alpha}{4} = +0{,}0025 \qquad \gamma = -0{,}012 \qquad \varkappa = 24{,}25$$

$$E = 3200000 \text{ gr.}$$

O. No. III.

Dimensionenbestimmungen.

D [522 523 524 528 534 547,5 559,5] Δ B [2747 2720 2730] B

$D = 533{,}1 = 0{,}666^{mm}$; $L = 63^{mm}$; $B = 2729 = 3{,}41^{mm}$.

$$\frac{\alpha L}{2} = -4{,}5 \qquad A = 0{,}013$$

$$\frac{\alpha L}{2} = +28{,}5 \qquad \frac{A L}{2} = 0{,}310^{mm}$$

Messung der Biegungen.

Belastung	Sa	Sa + 3	Sa + 6	Sa + 9	Mittlere Differenzen
o v	104,7	151,6	199,5	247,9	47,7
o h	106,7	153,4	200,3	247,6	45,0
u v	104,9	151,8	198,9	244,9	46,7
u h	106,5	154.6	203,1	251,2	48,2
Mittel	105,7	152,8	200,5	247,9	47,4
berechnet . .	105,7	153,1	200,4	247,8	
Differenz . .	0	− 0,3	+ 0,1	+ 0,1	

$$\frac{\alpha}{4} = +0{,}003 \qquad \gamma = +0{,}017 \qquad \varkappa = 15{,}783$$

$$E = 3190000 \text{ gr,}$$

Digitized by Google

O. No. IV.

Dimensionenbestimmungen.

D [744 715,5 705 702 706] *A* *B* [2689 2714 2732] B

$D = 712{,}4 = 0{,}89^{mm}$; $L = 50^{mm}$; $B = 2711 = 3{,}64^{mm}$.

$$\frac{\alpha L}{2} = +31 \qquad A = 0{,}0086$$

$$\frac{\alpha L}{2} = -1{,}4 \qquad \frac{A L}{2} = 0{,}215^{mm}$$

Messung der Biegungen.

Belastung	Sa + 10	Sa + 20	Sa + 30	Sa + 40	Mittlere Differenzen
o *v*	55,6	88,6	121,8	153,8	32,7
o *h*	54,5	88,0	120,4	152,7	32,7
u *v*	56,2	90,0	122,9	156,4	33,4
u *h*	54,4	87,1	119,8	152,5	32,7
Mittel	55,2	88,4	121,2	153,8	32,9
berechnet . .	55,1	88,1	121,1	154,1	
Differenz . .	+ 0,1	+ 0,3	+ 0,1	— 0,3	

$$\frac{\alpha}{4} = -0{,}02 \qquad \gamma = +0{,}015 \qquad \varkappa = 3{,}30$$

$$E = 3190000 \text{ gr.}$$

Von den Stäbchen der zweiten Serie war nur *O*, II benutzbar, nachdem es neu abgeschliffen worden war; und die Aenderung seines Elasticitätscoëfficienten von 2710000 gr. in 3150000 gr. ist der schlagendste Beweis für die Annahme, dafs die Unreinheit der Oberfläche die Ursache der Nichtübereinstimmung der zweiten Serie mit der ersten sey. Das Stäbchen *Gr.* III zeigte auch nach der Neupolitur tiefer gehende Flecke und demgemäfs einen Elasticitätscoëfficienten = etwa 2900000, es ist darum aus der Serie ausgeschlossen worden.

Da, wie oben erwähnt, der Elasticitätscoëfficient in den drei hier untersuchten Richtungen Maxima resp. Minima erreicht, so ist der Einfluſs der Abweichung der Axe der Stäbchen von der geforderten Richtung (ihre Gröfse siehe § 5) für diese drei besonders klein. Abweichungen von 30′ nach irgend einer Richtung modificiren erst die vierte Stelle des Coëfficienten von *N*, sind also ohne Einfluſs auf die angegebenen Werthe. Darum benutzte ich ohne

Digitized by Google

weiteres das Mittel aus den oben angeführten Werthen zur Berechnung von M und N. Dasselbe folgt aus:

W. XI. 409	*G.* IX. 340	*O.* I. 320
411	X. 343	III. 319
411	XI. 340	IV. 319
4103000 gr.	3410000 gr.	3193000 gr.

Alle drei Zahlen haben gleiches Gewicht, wegen der gleichen Anzahl der sie bestimmenden Beobachtungen. In die Gleichung

$$\frac{1}{E_l} = M - N\left[\cos^4(bx) + \cos^4(by) + \cos^4(bz)\right]$$

eingeführt folgt:

$$M = \frac{0{,}3465}{1000000} \qquad N = \frac{0{,}1031}{1000000}$$

(in *naher Uebereinstimmung* mit den Werthen aus der ersten Serie $M = \frac{0{,}347}{1000000}$ $N = \frac{0{,}098}{1000000}$).

Daraus rückwärts die drei Elasticitätscoëfficienten bestimmt und mit den obigen verglichen ergiebt

berechnet:	*W.* 4108000	*G.* 3391000	*O.* 3204000
beobachtet:	4103000	3410000	3193000
Differenz:	+ 5	− 19	+ 11
	1 : 800	1 : 180	1 : 300

Es erübrigt noch die Reduction der Gramme auf Atmosphärendruck; durch diese Berechnung findet sich:

$$M = \frac{3{,}555}{1000000}; \qquad N = \frac{1{,}058}{1000000}$$

$W. = 400400$ Atm.; $G. = 330500$ Atm.; $O. = 312300$ Atm.

Die durch gleiche Belastungen in verschiedenen Richtungen im Steinsalzkrystall hervorgebrachten Dilatationen, auf diesen Richtungen als Längen aufgetragen, beschrieben mit ihren Endpunkten eine Oberfläche, die in Fig. 11, Taf. I perspectivisch dargestellt ist. Die kleinste Dilatation findet senkrecht zur Spaltungsfläche statt.

Zur Vergleichung. der Zahlenwerthe führe ich die

Digitized by Google

Elasticitätscoëfficienten einiger anderer Substanzen an; dieselben sind

für Eisen	= 2000000	Atmosphären
für Kupfer	= 1300000	„
für Blei	= 200000	„
für Glas	= 700000	„
für Marmor	= 250000	„
für Holz	= 20000	„

Die Sicherheit der gefundenen Zahlenwerthe ist nur so grofs, als die, dafs die Oberfläche der Substanz in der Zeit von der Anfertigung der Stäbchen bis zur Beobachtung unverändert geblieben ist. Diese Zeit war kurz, — nur wenige Tage, und es ist bei dem Handhaben der Stäbchen die möglichste Vorsicht angewandt worden; auch zeigt der Augenschein keine Trübung der Politur; dennoch sind Zweifel bei dem enormen Einflufs selbst einer sehr kleinen Aenderung nur zur berechtigt. Die beste Garantie für den Werth der gefundenen Constanten scheint mir die Uebereinstimmung der Zahlen für die Stäbchen derselben Gattung zu seyn; denn obgleich die Stäbchen verschieden lange in Terpentinöl gelegen hatten, ist die gröfste Abweichung unter ihnen $= \frac{1}{100}$. So grofs darf daher wohl auch die Sicherheit der Constanten M und N geschätzt werden.

VI. Einflufs des Rückstandes und der elastischen Nachwirkung.

Jedes Stäbchen erfährt bei einer Belastung mit einem gröfseren Gewicht, als je zuvor in demselben Sinne, eine dauernde Deformation, welche, so lange die Belastung constant bleibt, mit der Zeit einem definitiven Werth asymptotisch entgegenwächst. Ist dieser Werth erreicht, so bringt nach der Entlastung die Wiederbelastung mit demselben oder einem kleineren Gewicht als zuvor keinen Zuwachs zu der erlangten dauernden Biegung. (Voraus-

Digitized by Google

gesetzt ist dabei, daſs Belasten und Entlasten ohne Erschütterung des Stäbchens vor sich geht.)

Um von dieser Veränderlichkeit der dauernden Biegung mit der Zeit bei meinen Beobachtungen nicht gestört zu werden, bog ich das Stäbchen vor dem Beginn einer Reihe Beobachtungen mit einem gröſseren Gewicht durch, als nachher aufgelegt werden sollte. — Wäre hierdurch der Einfluſs nicht völlig eliminirt, so müſsten die, groſsen Belastungen entsprechenden elastischen Biegungen *kleiner* erscheinen, als nach dem Gesetz der Proportionalität zwischen Biegung und Belastung stattfinden sollte. Dem ist aber nicht so, sondern im Gegentheil eine Abweichung von der Proportionalität im *entgegengesetzten* Sinne bei 12 von 19 Beobachtungsreihen der II. Serie (wenn ich die der I., wegen des noch nicht eliminirten Fehlers der Mikrometerschraube übergehe) unzweifelhaft, während auch bei den übrigen *nicht* deutlich das Gegentheil stattfindet.

Die oben angedeutete Theorie basirt aber auf der Annahme der Proportionalität zwischen Biegung und Belastung; es ist daher nothwendig zu untersuchen, ob diese consequente Abweichung von einer zufälligen Störung herrührt, oder ob in Wahrheit das Gesetz der Proportionalität innerhalb der angewandten Belastungen nicht gilt.

Die gewöhnlich „elastische Nachwirkung“ genannte Erscheinung besteht darin, daſs die dauernde Biegung nach der Entlastung nicht vollständig unverändert bleibt, sondern langsam um ein Geringes bis zu einem definitiven Werth hin abnimmt. Dieser Verlust wird *vollständig* ersetzt, wenn mit *demselben* Gewicht, *nur zum Theil*, wenn mit einem *kleineren*, als zuvor, wieder belastet wird. Daher wird bei meinen Beobachtungen nach der Entlastung die elastische Nachwirkung um so gröſser seyn, je gröſser das zuletzt aufgelegte Gewicht war. Die elastische Nachwirkung ist aber auch schon während des Entlastens, das, um Erschütterungen des Stäbchens zu vermeiden, langsam geschieht, thätig, und muſs dadurch alle Biegungen etwas zu groſs erscheinen lassen, und zwar die gröſsten am

Digitized by Google

meisten. So erklärt sich die angeführte consequente Abweichung von der Proportionalität.

Bei der III. Serie von Beobachtungen sind die Stäbchen so dick und die Belastungen so klein gewählt, dafs die bleibenden Deformationen unerheblich wurden; demgemäfs zeigt sich auch keine consequente Abweichung von der Proportionalität.

Die erörterten Eigenschaften des Rückstandes und der elastischen Nachwirkung sind nicht allein durch Beobachtungen bestätigt, sondern auch durch die in meiner Dissertation S. 44 u. f. angedeutete Vorstellung vom Zustande eines Stäbchens, dem eine dauernde Deformation mitgetheilt ist, vollständig erklärt.

Um eine Vorstellung von der Gröfse der elastischen Nachwirkung zu geben, führe ich die folgenden Beobachtungen an, in denen die elastische Biegung mit B, der Rückstand mit R bezeichnet ist. *W.* IX. Es verminderte sich nach der Entlastung

das durch	$B = 48{,}5$	erzeugte	$R = 1{,}6$	in 6′	um 0
	$B = 94{,}2$		$R = 5{,}8$	10′	— 0,1
	$B = 138{,}6$		$R = 11{,}4$	10′	0
	$B = 179{,}5$		$R = 20{,}5$	11′	0,5
	$B = 217$		$R = 33$	10′	1,1
	$B = 248{,}2$		$R = 51{,}8$	11′	0,5
	$B = 270$		$R = 80$	29′	1,1
	$B = 285$		$R = 115$	18^h (sic)	3,4

Man ersieht schon hieraus, dafs jedenfalls die elastische Nachwirkung während der Dauer der Entlastung (= 1′) so klein ist, dafs sie sich der Beurtheilung entzieht.

Es folge noch als Beispiel für die Nachwirkung bei aufsergewöhnlichen Rückständen:

G. VIII. Es ging zurück das durch

$B = 542$	erzeugte	$R = 96$	in 16′	um	2,0
$B = 676$	„	$R = 280$	„ 14′	„	3,0

Dies war hart an der Gränze der Dehnbarkeit; das Stäbchen brach, während $B = 685$ war. *Pw.* $22\frac{1}{2}^o$ II. ge-

Digitized by Google

stattete die gröfste Biegung von allen Stäbchen; ein $R = 700$ änderte sich aber in 14 Stunden nur um 7,5.

Dafs Erschütterungen die elastische Nachwirkung erheblich verstärken, ist bekannt und von mir durch Beobachtungen bestätigt worden; die Einrichtung war aber, wie oben erwähnt, so getroffen worden, dafs das Entlasten ohne alle durch das Mikroskop bemerklichen Erschütterungen vor sich ging.

V. Der Einfluſs der Temperatur auf die elastische Biegung.

Die Stäbchen *Gr.* No. I, III, IV und *O.* No. I waren, bevor die Fehler der Mikrometerschraube entdeckt waren, bereits beobachtet worden, und die Messungen stimmten in sich gut, so dafs ich ihnen einige Zuverlässigkeit beilegte; als ich dieselben aber unter Berücksichtigung der Correction der Schraube wiederholte, fanden sich so erheblich andere Werthe, dafs der Fehler der Schraube unmöglich die Ursache seyn konnte. Da aber die erstere Reihe Versuche in der heifsesten Sommerszeit, die zweite im Herbst und in sehr kaltem (97° R.) Locale vorgenommen war, so war meine Vermuthung, dafs der Einfluſs des Temperaturunterschiedes von 15—20° diese Abweichung der beiden Resultate verursacht hätte. Das veranlasste mich, diesen Einfluſs direct zu studiren; dafs sich mit den mir zu Gebote stehenden Mitteln wesentlich mehr, als nur eine Correction des angedeuteten Fehlers ergeben würde, war jedoch nicht zu erwarten.

Um das belastete Stäbchen einer höheren Temperatur auszusetzen, wurde dasselbe in einen kupfernen Kasten (siehe Fig. 12, Taf. I) eingeschlossen, über welchem sich ein Wasserbassin (WW) befand, das durch ein hindurchgeführtes Schlangenrohr, durch welches Wasserdämpfe strichen, erhitzt wurde; ein Thermometer τ_2 stand in demselben, ein zweites τ_1 lag in dem Luftraum unter dem Stäbchen, seine Mittelpunktsentfernung vom Stäbchen verhielt sich zu der vom kupfernen Deckel etwa wie 3:4; in-

Digitized by Google

dem ich nun annehmen konnte, daſs die Temperatur im Luftraum eine lineäre Function der Höhe sey, konnte ich aus gleichzeitigem Ablesen beider Thermometer die Temperatur des Stäbchens hinreichend genau bestimmen. [Die Schneiden $\sigma\sigma$, auf denen das Stäbchen ruhte, muſsten von Glas seyn, damit sie nicht kälter als die Umgebung würden, beschlügen und das Stäbchen verletzten: der Sicherheit halber belegte ich sie hart an der oberen Kante mit einem Stückchen Silberblech, das durch mehrere Silberdrähte mit dem heiſsesten Theil der Kupferwand, der Decke, in leitender Verbindung stand. Die Erfahrung gebot diese Vorsicht.] Der ganze Kupferkasten war mit Tuch überzogen und nirgends mit einem guten Leiter in Berührung, da er ganz auf den gläsernen Schneiden ruhte. Dadurch gelang es, das obere Thermometer auf 78,5° R. zu bringen, das untere auf 62,5°, also dem Stäbchen eine Temperatur von ca. 74,5° mitzutheilen. Zum Ablesen waren nun nicht mehr Spinnen- oder Schellackfäden zu benutzen, ich brachte daher an der Schneide ein dünnes Glimmerblättchen an, auf welches mit scharfem Messer parallele Linien in $\frac{1^{mm}}{30}$ gegenseitiger Entfernung gezogen waren. Diese waren durch eine angebrachte kleine Spiegelscheibe gut zu beobachten.

Es wurde dann eine Beobachtung vor dem Erhitzen gemacht, nach der Erreichung des Maximums eine weitere, die Wärmezufuhr immer mehr verringert und während des langsamen Abkühlens die weiteren Messungen vorgenommen. Es fand sich entsprechend

O. No. III.	13,5° R	$B = 206{,}0$
	69,3°	212,5
	63,0°	211,8
	52,7°	212,0
	45,2°	211,0
	35,0°	211,4
	32,3°	209,2
	28,8°	209,1
	25,8°	208,0

Digitized by Google

Hieraus folgt, wenn man die Biegung

$$B = B_0 (1 + at)$$

setzt: $a = 0{,}000518$, nebenbei: $(B_0 = 205{,}6)$

Gr. No. III	15°	$B = 304{,}5$
	74,5°	313,8
	74,5°	314,0
	67,0°	312,5
	59,0°	310,8
	51,0°	310,0
	41,0°	308,3
	31,5°	305,2 (?)
	26,8°	306,7
	18°	304,4
	16°	304,8

Hieraus $a = 0{,}000531$, $(B_0 = 301{,}7)$

Eine Wiederholung ergab

Gr. III.	61,2°	$B = 415{,}0$
	56,0°	413,2
	53,0°	412,2
	49,0°	411,9
	45,0°	411,2
	38,6°	410,6
	35,0°	408,7
	31,5°	408,7

Hieraus $a = 0{,}000538$, $(B_0 = 401{,}4)$

Pw. $22\frac{1}{2}^0$ No. IV.

15,0°	$B = 208{,}0$
74,3°	220,4
74,1°	219,6
66,5°	218,4
54,7°	215,5
47,1°	213,6
40,0°	212,6
30,2°	211,8
20,3°	210,0

Digitized by Google

Hieraus $a = 0{,}000815$,		$(B_0 = 206{,}4)$
W. No. XII.	73,5°	$B = 174{,}6$
	73,5°	174,1
	65°	172,4
	56°	171,0
	42°	168,7
	29°	165,5
	24°	164,0
Hieraus $a = 0{,}00125$,		$(B_0 = 159{,}7)$

[Zu bemerken ist, dafs bei der Berechnung der Werthe von a die Aenderung der Dimensionen des Stäbchens vernachlässigt ist, was, so lange es sich nur um ein Urtheil über die Gröfse einer anzubringenden Correctur handelt, erlaubt ist.] Es scheint nach diesen Zahlenwerthen von a, dafs der kleinere Elasticitätsmodul auch die *relativ* kleinere Aenderung mit der Temperatur erfährt. Genaueres scheint mir aus derartigen Beobachtungen kaum abzuleiten möglich, und darum habe ich den Gegenstand vorläufig nicht weiter verfolgt. [Uebrigens sind die empirischen Curven von der Art, dafs die lineäre Fortschreitung von B mit t wohl aufser Zweifel ist.] Stelle ich die sich entsprechenden Werthe der Biegung für ein Gramm Belastung, wie sie sich für dieselben Stäbchen durch die I. und II. Beobachtung bei um t^0 verschiedenen Temperaturen fanden, zusammen, so sieht man aus der Tabelle:

	Gr. No. I.	III.	IV.	*O.* No. I.
1)	$x = 2{,}35$	31,20	6,17	23,72
2)	$x = 2{,}32$	30,14	6,16	23,64
	$t = 20^0$	20^0	20^0	12^0

dafs, wenn man zu der 2. Reihe gemäfs den obigen Zahlen $k \,.\, t \,.\, 0{,}0005$ hinzufügt, die Abweichungen kleiner werden und zwar einige +, einige — (wie das sich dadurch erklärt, dafs bei der ersten Serie Beobachtungen die Correction der Schraube *nicht* angewandt ist). Es kommt nämlich:

	Gr. No. I.	III.	IV.	*O.* No. I.
2. Ser.	$x_1 = 2{,}34$	30,50	6,22	23,7

Digitized by Google

Da in der 2. Serie aufser *Gr.* I, III, IV und *O.* I auch *W.* II, III, V in der etwa um 8° kälteren Luft beobachtet sind, als die übrigen alle, die in einem ziemlich constant zwischen 13° und 15° erhaltenen mir gütigst angewiesenen Auditorium der Universität gemessen wurden, so ist zu den direct beobachteten Werthen von k bei der Berechnung der Elasticitätscoëfficienten, für diese Stäbchen eine gemäfs den obigen Werthen berechnete Correction (ϑ) gefügt.

(Schluſs im nächsten Heft.)

II. *Ueber den Mechanismus der magnetischen Induction; von O. Chwolson,*

Cand. Univ. Petrop.

Bei dem Studium der Erscheinungen, welche die Erzeugung des magnetischen Zustandes durch äufsere, sogenannte magnetisirende Kräfte begleiten, gingen, wie bekannt, seit dem Anfange dieses Jahrhunderts die theoretischen Untersuchungen mit den experimentellen Hand in Hand; sie ergänzten einander und schienen wenigstens einander genügend zu bestätigen. In der That, die theoretischen Untersuchungeu von Poisson fanden eine genügende Stütze in den bekannten Resultaten (Lenz und Jacobi), welche ein, der magnetisirenden Gesammtkraft S proportionales Ansteigen des erzeugten magnetischen Momentes m ergaben; die spätere theoretische Entwickelung von Weber (Electrodyn. Maafsbest. III. Art. 26) schien wiederum in Uebereinstimmung mit der Entdeckung, dafs dieses Moment stetig einem endlichen Werthe zustrebe und die Formen der Curve $m = f(S)$, theoretisch und experimentell ergründet, waren, wie es schien, in genügender Uebereinstimmung. Erst in neuester Zeit ist, nach den

Digitized by Google

Arbeiten von v. Quintus Icilius, Rieke, Stoletoff und Rowland, die Theorie weit hinter den Resultaten der meisterhaften Untersuchungen dieser genannten Gelehrten zurückgeblieben.. Eine ganz neue Entdeckung, welche alle bisherigen, von irgend welchen einfachen Grundhypothesen über den Mechanismus der magnetischen Erscheinungen, ausgehenden theoretischen Untersuchungen über den Haufen zu werfen schien, wurde gemacht. Die Entdeckung, dafs K, die sogenannte Magnetisirungszahl, d. i. die Gröfse $\frac{m}{S}$ für kleine wachsende Kräfte S, anfangs *wächst*, das Maximum erreicht und hierauf, mit weiter wachsenden S, stetig kleiner wird.

Dieses anfängliche Wachsen von K war es, welches, den theoretischen Resultaten Weber's widersprechend, der Theorie der drehbaren Molecularmagnete den Boden unter den Füfsen wegzuziehen schien. So äufsert z. B. Hr. Stoletoff in seiner (russischen) Originalarbeit, dafs das Anwachsen von K für geringe S der Weber'schen Theorie widerspreche, und auch Hr. Stephan (Sitzungsber. d. kaiserl. Akad. d. Wiss. Februar 1874, S. 197) scheint sich derselben Ansicht zuzuneigen. ***Zweck dieser Abhandlung ist es nun zu zeigen, dafs dies erwähnte Anwachsen der Gröfse K nicht nur der Theorie der drehbaren Molecularmagnete nicht widerspricht, sondern im Gegentheil als ein directes Resultat derselben abgeleitet werden kann.*** Ich glaube, dafs es mir gelungen ist, diesen Nachweis zu liefern, auf Grund erstens eines eingehenderen Studiums der Vorgänge, welche bei Annahme der Weber'schen Grundhypothese innerhalb des magnetisirten Körpers stattfinden müssen und zweitens einer so einfachen Annahme über den Ursprung der die Molecüle zurücktreibenden Kraft, dafs an ihrer Richtigkeit, falls sie sonst zu keinen Widersprüchen führt, kaum gezweifelt werden kann, umsomehr, da die Erscheinungen des permanenten Magnetismus im Anschlufs an diese Annahme die ungezwungenste Erklärung erhalten; sie besteht, wie weiter unten genauer

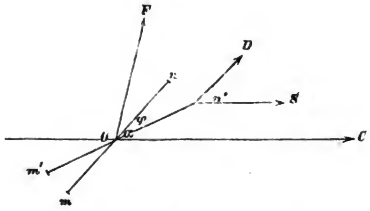
Digitized by Google

erklärt seyn wird, in der einfachen Annahme, daſs eine solche Kraft überhaupt gar nicht existirt, daſs die magnetischen Molecüle völlig frei und ohne irgend einen gleichsam individuellen Widerstand zu leisten drehbar sind. Das Erlöschen des magnetischen Zustandes nach dem Aufhören der Wirksamkeit der äuſseren Kräfte erklärt sich, wie ich zeigen werde, durch die Kraft der Wechselwirkung der Molecüle untereinander, — einer Kraft, welche, während die äuſsere Kraft wirkt, ihr fördernd und verstärkend zur Seite steht, nach Erlöschen derselben aber nothwendig die Zerstörung des magnetischen Zustandes herbeiführen muſs. Dieses scheinbare Paradoxon wird weiter unten auf eine, wie mich dünkt, ganz einfache Art und Weise sich lösen.

§ 1.

Ehe ich mit den theoretischen Entwickelungen beginne, sey es mir gestattet, zur Erleichterung der Uebersicht und da die Weber'schen Formeln uns weiter unten nöthig seyn werden, die Betrachtungen Weber's hier kurz zu recapituliren und im Anschluſs an dieselben sofort auf diejenigen Punkte hinzuweisen, in welchen ich genauer zu verfahren suche, als es bisher geschehen ist. Weber's Entwickelung ist, wie bekannt, kurz folgende: Es sey (Figur 1) mn einer der Molecularmagnete, welcher mit

Figur 1.



der Axe des im Entstehen begriffenen Magnetes OC den Winkel $noC = \alpha$ machte. Unter der Wirkung der magne-

Digitized by Google

tisirenden Kraft S habe er die neue Lage $n'm'$ eingenommen, in welcher die, von der Kraft S und einer in der Richtung mn wirkenden *constanten* Kraft D (Directionskraft), ausgeübten Drehungsmomente einander das Gleichgewicht halten. Dies führt zu der Bedingungsgleichung

$$S \sin(\alpha - \varphi) = D \sin \varphi. \tag{1}$$

Der, durch die Drehung des beobachteten Molecüles hervorgerufene Zuwachs des magnetischen Momentes δm, längs der Axe OC ist gleich

$$dm = \mu \left\{ \cos(\varphi - \alpha) - \cos \varphi \right\}.$$

Durch Elimination von φ aus dieser und der Gleichung (1), erhält man

$$\delta m = \mu \left\{ \frac{S + D \cos \alpha}{\sqrt{S^2 + D^2 + 2 S D \cos \alpha}} - \cos \alpha \right\}. \tag{2}$$

Durch Integration, d. h. Summation über alle Molecüle erhält man die bekannten Formeln für m als Function von S. (Roeber, diese Ann. Bd. CXXXIII, S. 53). Zu Formel (2) wollen wir die analoge

$$\delta n = \mu \left\{ \frac{D \sin \alpha}{\sqrt{S^2 + D^2 + 2 S D \cos \alpha}} - \sin \alpha \right\} \tag{3}$$

hinzufügen, welche den, durch Drehung des beobachteten Molecüles hervorgerufenen, natürlich negativen, Zuwachs des magnetischen Momentes in der zur Richtung OC senkrechten Richtung OF darstellt. Man erhält den Ausdruck (3) durch Eliminatien des Winkels φ aus den Gleichungen (1) und

$$\delta n = \mu \left\{ \sin(\alpha - \varphi) - \sin \varphi \right\}.$$

Eine nur oberflächliche Beobachtung der kurz angeführten Weber'schen Entwickelung zeigt wohl sofort, worin der Hauptmangel derselben zu suchen ist: in der ganz willkürlichen Annahme einer sogenannten Directionskraft D, welche als *constant* ihrer Intensität und Richtung nach vorausgesetzt wird. Dafs die Resultate der auf

Digitized by Google

solch unmotivirten und unwahrscheinlichen Annahmen beruhenden theoretischen Betrachtungen, mit den Resultaten eingehender, experimenteller Untersuchungen unmöglich im Einklange stehen können, dürfte wohl auch *à priori* einleuchten. Nur durch ein genaueres, theoretisches Studium der Gröfse *D* konnte man hoffen, die zurückgebliebene Theorie vorwärts zu bringen und die neuentdeckten Erscheinungen zu erklären, resp. abzuleiten. Ich will mir nun erlauben eine kurze Uebersicht über den Gang der vorstehenden Untersuchung zu geben und zugleich die allgemeinen Anschauungen über den Mechanismus der magnetischen Erscheinungen, welche dieser Untersuchung zu Grunde liegen, einer genaueren Darstellung unterwerfen.

Ich gehe, wie bereits oben bemerkt, von der Annahme aus, dafs die einzelnen Molecüle der Drehung gar keinen — wenn man sich so ausdrücken darf — individuellen Widerstand entgegensetzen, dafs sie völlig frei im Raume schweben. Jedes einzelne Molecül wird aber durch die Gesammtwirkung aller übrigen, in der Nachbarschaft sich befindenden Molecüle in einer gewissen Lage festgehalten, d. h. gezwungen sich so einzustellen, dafs die Axe des Molecüles mit der Richtung jener Gesammtkraft zusammenfällt. Diese Einstellung ist eine vollkommene, da das Molecül jedem, auf dasselbe einwirkenden Drehungsmomente widerstandslos folgt. Nehmen wir an, dafs die Anzahl der im zu betrachtenden Theilchen des Magneten enthaltenen Molecüle eine aufserordentlich grofse sey, so werden unter denselben alle möglichen Axenrichtungen in gleicher Weise vertreten seyn, genau wie dies der Entwickelung von Hrn. Weber zu Grunde liegt. Betrachten wir nun speciell ein bestimmtes Theilchen, dessen Axe mit der Axe des sich bildenden Magneten, d. h. mit der Richtung der magnetisirenden Kraft *S* den Winkel α bildete. Es ist nun klar, dafs unter den verschiedenen Axenrichtungen, oder, wie wir uns der Kürze wegen ausdrücken werden, unter den verschiedenen Richtungen, welche in

Digitized by Google

der Nachbarschaft des betrachteten Theilchens vorkommen werden, zwar alle möglichen Richtungen vorhanden seyn können, im Ganzen aber die Richtung α gewissermafsen vorherrschend seyn mufs, oder wie wir uns ausdrücken können, eine Tendenz in der Richtung α sich kundgeben mufs. Dies folgt einfach daraus, dafs ja das Theilchen eben die Richtung α inne hat, die Gesammtheit der benachbarten Theilchen also eine Kraftresultante liefern mufs, welche die Richtung α hat, was nur dann möglich ist, wenn in dieser Gesammtheit, wie wir uns ausdrücken, eine Tendenz in der Richtung α vorhanden ist, d. h. wenn diese Gesammtheit gleichsam einen kleinen Magneten bildet, dessen Axe die Richtung α hat und welcher in dieser Richtung ein endliches, positives, wenn auch noch so kleines Moment m besitzt. Greift man ein beliebiges Molecül heraus, so mag für dasselbe m äufserst gering seyn, auch kann sein Werth in den weitesten Gränzen variiren; denkt man sich aber alle Theilchen, welche die Richtung α haben, mitsammt ihren resp. Nachbarschaften gleichsam übereinander gelegt, so wird die Gesammtheit dieser Nachbarschaften einen Magneten bilden mit deutlich ausgesprochenem Momente in der Richtung α. Dividirt man dies Moment durch die Anzahl der übereinandergelegten Molecüle, so erhält man ein bestimmtes Moment m, welches einen Mittelwerth aller in der Nachbarschaft der Theilchen auftretenden Momente darstellt. Die wirklichen Momente werden theils kleiner, theils gröfser seyn als m; wir werden aber der Wahrheit nahe kommen, wenn wir annehmen, dafs von den sämmtlichen betrachteten Theilchen jedes von einem Momente m in der Richtung α umgeben ist — wie wir uns der Kürze wegen ausdrücken wollen. — ***Dieses Moment m ist*** nun von der Gröfse des Winkels α selbstverständlich ganz unabhängig und daher ***ein und dasselbe für alle Theilchen des betrachteten Magneten.***

Sey $\frac{1}{\lambda}$ ein Proportionalitätsfactor, so können wir die

Digitized by Google

Directionskraft D, welche das Theilchen in seiner bestimmten Lage festhält, durch

$$D = \frac{m}{\lambda} \tag{4}$$

ausdrücken. Daſs die Kraft D wirklich dem Momente m proportional sey und mit der Richtung desselben zusammenfalle, ist so leicht nachzuweisen, daſs ich den Beweis wohl füglich übergehen kann. Es ist dies auch von Hrn. Stephan (l. c. S. 187) geschehen. Die Gröſse λ hebt sich übrigens am Schlusse aus den Formeln hinweg.

Denken wir uns nun, daſs von Auſsen her eine ihrer Richtung und Intensität nach constante Kraft S zu wirken beginnt, welche dahin strebt, das Theilchen mit seiner Axe parallel der Richtung S zu stellen, den Winkel α zu verkleinern. Dieselbe Kraft wirkt nun in gleicher Weise auch auf die benachbarten Theilchen, verändert deren Gruppirung und folglich auch das Moment m, welches seine Richtung und Gröſse verändert, wodurch auch die Directionskraft D eine dem analoge Veränderung erhält. Ein genaues Studium der mit dem Moment m vorgehenden Veränderungen zeigt nun folgendes: es wird in ein neues Moment y übergehen, dessen Axe um einen Winkel x gegen die Axe des ursprünglichen Momentes gedreht ist und zwar in demselben Sinne, in welchem auch das betrachtete Molecül, welches wir das Centralmolecül nennen wollen, sich um den Winkel φ gedreht hat. Nun wird es sich aber zeigen, daſs $\varphi > x$ ist, d. h. ***daſs die Drehung des Momentes hinter der Drehung des Centralmolecüles zurückbleibt***, wodurch eben die zurücktreibende Kraft $\frac{y}{\lambda} \sin(\varphi - x)$ entsteht, welche mit der Kraft $S \sin(\alpha - \varphi)$ im Gleichgewicht seyn muſs. Die Veränderungen, welche mit m vorgehen, während es sich in y verwandelt, sind ziemlich verwickelter Natur: abgesehen davon, daſs es sich um den Winkel x dreht, wird es um eine gewisse Gröſse $k \cos(\alpha - x)$ verstärkt, da unter der Wirkung der Kraft S sich ein Moment k in der Rich-

Digitized by Google

tung dieser Kraft gebildet; andererseits wird es um eine Gröfse $\omega \cos x$ vermindert, da sich die Tendenz nach der Richtung α vermindern mufs, wie man das am leichtesten daraus sieht, dafs bei unendlich starken Strömen jegliche „Tendenz“ erlöschen mufs. Es ist ferner leicht einzusehen, dafs die Gröfse k selbst ein von α abhängiges Glied enthalten mufs; in der That! es existirt, wie wir uns bildlich ausdrücken können, ein *Ueberschufs* von Theilchen nach der Richtung α, welcher zur Bildung von k beiträgt und zwar verschieden je nach der Gröfse des Winkels α; dafs endlich ω in eminenter Weise von α abhängen mufs (es wird sich zeigen, dafs ω den Factor $\sin^2 \alpha$ enthält) ist leicht einzusehen, wenn man die Fälle $\alpha = 0^0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ in's Auge faſst. Es versteht sich von selbst, dafs bei der nachfolgenden Entwickelung nicht etwa alle diese Einzelwirkungen der Kraft S als nothwendig vorhanden direct gesucht werden, sondern dafs das Problem ganz allgemein angefafst werden wird und dafs die obige Betrachtung der Einzelwirkungen uns nur nachträglich zur Interpretation der einzelnen Glieder dienen wird, welche als Resultat der Rechnung erscheinen werden.

Es ist ferner einleuchtend, dafs die Drehung (x) des Momentes und die Schwächung (ω) desselben bei der Magnetisirung fördernd wirken müssen, so dafs die endliche Drehung des Centralmolecüles eine gröfsere seyn mufs, als wenn keine solche Veränderung vorgegangen, die Kraft D ihrer Richtung und Intensität nach constant geblieben wäre; dem entgegen wirkt aber die Verstärkung (k) des Momentes und das Endresultat, welches sich ergeben mufs, ist nicht *à priori* anzugeben. Eine genaue Rechnung wird nun zeigen, dafs die erste, fördernde Wirkung sich zur zweiten, störenden, für sehr kleine S verhält wie $\frac{4}{5}$ zu $\frac{32}{225}$ oder etwa wie $5{,}6 : 1$, die erste also beträchtlich gröfser ist, als die zweite. Es wird folglich für kleine S die, in der Umgebung des Centralmolecüles statt-

Digitized by Google

findende Veränderung eine solche seyn, daſs sie die äuſsere Kraft unterstützt, die Drehung wird daher gröſser seyn, als es bei constantem D der Fall wäre, es muſs somit auch das resultirende Moment M gröſser seyn, d. h. wie genau gezeigt werden wird, ***K muſs mit S wachsen.*** Curioser Weise zeigt es sich, daſs der Ausdruck für M also auch der für $K = \frac{M}{S}$ in sich $arctg$ enthält, wodurch man unwillkürlich an die bekannten empirischen Formeln erinnert wird, ein gewiſs nur zufälliges Zusammentreffen. Es sey mir gestattet, auf den groſsen Unterschied aufmerksam zu machen, zwischen denjenigen Anschauungen über den Mechanismus der magnetischen Erscheinungen, welche den vorstehenden Betrachtungen zu Grunde liegen und denjenigen, von welchen man jetzt mehr oder weniger allgemein auszugehen pflegt. Ich werde zu diesem Zwecke einige Stellen aus der oben erwähnten Schrift des Hrn. Stephan wörtlich anführen. Herr Stephan schreibt Seite 200:

„Der Zustand des magnetischen Gleichgewichtes in „einem durch äuſsere Kräfte magnetisirenden Körper ist „bestimmt durch das statische Gleichgewicht zwischen „den äuſseren Kräften und jenen, welche aus der magne„tischen Vertheilung im Körper entspringen. Die letzteren „bestehen aus zwei Theilen. Der eine ist durch das ma„gnetische Potential des magnetisirten Körpers bestimmt „und besteht aus den Fernwirkungen der im Körper frei„gewordenen Magnetismen. Den zweiten Theil bildet eine „Molecularkraft, welche in jedem Punkte abhängig ist von „der Intensität der magnetischen Vertheilung. Diese kann „durch das auf die Volumseinheit entfallende magnetische „Moment gemessen werden. Bedeutet R die Resultate „der äuſseren Kraft und der aus dem magnetischen Po„tential sich ergebenden in einem bestimmten Punkte, μ „das magnetische Moment der Volumseinheit und wird die „Gröſse der Molecularkraft dargestellt durch $-f(m)$, so

Digitized by Google

„ist die Bedingung des magnetischen Gleichgewichtes aus„gedrückt durch

$$„ -f(\mu) + R = o \quad \text{oder} \quad f(\mu) = R.“$$

Dem steht nun meine Anschauungsweise, welche im Grundzuge mit der Weber'schen identisch ist, schroff gegenüber. Von einem eigentlichen statischen Kräftegleichgewicht ist bei mir keine Rede. Die magnetisirende Gesammtkraft R und die Kraft $f(\mu)$, welche wir füglich die rücktreibende Kraft nennen können, haben gleichsam Nichts miteinander zu thun und der Zustand des magnetischen Gleichgewichts wird einzig und allein dadurch bestimmt, dafs die Axe eines jeden Molecüles in die Richtung der Resultante jener beiden Kräfte sich einstellt. Grundverschieden ist auch der Verlauf der zurücktreibenden Kraft (in Abhängigkeit von μ) nach Hrn. Stephan und nach unserer Betrachtungsweise. Herr Stephan schreibt S. 201:

„$f(\mu)$ mufs ferner für $\mu = o$ ebenfalls $= o$ seyn, für „$\mu = m$, wenn m das Maximum des inducirbaren Momentes „bedeutet, mufs $f(\mu)$ *unendlich* werden.“ Wir dagegen erhalten das Resultat, dafs zwar für $\mu = o$ in der That die rücktreibende Kraft $= o$ ist; für wachsende μ wächst sie, weil, wie oben erwähnt, Winkel x kleiner als Winkel φ ist. Weiterhin vermindert sie sich aber nothwendigerweise, da für unendlich starke magnetisirende Kräfte, wenn $\mu = m$ geworden ist und die Axen aller Molecüle ein und dieselbe Richtung angenommen haben, *gar keine rücktreibende Kraft mehr vorhanden ist*, so dafs für diesen Fall ein, allerdings nur labiles, Gleichgewicht stattfinden mufs, — wodurch sich vielleicht die bekannte Erscheinung des restirenden Magnetismus im, mit einem Anker versehenen, weichen Eisen erklären liefse. Während also für $\mu = m$ Hr. Stephan $f(\mu) = \infty$ ansetzt, behaupte ich, dafs für diesen Fall $f(\mu) = o$ ist.

Digitized by Google

§ 2.

Ich gehe nun an die genaueren mathematischen Entwickelungen, welche zur Lösung des Problemes führt. Diese Entwickelung muſs nothwendig in zwei Theile zerfallen: erstens ist die Wirkung der, von uns mit S bezeichneten, magnetisirenden Kraft auf das Moment m, d. h. auf die Lagerung der Molecüle in der Nachbarschaft des Centralmolecüles, also die Drehung der magnetischen Axe um den Winkel x und die Verwandlung von m in y zu berechnen; zweitens ist die Modification zu untersuchen, welche diese Veränderung von m und die damit eng verbundene Veränderung der Directionskraft, welche ihre Richtung ebenso verändert und aus $\frac{m}{\lambda}$ in $\frac{y}{\lambda}$ übergeht, in dem endlichen Gleichgewichtszustand hervorruft. Ich beginne mit dem ersten Theile. Das Problem läſst sich dahin aussprechen: Gegeben ist eine Conglomerat von magnetischen Molecülen, deren Axen zwar alle möglichen Richtungen haben, die in ihrer Gesammtheit aber doch ein endliches Moment m in einer bestimmten Richtung OC bilden. In einer anderen Richtung OA, welche mit dieser den Winkel $COA = \alpha$ bildet, beginnt eine Kraft zu wirken, welche bestrebt ist alle Theilchen gegen eine, zur Richtung OA überall parallele Linie zu neigen. Es frägt sich, wie wird hierdurch m verändert?

Um unsere Aufgabe zu lösen, werden wir uns genöthigt sehen, zwei Vernachlässigungen eintreten zu lassen, deren Bedeutung aber am Schluſs untersucht werden wird. Es wird zich zeigen, daſs in Folge der ersten Vernachlässigung der, ganz zuletzt erhaltene Werth der Magnetisirungsfunction K *zu klein* erhalten wird, sodaſs in Wirklichkeit K noch schneller ansteigen muſs, als es unsere Rechnung angiebt. Die zweite Vernachlässigung wird darin bestehen, daſs wir, ausgehend von der Annahme, S sey klein, gewisse höhere Potenzen kleiner Ausdrücke vernachlässigen werden, was, wie sich zeigen wird, auf

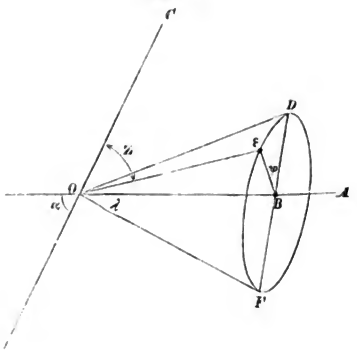
Digitized by Google

das *Vorzeichen* des zweiten Gliedes im Ausdruck von K — worauf es vor Allem ankommt — keinen Einfluſs haben kann. Die erste Ungenauigkeit wird nun darin bestehen, daſs wir annehmen, die einzelnen Molecüle, aus welchen das zu untersuchende Conglomerat besteht, veränderten ihre Lage unter der Einwirkung einer constanten Directionskraft D, so daſs für jedes derselben eine, der Formel (2) analoge Formel angewandt werden kann. Nennen wir den Fehler, den Weber beging, als er die auf das Centralmolecül wirkende Directionskraft als constant annahm, einen Fehler erster Ordnung, so ist es wohl einleuchtend, daſs der Fehler, den wir begehen, ein Fehler zweiter Ordnung ist. Wir nehmen die, durch Veränderungen in der Nachbarschaft hervorgerufene Aenderung der Directionskraft *wohl* in Betracht, lassen aber den Umstand auſser Acht, daſs jene ersten Veränderungen nicht ganz genau nach den Weber'schen Formeln stattfinden, wodurch auch jene zweite Aenderung eine etwas andere werden muſs. Es wird ganz leicht seyn, zum Schluſs das Vorzeichen des von uns begangenen Fehlers im Endresultat anzugeben.

Wir denken uns nun die sämmtlichen Molecüle, welche sich in der Nachbarschaft des Centralmolecüles befinden, mit ihren einen (z. B. den Süd-) Enden sich selbst parallel nach einem Punkte O (siehe nebenstehende Figur 2) versetzt. OC sey die Richtung des Momentes m und OA die Richtung in welcher die äuſsere Kraft wirkt, also Winkel $COA = \alpha$. Die anderen Enden dieser Molecüle werden eine Kugeloberfläche bilden. Die Dichtigkeit σ, mit welcher diese Enden über die Oberfläche vertheilt sind, wäre eine constante, wenn in dem beobachteten Conglomerat nicht eine Tendenz in der Richtung OC vorhanden wäre; in unserem Falle aber wird die Dichtigkeit σ von dem Winkel z abhängen, den die Theilchen mit der Richtung OC machen; sie wird daher constant seyn auf den Punkten eines und desselben Parallelkreises, wenn man

Digitized by Google

Figur 2.



OC als Axe betrachtet und stetig abnehmen, während der Winkel von $z = o$ bis $z = \pi$ wächst, so dafs also

$$\sigma = f(z)$$

gesetzt werden kann. Ueber die Form dieser Function ist nichts gegeben; wir wissen nur, dafs sie stetig ist und für negative Werthe der Variabeln denselben Werth erhält wie für positive. Dies berechtigt uns für $f(z)$ eine Entwickelung nach der Fourier'schen Reihe anzunehmen und

$$(4) \qquad \sigma = f(z) = a + b\cos z + c\cos 2z + \ldots.$$

zu setzen. Die Coëfficienten a, b, c u. s. w. lassen wir völlig unbestimmt.

Wir wollen nun das neue Moment y aufsuchen, indem wir seine Projectionen nach den Richtungen OC und OA bestimmen. Wir theilen zu dem Zwecke die Gesammtheit der Molecüle durch ein System unendlich vieler Kegelflächen mit gemeinschaftlicher Spitze und Axe in unendlich viele Abtheilungen, deren eine wir herausgreifen und untersuchen werden. Würden wir als Axe des Kegelsystemes die Gerade OC annehmen, so hätten wir den Vortheil, dafs σ auf allen Punkten der Kugelzone, in wel-

Digitized by Google

cher die Enden der vorerst betrachteten Theilchen liegen, constant wäre; doch würden wir dafür den Nachtheil haben, dafs die Theilchen sehr verschiedene Lagen gegen die Gerade OA einnehmen, so dafs *Richtung* und Gröfse ihrer Drehungen unter einander ganz verschieden wären. Wir ziehen es vor OA als Axe anzunehmen, da in diesem Falle die Drehungen sämmtlich gleich stark und nach der Axe hin gerichtet seyn werden. Wir betrachten also die Gesammtheit der Theilchen, welche mit OA einen zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegenden Winkel bilden und durch zwei unendlich nahe Kegelflächen begränzt werden. Ein einzelnes Theilchen OE ist, aufser durch den Winkel λ noch bestimmt durch den Winkel $EBD = \psi$, welchen die Ebenen AOC und EOC mit einander bilden. Die Dichtigkeit σ an den verschiedenen Stellen des „Kegels," wie wir uns der Kürze wegen wohl ausdrücken können, kann dann aufgefafst werden als Function des Winkels ψ, so zwar, dafs wir setzen können

(5) $$\sigma = A + B\cos\psi + C\cos 2\psi + \ldots,$$

wo die Coëfficienten A, B, C u. s. w. selbstverständlich Functionen von λ und den Coëfficienten a, b, c . . . . seyn werden. Es sey, wie schon oben erwähnt, z der Winkel zwischen OE und OC. Dann ist das Moment μ des betrachteten Kegels nach der Richtung OC gleich

$$\mu = \int_{\psi=0}^{2\pi} \sigma \sin\lambda\, d\lambda \,.\, d\psi \,.\, \cos z.$$

Nun ist aber

(6) $$\cos z = \cos\lambda\cos\alpha + \sin\lambda\sin\alpha\cos\psi;$$

setzt man dies und (5) ein, so erhält man

$$\mu = \int_{\psi=0}^{2\pi} (A + B\cos\psi + C\cos 2\psi + \ldots)\sin\lambda\, d\lambda\, d\psi(\cos\lambda\cos\alpha + \sin\lambda\sin\alpha\cos\psi)$$

oder

$$\mu = \sin\lambda\, d\lambda \int_{0}^{2\pi} (A + B\cos\psi + C\cos 2\psi + \ldots)(\cos\lambda\cos\alpha + \sin\lambda\sin\alpha\cos\psi)\, d\psi$$

Digitized by Google

d. h.

$$(7)\quad \mu = \sin\lambda\, d\lambda \left\{ 2A\cos\lambda\cos\alpha . + B\sin\lambda\sin\alpha \right\} \pi.$$

Wir erhalten somit das wichtige Resultat, daſs man von den Gröſsen A, B, C u. s. w. nur die ersten zwei zur ferneren Entwickelung braucht. Unter Einwirkung der äuſseren Kraft werden die sämmtlichen Theilchen sich gleich stark gegen die Linie OA hin neigen, wobei der Winkel λ in einen kleineren λ' übergeht und ebenso σ, A und B in σ', A' und B'. Das neue Moment μ' nach OC wird demnach seyn:

$$\mu' = \sin\lambda' . d\lambda' \left\{ 2A'\cos\lambda'\cos\alpha + B'\sin\lambda'\sin\alpha \right\}.$$

Es ist nun nicht schwer A' und B' durch A und B auszudrücken. Denken wir uns nämlich durch OC zwei unendlich nahe, durch die Winkel ψ und $\psi + d\psi$ bestimmte Ebenen gelegt, so ist die, zwischen diesen Ebenen enthaltene Menge an Molecülen im ersten und zweiten Falle ein und dieselbe; d. h. es ist

$$\sigma\sin\lambda . d\psi . d\lambda = \sigma'\sin\lambda' d\psi d\lambda'.$$

Da nun

$$d\lambda = d\lambda'$$

ist, so bleibt

$$\sigma\sin\lambda = \sigma'\sin\lambda'$$

d. h.

$$A\sin\lambda = A'\sin\lambda'$$
$$B\sin\lambda = B'\sin\lambda'.$$

Entnimmt man hieraus A' und B' und setzt es in den Ausdruck für μ', so erhält man

$$\mu' = \pi\sin\lambda' d\lambda \left\{ \frac{2A\sin\lambda}{\sin\lambda'}\cos\lambda'\cos\alpha + B\sin\lambda\sin\alpha \right\}.$$

Durch Subtraction von (7) erhalten wir:

$$(8)\quad \mu' - \mu = 2\pi\, d\lambda . A\sin\lambda . \cos\alpha\,(\cos\lambda' - \cos\lambda) + \pi B\sin\lambda\sin\alpha\,(\sin\lambda' - \sin\lambda).$$

Es bleibt uns nun übrig A und B durch die Coëfficienten $a, b, c \ldots$ und den Winkel λ auszudrücken. Es ist einleuchtend, daſs

$$A + B\cos\psi + C\cos 2\psi + \ldots = a + b\cos z + c\cos 2z + \ldots$$

seyn muſs, wo, wie oben

$$\cos z = \cos\lambda\cos\alpha + \sin\lambda\sin\alpha\cos\psi$$

Digitized by Google

ist. Denkt man sich in obiger Gleichung rechter Hand die z durch ψ ersetzt, so entsteht eine Identität, aus welcher man für A und B, die wir allein brauchen, Ausdrücke von folgender Form erhält:

$$(9)\quad \begin{cases} A = A_1 + B_1 \cos\lambda \cos\alpha + \Sigma C_i f_i(\cos\lambda, \sin\lambda) \\ B = B_1 \sin\lambda \sin\alpha + \Sigma D_i \varphi_i(\cos\lambda, \sin\lambda). \end{cases}$$

Hier stellen f_i und φ_i Reihen von Functionen vor, welche höhere Potenzen und Producte der Gröfsen $\cos\lambda$ und $\sin\lambda$ enthalten, während A_1 und B_1 die Form

$$(10)\quad \begin{cases} A_1 = a - c + e - g + \ldots\ldots \\ B_1 = b - 3d + 5f - 7h + \ldots\ldots \end{cases}$$

haben; die Gröfse C_i und D_i sollen nicht weiter untersucht werden.

Setzen wir nun in (8) für A und B die Ausdrücke (9), für $\cos\lambda'$ den Weber'schen Ausdruck (aus 2) und für $\sin\lambda'$ den von uns hinzugefügten Ausdruck (aus 3), d. h.

$$\cos\lambda' = \frac{S + D\cos\lambda}{\sqrt{S^2 + D^2 + 2SD\cos\lambda}}.$$

$$\sin\lambda' = \frac{D\sin\lambda}{\sqrt{S^2 + D^2 + 2SD\cos\lambda}}.$$

Hier bedeutet D die als constant gedachte Directionskraft, gleich $\frac{m}{\lambda}$ nach unserer Anschauung; wir werden übrigens später D durch die Coëfficienten a, b, c u. s. w. ausdrücken. Wir erhalten somit:

$$\mu' - \mu = 2\pi d\lambda \Big\{ A_1 + B_1 \cos\lambda \cos\alpha + \Sigma C_i f_i(\cos\lambda, \sin\lambda) \Big\} \sin\lambda \cos\alpha \left(\frac{S + D\cos\lambda}{\sqrt{S^2 + D^2 + 2SD\cos\lambda}} - \cos\lambda \right) + \pi \Big\{ B_1 \sin\lambda \sin\alpha + \Sigma D_i \varphi_i(\cos\lambda, \sin\lambda) \Big\} \sin\lambda \sin\alpha \left(\frac{D\sin\lambda}{\sqrt{S^2 + D^2 + 2SD\cos\lambda}} - \sin\lambda \right).$$

Digitized by Google

Integrirt man diesen Ausdruck nach λ von o bis π, so erhält man die gesuchte Gröfse δm, d. i. den Zuwachs des Momentes m nach der Richtung $O\,C$. Wir erhalten:

$$\delta m = 2\pi A_1 \cos\alpha \int_0^\pi \left\{ \frac{S + D\cos\lambda}{\sqrt{S^2 + D^2 + 2SD\cos\lambda}} - \cos\lambda \right\} \sin\lambda\, d\lambda$$

$$+ 2\pi B_1 \cos^2\alpha \int_0^\pi \left\{ \frac{S + D\cos\lambda}{\sqrt{S^2 + D^2 + 2SD\cos\lambda}} - \cos\lambda \right\} \cos\lambda \sin\lambda\, d\lambda$$

$$+ 2\pi \cos\alpha \Sigma C_i \int_0^\pi \left\{ \frac{S + D\cos\lambda}{\sqrt{S^2 + D^2 + 2SD\cos\lambda}} - \cos\lambda \right\} f_i(\cos\lambda, \sin\lambda).\sin\lambda\, d\lambda$$

$$+ \pi B_1 \sin^2\alpha \int_0^\pi \left\{ \frac{D\sin\lambda}{\sqrt{S^2 + D^2 + 2SD\cos\lambda}} - \sin\lambda \right\} \sin^2\lambda\, d\lambda$$

$$+ \pi \sin\alpha \Sigma D_i \int_0^\pi \left\{ \frac{D\sin\lambda}{\sqrt{S^2 + D^2 + 2SD\cos\lambda}} - \sin\lambda \right\} \varphi_i(\sin\lambda, \cos\lambda) \sin\lambda\, d\lambda.$$

Wir nehmen nun an, es sey S äufserst klein, im Vergleiche mit D. In diesem Falle setzen wir im ersten, zweiten und vierten Integral

$$\sqrt{S^2 + D^2 + 2SD\cos\lambda} = z,$$

wo z eine neue Variabele ist, nach welcher wir von $z = D - S$ bis $z = D + S$ integriren müssen (nicht etwa von $z = S - D$). Dann erhalten wir

$$\int_0^\pi \left\{ \frac{S + D\cos\lambda}{\sqrt{S^2 + D^2 + 2SD\cos\lambda}} - \cos\lambda \right\} \sin\lambda\, d\lambda = \frac{4}{3} \frac{S}{D}$$

$$\int_0^\pi \left\{ \frac{S + D\cos\lambda}{\sqrt{S^2 + D^2 + 2SD\cos\lambda}} - \cos\lambda \right\} \cos\lambda \sin\lambda\, d\lambda = -\frac{2}{5} \frac{S^2}{D^2}$$

Digitized by Google

$$\int_0^{\pi} \left\{ \frac{D \sin \lambda}{\sqrt{S^2 + D^2 + 2 S D \cos \lambda}} - \sin \lambda \right\} \sin^2 \lambda \, d\lambda = - \frac{4}{15} \frac{S^2}{D^2}.$$

Eine ganz oberflächliche Untersuchung zeigt nun, dafs das dritte und fünfte Integral Glieder mit noch höheren Potenzen von $\frac{S}{D}$ ergeben werden, d. h. Glieder mit den Factoren $\frac{S^3}{D^3}, \frac{S^4}{D^4} \ldots$. Dies ergiebt sich z. B. leicht durch die specielle Annahme

$$f_i(\cos \lambda, \sin \lambda) = \cos^2 \lambda,$$

einer Function, welche unter den verschiedenen f_i in der That anzutreffen seyn wird. Wir vernachlässigen daher das dritte und fünfte Integral und dies ist eben die am Anfang angekündigte Vernachlässigung. Es wird nicht schwer seyn einzusehen, dafs sie keinen Einfluſs auf das Endresultat haben kann. Wir erhalten somit:

$$\delta m = 2 \pi A_1 \cos \alpha \frac{4}{3} \frac{S}{D} - 2 \pi B_1 \cos^2 \alpha \frac{2}{5} \frac{S^2}{D^2} - \pi B_1 \sin^2 \alpha \cdot \frac{4}{15} \frac{S^2}{D^2}.$$

Setzen wir nun

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{8}{3} \frac{S}{D} \pi A_1 - \frac{4}{5} \frac{S^2}{D^2} \pi B_1 \cos \alpha = k \\ \frac{4}{15} \frac{S^2}{D^2} \pi B_1 \sin^2 \alpha = \omega, \end{cases}$$

so erhalten wir endlich

$$(12) \qquad \delta m = k \cos \alpha - \omega,$$

d. i. der gesuchte Zuwachs des Momentes in der Richtung OC.

Auf genau gleiche Weise suchen wir nun den Zuwachs des Momentes n in der Richtung OA, welches offenbar ursprünglich den Werth $m \cos \alpha$ hatte. Das Moment ν eines Kegels in der Richtung OA ist offenbar:

$$\nu = \int_{\psi=0}^{2\pi} \sigma \sin \lambda \, . \, d\psi \, . \cos \lambda \, d\lambda = \sin \lambda \cos \lambda \, d\lambda \int_0^{2\pi} (A + B \cos \psi + \ldots) d\lambda$$

oder

Digitized by Google

$$\nu = \sin\lambda \,.\, \cos\lambda \,.\, d\lambda \,.\, 2\pi A.$$

Das neue Moment ist:

$$\nu' = \sin\lambda' \,.\, \cos\lambda' \,.\, d\lambda \,.\, 2\pi A',$$

oder da

$$A' \sin\lambda' = A \sin\lambda$$

ist

$$\nu' = 2\pi \cos\lambda' \,.\, d\lambda \,.\, A \sin\lambda.$$

Dies giebt

$$\nu' - \nu = 2\pi A \sin\lambda \,(\cos\lambda' - \cos\lambda)\, d\lambda. \tag{13}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem für $\mu' - \mu$ (8), so sieht man, dafs er sich von dem ersten Gliede desselben nur durch das Fehlen des Factors $\cos\alpha$ unterscheidet. Integriren wir nun wiederum den Ausdruck (13) nach λ von o bis π, so erhalten wir drei Integrale, welche sich ebenfalls von den ersten drei Integralen unseres Ausdruckes für δm nur durch das Fehlen des Factors $\cos\alpha$ unterscheiden und wir erhalten somit einfach

$$\delta n = k. \tag{14}$$

Nachdem wir die durch die äufsere Kraft hervorgerufenen Zuwüchse des Momentes nach den Richtungen OC und OA gefunden haben, wird es nun leicht seyn, das neue Moment y und dessen Richtung, d. h. den Winkel x zwischen ihm und der Richtung OC des ursprünglichen Momentes m aufzusuchen. Es haben sich die Momente m und $n = m\cos\alpha$ in $m + \delta m$ und $n + \delta n$ verwandelt und dieses werden die Projectionen des gesuchten Momentes y auf die Richtungen OA und OC seyn müssen. Dies giebt uns die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} y\cos(\alpha - x) &= m\cos\alpha + k \\ y\cos x &= m + k\cos\alpha - \omega, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{8}{3}\frac{S}{D}\pi A_1 - \frac{4}{5}\frac{S^2}{D^2}\pi B_1\cos\alpha, \\ \omega &= \frac{4}{15}\frac{S^2}{D^2}\pi B_1 \sin^2\alpha \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

und hierin

$$(17)\quad \begin{cases} A_1 = a - c + e - g + \ldots \\ B_1 = b - 3d + 5f - \ldots \\ m = 4\pi \left\{ \frac{b}{3} - \frac{d}{1.5} - \frac{f}{3.7} - \frac{h}{5.9} - \ldots \right\} \\ D = \frac{m}{\lambda} \end{cases}$$

sind.

Unser erstes Problem, Aufsuchung der Gröfsen x und y ist somit vollständig gelöst.

Die Formeln (16) und (17) sind zum gröfsten Theil nur eine Wiederholung der oben gefundenen Ausdrücke, zur besseren Uebersicht nebeneinander gestellt. In (17) sind aber zwei neue Ausdrücke hinzugefügt worden (für m und für D) und es mufs nun noch gezeigt werden, auf welche Weise man zu denselben gelangt. Was den vierten Ausdruck, $D = \frac{m}{\lambda}$, betrifft, so bedarf derselbe wohl keiner besonderen Erklärung; man braucht sich nur daran zu erinnern, dafs m ein Durchschnittsmoment ist, welches für alle Molecüle als identisch angenommen worden ist und daher in gleicher Weise für das Centralmolecül, wie für irgend ein Molecül der Nachbarschaft gelten wird. Die dritte Formel in (17) erhält man auf folgende Weise. Es ist offenbar

$$m = \int_{z=0}^{z=\pi} \int_{s=0}^{s=2\pi} \sigma \cos z \sin z \, dz \, ds$$

wo

$$\sigma = f(z) = a + b \cos z + c \cos 2z + \ldots .$$

ist.

Setzt man dies ein, so erhält man

$$m = 2\pi \int_0^{\pi} (a + b \cos z + c \cos 2z + \ldots .) \cos z \sin z \, dz.$$

Nun ist aber allgemein

Digitized by Google

$$\int_0^{\pi} \cos nz \cos z \sin z \, dz = \frac{2}{4-n^2},$$

wenn n gerade und $= 0$, wenn n ungerade ist. Dies giebt eben die obige Formel:

$$m = 4\pi \left\{ \frac{b}{3} - \frac{d}{1.5} - \frac{f}{3.7} - \frac{h}{5.9} - \ldots \right\}.$$

Die Coëfficienten a, b, c, d .... sind und bleiben unbestimmt, doch läfst sich über dieselben einiges sagen und vor Allem *läfst sich das Vorzeichen der Gröfsen von* A_1 *und* B_1 *bestimmen*, was für uns späterhin von der allergröfsten Wichtigkeit seyn wird.

Wir wissen erstens, dafs σ eine mit wachsendem z stetig abnehmende Function ist. Wenn wir daher für z nacheinander $z = 0$, $\frac{\pi}{2}$ und π einsetzen, so erhalten wir die drei Reihen:

$$(18) \quad \begin{cases} \sigma_1 = f(o) = a + b + c + d + e \ldots . \\ \sigma_2 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a - c + e - g + \ldots . \\ \sigma_3 = f(\pi) = a - b + c - d + e - \ldots . \end{cases}$$

von denen jede Folgende kleiner seyn mufs, als die vorhergehende und welche sämmtlich positive Gröfsen seyn müssen.

Da ferner σ mit wachsendem z abnimmt, so mufs der Differentialquotient $f'(z)$ für alle Werthe von z negativ seyn. Setzen wir $z = \frac{\pi}{2}$, so erhalten wir

$$(19) \qquad -b + 3d - 5f + \ldots . < o.$$

Vergleichen wir (18) und (19) mit (17), so erhalten wir erstens, dafs

$$(20) \qquad \begin{cases} A_1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ B_1 = -f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Digitized by Google

ist *und zweitens dafs* A_1 *und* B_1 *nothwendig positive Gröfse seyn müssen.*

Hieran wollen wir eine Bemerkung über die Gröfse k schliefsen. Bezeichnen wir durch k' und ω' die Gröfsen

$$(21) \qquad \begin{cases} k' = \frac{k}{\lambda} \\ \omega' = \frac{\omega}{\lambda} \end{cases}$$

so bedeuten, analog wie $D = \frac{m}{\lambda}$ ist, k' und ω' die Projectionen, des durch die hinzugekommenen Momente k und ω entstandenen Zuwachses der Directionskraft. Da k' die Richtung der Kraft S hat, so kann man es als ein an die Kraft S gleichsam anzuhängendes Correctionsglied beobachten und obgleich wir über die Gröfse desselben Nichts zu sagen im Stande sind, dürfen wir wohl doch ohne Weiteres die Annahme machen, *dafs* k' *kleiner ist als* S, d. h. dafs, wenn die inneren Vorgänge völlig dem Weber'schen Formeln entsprechen würden, die durch Erzeugung des magnetischen Zustandes in der nächsten Nachbarschaft des Molecüles, hinzukommende Verstärkung k' der äufseren Kraft S kleiner seyn wird als diese Kraft selbst.

§ 3.

Nachdem im vorhergehenden Paragraphen die, in der Nachbarschaft des Molecüles vorgehenden Veränderungen einer eingehenden Untersuchung unterworfen worden und der Uebergang des Momentes m in das Moment y durch die Gleichungen (15) ganz genau festgestellt ist, können wir an den zweiten Theil unserer Aufgabe gehen — die Bewegung des Centralmolecüles untersuchen.

Es sey M das durch die Kraft S in dem betrachteten Metallstück inducirte magnetische Moment und δM der Theil desselben, welcher speciell hervorgerufen wird durch die Theilchen, welche einen Winkel zwischen α und $\alpha + d\alpha$

Digitized by Google

mit der Richtung S bilden. Ist N die Anzahl aller Theilchen, μ das Moment eines einzelnen Theilchens, so ist

$$\delta M = N\mu \sin\alpha\,(\cos(\alpha-\varphi) - \cos\alpha)\,d\alpha. \tag{22}$$

Das Theilchen befindet sich nun unter der Einwirkung zweier Kräfte: der Kraft S und der Kraft y', welche mit der ursprünglichen Richtung des Molecüles den Winkel x bildet. Wir gingen nun aus von der Annahme, die Theilchen hätten sich um einen Winkel φ gedreht und es ist wohl einleuchtend, dafs sowohl diese Annahme als auch unsere ganze Anschauungsweise nur dann einen Sinn hat, wenn der hiebei erhaltene, mit x bezeichnete Winkel kleiner ist als φ. Ist $x < \varphi$, so wirkt die Kraft y' als rücktreibende Kraft und es kann sich zwischen ihr und der Kraft S ein gewisser Gleichgewichtszustand herstellen. Es kann leicht scheinen, als bewege man sich hiebei in einem Kreisschlusse; doch ist dem nicht so, wie man bei genauer Ueberlegung leicht einsieht. Der gesammte Vorgang der Magnetisirung wird folgender seyn: sobald die Kraft S anfängt zu wirken, fangen die sämmtlichen Theilchen an sich zu drehen und zwar Alle in gleicher Weise (natürlich in Abhängigkeit von dem Winkel α), da kein einziges vor den andern irgendwie bevorzugt ist. Kaum beginnt aber die Drehung, so fängt auch die rücktreibende Kraft an sich zu entwickeln; sie wächst mit der Gröfse der Drehung, bis sie die äufsere Kraft S zu äquilibriren im Stande ist.

Um zu zeigen, dafs $x < \varphi$ ist, bestimmen wir den Winkel x durch Elimination von y aus den Gleichungen (15). Wir erhalten

$$\operatorname{tg} x = \frac{k\sin\alpha + \omega\operatorname{cotg}\alpha}{m + k\cos\alpha - \omega};$$

dividiren wir Zähler und Nenner durch λ, so erhalten wir

$$\operatorname{tg} x = \frac{k'\sin\alpha + \omega'\operatorname{cotg}\alpha}{D + k'\cos\alpha - \omega'}; \tag{23}$$

vergleichen wir diesen Ausdruck mit

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{S\sin\alpha}{D + S\cos\alpha}$$

Digitized by Google

und erinnern uns zugleich daran, dafs ω' erstens den Factor $\sin^2\alpha$, zweitens den sehr kleinen Factor $\frac{S^2}{D^2}$ hat und dafs ferner $k' < S$ ist (s. Schlufs des § 2), so sehen wir sofort, dafs der Winkel $x < \varphi$ ist, indem er sich nur wenig von dem einer äufseren Kraft k' entsprechenden Drehungswinkel φ_1 unterscheidet.

Nun löst sich auch ganz einfach das, in der Einleitung erwähnte, scheinbare Paradoxon. Das Auftreten des Momentes y verstärkt die Wirkung der Kraft X (wie später genauer gezeigt werden wird); hört aber die Kraft S auf zu wirken, so mufs der magnetische Zustand gänzlich erlöschen. In der That, da der Winkel $x < \varphi$ ist, so wird die Kraft y', nach Erlöschen der Kraft S zurücktreibend wirken. Dies bezieht sich aber ebenso gut auf das Centralmolecül, wie auf alle Nachbarmolecüle und es wird daher, während der Rückdrehung des Ersteren die Kraft y' selbst zurückweichen und gleichsam vor der Richtung desselben herlaufen, bis alle Molecüle in die frühere Ruhelage zurückgekehrt sind und somit der magnetische Zustand aufgehört hat. Die Bedingung des Gleichgewichtes zwischen den Kräften S und y' führt uns nun zu der Hauptgleichung:

$$S \sin(\alpha - \varphi) = y' \sin(\varphi - x). \tag{24}$$

Aus dieser Gleichung hat man φ zu entnehmen, y' und x vermittelst der Gleichungen (15) zu eliminiren und das so gefundene φ in (22) einzusetzen. Die Gleichung (24) giebt uns

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{S\sin\alpha + y'\sin x}{S\cos\alpha + y'\cos x}.$$

Nun ist aber aus (15)

$$y'\cos x = D + k'\cos\alpha - \omega';$$

multiplicirt man dies mit (23), so erhält man

$$y'\sin x = k'\sin\alpha + \omega'\operatorname{cotg}\alpha.$$

Es ist somit

Digitized by Google

(25) $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(S+k')\sin\alpha + \omega'\operatorname{tg}\alpha}{(S+k')\cos\alpha + D - \omega'},$$

womit y' und x eliminirt sind. Setzt man nun φ in (22) ein, so erhält man

(26) $$\delta M = N\mu \sin\alpha \left\{ \frac{S+k'+D\cos\alpha}{\sqrt{(S+k')^2 + D^2 + \frac{\omega'^2}{\sin^2\alpha} + 2D(S\cos\alpha + k'\cos\alpha - \omega')}} - \cos\alpha \right\} d\alpha.$$

Setzen wir hier die früher gefundene Werthe von k' und ω' ein, so erhalten wir

(27) $$\delta M = N\mu\sin\alpha \left\{ \frac{S\left(1+\frac{8}{3}\pi\frac{A_1}{\lambda D}\right) + \left(D - \frac{4}{5}\frac{\pi B_1 S^2}{\lambda D^2}\right)\cos\alpha}{\sqrt{S^2\left(1+\frac{8}{3}\pi\frac{A_1}{\lambda D}\right)^2 + \left(D-\frac{4}{5}\frac{\pi B_1 S^2}{\lambda D^2}\right)^2 + 2S\left(1+\frac{8}{3}\pi\frac{A_1}{\lambda D}\right)\left(D-\frac{4}{5}\frac{\pi B_1 S^2}{\lambda D^2}\right)\cos\alpha + \frac{16}{15}\frac{\pi B_1 S^2}{\lambda D}\left(1+\frac{8}{15}\frac{\pi B_1 S^2}{\lambda D^3}\right)\sin^2\alpha}} - \cos\alpha \right\} d\alpha.$$

Vergleicht man nun diese Formel mit der Weber'schen

$$\delta M = N\mu \sin\alpha \left\{ \frac{S + D\cos\alpha}{\sqrt{S^2 + D^2 + 2SD\cos\alpha}} - \cos\alpha \right\} d\alpha,$$

so findet man einen dreifachen Unterschied:

Digitized by Google

1) statt S steht $S\left(1+\frac{8}{3}\,\frac{\pi A_1}{\lambda D}\right)$,

2) statt D steht $D\left(1-\frac{4}{3}\,\frac{\pi B_1 S^2}{\lambda D^2}\right)$,

3) unter der Wurzel befindet sich noch ein neues, mit $\sin^2\alpha$ multiplicirtes, stets positives Glied, welches wir weiter unten mit $r\sin^2\alpha$ bezeichnen werden. Integrirt man die Weber'sche Formel nach α von o bis π, so erhält man $M = N\mu\,.\,\frac{4\pi}{3}\,.\,\frac{S}{D}$. Der erste Unterschied kann, da S nur einen constanten Factor zubekommen hat, auf die *Form* des Endresultates keinen Einfluſs haben; der zweite, welcher ein Fallen der Gröſse D ausdrückt, würde dagegen ein schnelleres Ansteigen von M hervorrufen als es die obige Weber'sche Formel anzeigt; dagegen wird der dritte Unterschied, da das unter der Wurzel neu hinzugekommene Glied beständig positiv ist, im Gegensatz dazu, die Gröſse M verkleinern. Nur die genaue Rechnung kann nun entscheiden, ob das M, welches aus der Formel (27) erhalten wird, gröſser oder kleiner ist als das obige Weber'sche M.

Setzen wir unter der Wurzel $1-\cos^2\alpha$ statt $\sin^2\alpha$, führen wir die neue Variabele $x=\cos\alpha$ ein, so erhalten wir aus (27) durch Integration nach x von -1 bis $+1$ das folgende Resultat:

$$(28)\qquad \left\{\begin{array}{l} M = N\mu\left\{2\left(\frac{p}{r}+\frac{pq^2}{r^3}\right)\operatorname{arctg}\frac{r}{q}-\frac{2pq}{r^2}\right\} \\ \text{wo} \\ p = S\left(1+\frac{8}{3}\pi\frac{A_1}{\lambda D}\right) \\ q = D-\frac{4}{5}\,\frac{\pi B_1 S^2}{\lambda D^2} \\ r^2 = \frac{16}{15}\,\frac{\pi B_1 S^2}{\lambda D}\left\{1+\frac{8}{15}\,\frac{\pi B_1 S^2}{\lambda D^2}\right\} \end{array}\right.$$

ist, so daſs

Digitized by Google

$$M = N\mu \int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{p + qx}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2 - 2pqx - rx^2}} - x \right\} dx$$

gesetzt war. Der Uebersichtlichkeit wegen, wollen wir noch die Formeln

$$(29) \quad \begin{cases} A_1 = a - c + e - g + \ldots\ldots \\ B_1 = b - 3d + 5f - \ldots\ldots \\ \lambda D = 4\pi \left(\frac{b}{3} - \frac{d}{1.5} - \frac{f}{3.7} - \frac{h}{5.9} - \ldots\ldots \right) \\ \sigma = f(z) = a + b \cos z + c \cos 2z + \ldots\ldots \end{cases}$$

zusammenstellen und daran erinnern, dafs D die ursprüngliche Directionskraft und dafs A_1 und B_1 bewiesenermafsen *positive* Gröfsen sind. Unser Problem ist nun durch die Ausdrücke (28) und (29) vollständig gelöst und wir haben M als Function von S gefunden. Es erübrigt nun die Eigenschaften dieser Function für kleine S zu untersuchen. Wäre $r = o$, so hätten wir

$$M_o = N\mu \,.\, 2\frac{p}{q}$$

d. h.

$$M_o = 2N\mu \left(1 + \frac{8}{3}\pi \frac{A_1}{\lambda D}\right) \frac{S}{D - \frac{4}{5}\frac{\pi B_1}{\lambda D^2} S^2}$$

und die Magnetisirungszahl $K = \frac{M_o}{S}$ würde mit wachsendem S ebenfalls wachsen. Da es nun die Gröfse r ist, welche diesem Wachsen entgegenwirkt, so zerlegen wir M aus (28) nach der Mac-Laurin'schen Reihe nach Potenzen von r. Wir erhalten dann

$$M = N\mu \left\{ \frac{2p}{q} - \frac{4}{15}\frac{p}{q^3} r^2 \ldots\ldots \right\}$$

oder

$$M = 2N\mu \frac{p}{q} \left\{ 1 - \frac{2}{15}\frac{r^2}{q^2} + \ldots\ldots \right\}$$

d. h.

Digitized by Google

$$M = 2N\mu\left(1+\frac{8}{3}\pi\frac{A_1}{\lambda D}\right)\frac{S}{D-\frac{4}{5}\frac{\pi B_1}{\lambda D^2}S^2}\left\{1-\frac{2}{15}\right.$$
$$\left.\cdot\frac{\frac{16}{15}\frac{\pi B_1 S^2}{\lambda D}\left(1+\frac{8}{15}\frac{\pi B_1 S^2}{\lambda D}\right)}{\left(D-\frac{4}{5}\frac{\pi B_1}{\lambda D^2}S^2\right)^2}+\ldots.\right\},$$

oder

$$M = 2N\mu\left(1+\frac{8}{3}\pi\frac{A_1}{\lambda D}\right)\left\{\frac{S}{D}+\frac{4}{5}\frac{\pi B_1 S^4}{\lambda D^4}+\ldots\right\}\times$$
$$\times\left\{1-\frac{2}{15}\cdot\frac{16}{15}\frac{\pi B_1 S^2}{\lambda D^3}+\ldots\right\}.$$

Multiplicirt man aus, so erhält man:

$$M = 2N\mu\left(1+\frac{8}{3}\pi\frac{A_1}{\lambda D}\right)\left\{\frac{S}{D}+\left(\frac{4}{5}-\frac{32}{225}\right)\frac{\pi B_1}{\lambda D^4}S^3+\ldots\right\}$$

oder

$$(30)\quad M = 2N\mu\left(1+\frac{8}{3}\pi\frac{A_1}{\lambda D}\right)\left\{\frac{S}{D}+\frac{148}{225}\frac{\pi B_1}{\lambda D^4}S^3+\ldots\right\}.$$

Der vorletzte Ausdruck zeigt uns nun, wie in § 1 erwähnt worden war, dafs sich die störende Wirkung des r verhält zu den andern fördernden Wirkungen wie $\frac{32}{225}:\frac{4}{5}$ oder etwa wie 1 : 5,6. Dividiren wir (30) durch S, so erhalten wir für K den Ausdruck

$$K = N\mu\frac{2\left(1+\frac{8}{3}\frac{\pi A_1}{\lambda D}\right)}{D}\left\{1+\frac{148}{225}\frac{\pi B_1}{\lambda D}\cdot\frac{S^2}{D^2}+\ldots.\right\},$$

oder, wenn wir

$$(31)\quad \begin{cases} u = 1+\frac{2}{3}\cdot\frac{a-c+e-g+\ldots.}{\frac{b}{3}-\frac{d}{1.5}-\frac{f}{3.7}-\frac{h}{5.9}-\ldots.}, \\ t = \frac{37}{228}\cdot\frac{b-3d+5f-7h-\ldots.}{\frac{b}{3}-\frac{d}{1.5}-\frac{f}{3.7}-\frac{h}{5.9}-\ldots.} \end{cases}$$

setzen,

Digitized by Google

$$(32) \qquad K = \frac{2\,N\mu}{D}\,u\left\{1 + t\,\frac{S^2}{D^2} + \ldots\right\}.$$

Dieses ist das endgültige Resultat unserer Untersuchung. Es zeigt uns, da B_1, wie bewiesen, also auch t positiv ist, dafs die Magnetisirungszahl K für kleine S wachsen mufs mit wachsendem S und wir finden somit die bekannten Resultate experimenteller Untersuchungen durch die Theorie bestätigt.

Vergleichen wir die Formel (32) mit den von Stoletoff erhaltenen Zahlen, so überzeugen wir uns leicht davon, dafs t eine sehr grofse Zahl seyn mufs (etwa von derselben Ordnung wie die Zahl 1000). Dem widerspricht durchaus nicht der Bau der Gröfse t in (31); sind nämlich die Zahlen b, d, f, h u. s. w. nicht sehr viel von einander verschieden, so ist der Nenner von t eine sehr kleine Gröfse, da die Summe aller Coëfficienten des Nenners Null ist. Dies folgt einfach daraus, dafs

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4-n^2} = 0$$

ist, wenn die Summirung nur auf die ungeraden n erstreckt wird.

Wir haben nun noch einige Bemerkungen an die vorhergehende Entwickelung anzuknüpfen.

Was den Bau der Gröfsen k und ω, Formeln (11) betrifft, so finden wir in denselben genau alle Glieder, welche wir (31) erwartet hatten, so z. B. das von α abhängige Glied in dem Ausdruck von k u. s. w. Eine fernere Bemerkung ist über den idealen Fall einer unendlich grofsen magnetisirenden Kraft zu machen. Für diesen Fall würde die Axen aller Molecüle untereinander parallel werden und, wie man leicht einsieht, die rücktreibende Kraft wird gleich Null. Nach Erlöschen der äufseren Kraft könnten daher die Theilchen unverändert ihre Lagen beibehalten und in einem Zustande *labilen* Gleichgewichtes verharren. Es ist möglich, dafs die bekannte Erscheinung des, in temporär

Digitized by Google

magnetisirten und mit Anker versehenen Eisenstäben zurückbleibenden Magnetismus, durch diesen labilen Gleichgewichtszustand erklärt werden kann, welcher zerstört wird, sobald an irgend einer Stelle die, vielleicht geschlossene, Kette einander gleichsam gegenseitig festhaltender Molecüle zerrissen wird.

Es erübrigt ein paar Worte zu sagen über die Vernachlässigungen, welche wir uns gestattet haben. Es ist wohl kaum nöthig zu bemerken, dafs die Folge der ersten Vernachlässigung — der Annahme, dafs für die Nachbarmolecüle die Weber'schen Formeln gültig seyen — die Gröfse K ein wenig zu klein erhalten worden ist; denn, da die Drehungen in Wirklichkeit ein wenig gröfser sind, so wird auch der Winkel x in Wirklichkeit etwas gröfser seyn, als wir es erhalten. In Folge dessen mufs φ, also M und K gröfser seyn, als wir es erhalten haben, doch dürfte sich der Unterschied wohl kaum bereits in dem von uns berechneten zweiten Gliede (das mit S^2) bemerklich machen. Hätten wir endlich in den Reihen für δm und δn noch die Glieder mit den f_i (cos λ, sin λ) und φ_i (cos λ, sin λ) hinzugenommen, so hätten wir in (27) unter der Wurzel Glieder mit noch höheren Potenzen von cos λ, sin λ und $\frac{S}{D}$ erhalten, welche bei der Integration ebenfalls auf jenes Glied keinen Einfluſs haben können.

In einer späteren Abhandlung gedenke ich die Erscheinungen des constanten (Stahl-) Magnetismus einer ebensolchen Untersuchung zu unterwerfen. Ich werde dabei ausgehen von den äufserst einfachen Anschauungen über das Wesen des constanten Magnetismus, welche ich niedergelegt habe in meiner Schrift: „Theorie des constanten Magnetismus," Journal der russisch-chemischen und der physikalischen Gesellschaften T. VI, Heft 8.

St. Petersburg, $\frac{5}{17}$. März 1875.

Digitized by Google

III. *Ueber Temperatur und Adiabate; von Dr. A. J. v. Oettingen.*

Fast alle physikalischen Erscheinungen sind mit Aenderungen der Temperatur verknüpft und stehen in Beziehung zur Wärme. Deshalb bildet das Princip der *Constanz der Energie* in der Form des ersten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie den Ausgangspunkt für alle diejenigen Probleme, die über die bloſse Form der Erscheinung hinausgehen und über die Causalitätsverhältnisse Rechenschaft abgeben. Die Ermittelung des mechanischen Wärmeäquivalentes hat den bezüglichen Anschauungen eine Gewiſsheit verliehen, die vorher nur auf dem Gebiete der Mechanik bekannt war. Während der erste Hauptsatz fast populär geworden ist, bildet der sogenannte zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie seit lange den Gegenstand lebhafter Controverse. Und doch ist derselbe von Carnot *vor* der klaren Erkenntniſs einer Aequivalenz von Wärme und Arbeit an die Spitze der mechanischen Wärmetheorie gestellt worden. Die bekannten, in Carnot's Satze vorkommenden Irrthümer wurden von Clausius entdeckt, und von ihm rührt diejenige Fassung her, die gegenwärtig allgemein angenommen wird. Die Anwendung auf specielle Probleme oft complicirtester Art, die Berücksichtigung der Bedürfnisse der Technik haben eine rasche Ausbildung dieses Wissenszweiges vermittelt und hierdurch ist der rein theoretische Calcul mit einem umfangreichen Apparat von Formeln der physikalischen Deutung der aufgestellten Relationen vorausgeschritten.

Mit dem Jahre 1857 begann ein neues Stadium. Krönig entwarf den Grundgedanken zu einer neuen Gastheorie durch Aufstellung einer Hypothese, die bereits von Da-

Digitized by Google

niel Bernouilli und wie sich später erwies[1]) noch von anderen Forschern ausgesprochen war, die aber wenig beachtet und keiner weiteren Entwickelung werth geschätzt wurde. Unmittelbar nach Krönig trat Clausius[2]) für die neue Theorie ein, mit der er sich selbst schon beschäftigt hatte. Gegen vielseitig erhobene Bedenken und Einwände wufste er jene Hypothese nicht blos zu schützen und mit neuen Argumenten zu kräftigen, sondern auch durch gründliche Untersuchungen wesentlich zu erweitern, während gleichzeitig Maxwell[3]) in einer Reihe von classischen Abhandlungen neues Licht über diese Theorie verbreitete. Es gewannen hierdurch die tiefgreifenden Untersuchungen eines Clapeyron, W. Thomson, Joule, Rankine u. a. eine erhöhte Bedeutung. Gegenwärtig fesselt die Zurückführbarkeit des zweiten Hauptsatzes auf allgemeine Principien der Mechanik die Aufmerksamkeit vieler Physiker, deren Ziel darauf gerichtet ist, jenen Satz unabhängig von physikalischen und vielleicht bestreitbaren Axiomen herzuleiten.

Mit dem zweiten Hauptsatze hängen auf's innigte die allgemeinen Sätze zusammen, auf welche W. Thomson[4]) schon 1852 hinwies. Er behauptete im Gegensatz zur Constanz der Energie das allmälige Schwinden aller thermischen Ungleichheiten. Dasselbe vertrat Clausius in ganz anderer Form, beide Forscher glaubten ein in endlicher Zeit eintretendes Ende des Weltprocesses vorauszusehen. Sätze von solcher Tragweite sind für den Gesammthorizont des menschlichen Denkens von eminenter Bedeutung. Auch der kleinste Beitrag zur Klärung der hierbei wesentlich in Betracht kommenden Momente wird nicht unwillkommen seyn. Die vorliegende Abhandlung bezieht sich hauptsächlich auf die Deutung des zweiten

1) Pogg. Ann. Bd. 107, S. 490.

2) Ges. Abh. XIV u. XV.

3) Phil. Mag. (4) Vol. XIX, S. 19 u. XX, S. 21 u. a.

4) *Philos. mag. (4. ser.) Vol. IV, p.* 305.

Digitized by Google

Hauptsatzes, und auf die aus demselben zu ziehenden Schlüsse. Die soeben angeführten Sätze von Thomson und Clausius halte ich für bestreitbar, und glaube nachweisen zu können, dafs von den angeblich positiven Elementen der von Clausius definirten *Entropie* sich viele als gleich Null erweisen. Wenn hiermit noch keine Widerlegung jener Thesen gegeben, so dürften dieselben immerhin nicht unbestritten dastehen, auch ganz abgesehen davon, ob man sich, wie Thomson zu thun scheint, in Organismen die Möglichkeit einer Verletzung physikalischer Gesetze offen erhält oder nicht. Indefs beabsichtige ich diesen Gegenstand nur beiläufig zu berühren, und gedenke die Hauptsätze in Bezug auf ihren Inhalt — und nicht in Bezug auf die Art ihrer Begründung — zu discutiren. Es sollen dabei complicirte Fälle vermieden und die Untersuchung auf Processe mit permanenten Gasen beschränkt werden, mit nur gelegentlicher Erwähnung der bei Aggregatänderungen eintretenden Verhältnisse.

Bei ideellen permanenten Gasen gilt eine Relation zwischen Temperatur T, specifischem Druck p und specifischem Volumen v, wie eine solche für keinen anderen Körper bekannt ist. Deshalb lassen sich bei Gasen alle Processe in Gleichung bringen und es gelingt die Integration derselben da, wo sonst die bezüglichen Symbole intact stehen bleiben.

Man ist gewohnt, die Eigenschaften eines Körpers und die mit demselben vorzunehmenden Aenderungen durch die obengenannten drei Variablen T, p und v auszudrücken. Eine vierte Variable, die eine Hauptrolle spielen sollte, ist bisher fast gänzlich übersehen worden. Dennoch bietet sich die Einführung derselben von selbst dar.

Den bei einer adiabatischen Veränderung eines Körpers constant bleibenden Parameter nenne ich die *Adiabate* des Körpers, wobei stets die Masseneinheit des Körpers dem Begriff zu Grunde gelegt wird, auch ohne dafs der Zusatz einer *specifischen* Adiabate betont werde. Den Gegensatz zum adiabatischen Verhalten eines Körpers be-

Digitized by Google

zeichne ich mit einer *diabatischen* Veränderung, eine Bezeichnung, die in einer kürzlich erschienenen Abhandlung des früh verstorbenen Dr. J. J. Müller[1]) bereits vorkommt. Beim diabatischen Processe ändert sich die Adiabate. Hierbei wird der Gegensatz zwischen *Temperatur* und *Adiabate* hervortreten und in der zwischen 0 und $\pm\infty$ schwankenden Variabilität der specifischen Wärme λ Ausdruck finden. Ich behandle zunächst den umkehrbaren, dann den nicht umkehrbaren Proceſs. Bei letzterem wird der Gegensatz zu den gangbaren Vorstellungen hervortreten. Insbesondere glaube ich den von Clausius verfochtenen Anschauungen entgegentreten zu müssen, die immer mehr Geltung unter den Physikern zu gewinnen scheinen, wenn auch andere Stimmen oft genug laut wurden. Auch für meine Darlegung könnte ich manches Zeugniſs aufweisen. Insbesondere sind es die zahlreichen und treffenden Abhandlungen Rankine's, in denen ich fast gar keine Abweichung von meiner Ansicht finde.

Jedoch sei es mir gestattet, erst zum Schluſs auf Clausius' Denkweise einzugehen und nachzuweisen, worin nach meiner Meinung eine Erschwerung des Verständnisses des zweiten Hauptsatzes und der in demselben vorkommenden Begriffe ihren Grund habe. Die Einführung eines neuen Namens, der *Adiabate*, für eine Gröſse, die bereits mehrere Namen trägt, glaubte ich um so weniger vermeiden zu dürfen, als sich derselbe aus dem bisher eingebürgerten Sprachgebrauch von selbst ergab. Andererseits war mir ein neuer Name genehm, weil ich in den Resultaten, die sich auf diese Gröſse beziehen, von anderen Forschern abweiche.

A. Der umkehrbare Proceſs.

I. a. Die erste Hauptgleichung.

Wird mit der Masseneinheit eines Gases eine Aenderung bei gegebener specifischer Wärme λ vorgenommen, so gilt bekanntlich die Gleichung:

1) Pogg. Ann. Bd. 154, S. 124.

Digitized by Google

$$p^m v^n = \text{const.} \quad \ldots \ldots \quad 1,$$

wo m und n positive oder negative Zahlen bedeuten. Die Gleichung 1 ist das Integral der Gleichung

$$(\lambda - c)\, v\, dp + (\lambda - c')\, p\, dv = 0 \quad \ldots \quad 2.$$

in welcher $\lambda - c = a \,.\, m$ und $\lambda - c' = a \,.\, n$ gesetzt worden ist. Die ursprünglichere Form von 1, hieſse

$$p^{\lambda - c} \,.\, v^{\lambda - c'} = \text{const.} \quad \ldots \ldots \quad 3.$$

Setzen wir $\frac{p \,.\, v}{R} = T$ und $p^c\, v^{c'} = X$

so wird aus Gleichung 3,

$$T^\lambda = X \,.\, \text{const.} \quad \ldots \ldots \quad 4.$$

Auch gilt die erste Hauptgleichung

$$dQ = \frac{T dX}{X} = T d\,(\log X).$$

Setzen wir ferner

$$\log (p^c v^{c'}) = \log X = \xi,$$

so wird $dQ = T \,.\, d\xi$ und Gleichung 1 oder 4 wird:

$$T^\lambda \,.\, e^{-\xi} = \text{const.} \quad \ldots \ldots \quad 5.$$

Die Gröſse ξ nenne ich die ***Adiabate*** des Gases. Unter allen durch Gleichung 5. dargestellten Aenderungswegen treten zwei als Gegensätze auf. Es ist auf isothermer Linie T constant und $\lambda = \pm\infty$, und auf adiabatischem Wege ξ constant und $\lambda = 0$. Von diesem Gesichtspunkte aus bilden ***Temperatur*** und ***Adiabate*** Gegensätze. Wie es unter Umständen zweckmäſsig erscheint, statt p oder v die Gröſse T einzuführen, so läſst sich auch statt T die Variable X oder die Adiabate ξ verwerthen. Für die Gleichung 5. oder 3. gelten beiläufig auch folgende Formen:

Digitized by Google

$$T^{\lambda - c} \quad p^{c' - c} = \text{const.}$$

$$T^{\lambda - c} \quad v^{c - c'} = \text{const.}$$

$$p^{\frac{\lambda (c' - c)}{c}} \cdot e^{\frac{\lambda - c}{c'} \xi} = \text{const.}$$

$$v^{\frac{\lambda (c' - c)}{c}} \cdot e^{\frac{\lambda - c}{c} \cdot \xi} = \text{const.}$$

Für specielle Fälle sind bemerkenswerth:

der adiabatische Weg: $\xi =$ const., oder $p^c v^{c'} =$ const.
der isotherme Weg: $T =$ const., oder $p \cdot v =$ const.
der Weg bei const. Druck: $T^{c'} \cdot e^{-\xi} =$ const. oder $p =$ const.
„ „ „ „ Volumen: $T^c \cdot e^{-\xi} =$ const. oder $v =$ const.

Schreibt man noch Θ für log T, so geht Gleichung 5 über in

$$\xi = \lambda \cdot \Theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6,$$

so dafs für Aenderungen bei const. Druck oder Volumen, bei passend gewählten Einheiten:

$$\xi = c' \cdot \Theta$$
$$\xi = c \cdot \Theta.$$

Bei der üblichen graphischen Construction in p- und v-Coordinaten, könnte die zweifach unendliche Schaar von Isothermen und Adiabaten unmittelbar als neues Coordinatennetz aufgefafst werden; wählt man aber unmittelbar ξ und Θ als Coordinaten, so laufen alle isothermen Linsen parallel der Abscissen-, alle adiabatischen Linien parallel der Ordinatenaxe, und alle Wege constanter specifischer Wärme wären grade Linien, deren Neigungstangente $= \lambda$, so dafs ein gewöhnlicher von vier solchen Wegen gebildeter Kreisprocess durch ein Parallelogramm dargestellt würde.

Die erste Hauptgleichung, die für Gase in den Formen

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} dQ &= \frac{1}{R}\,(c v\,dp + c' p\,dv) \\ &= c\,dT + \frac{A R T dv}{v} \\ &= c'\,dT - \frac{A R T dp}{p} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 7$$

angesetzt wird, nimmt, wenn man die Adiabate einführt, folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} dQ &= T \,.\, d\xi \\ &= \frac{1}{R} \,.\, v^{1-k} \,.\, e^{\frac{\xi}{c}} \,.\, d\xi \\ &= \frac{1}{R} \,.\, p^{k-1} \,.\, e^{\frac{\xi}{c'}} \,.\, d\xi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 8.$$

Der wesentlichste Unterschied zwischen den Formen 7 und 8, besteht darin, dafs bei letzteren, durch Einführung der Adiabate, dQ nur *von einem Increment* abhängig erscheint. Um allgemeiner die Formeln zu fassen, können die Variablen für Gase, wo die Functionen von T und ξ bekannt sind, unbestimmt gelassen werden. Dazu setze man

$$T^{\lambda'} \,.\, e^{-\xi} = \Omega'$$

alsdann wird

$$\begin{aligned} dQ &= \Omega^{\frac{1}{\lambda'}} \,.\, e^{\frac{\xi}{\lambda'}} \,.\, d\xi \\ &= \lambda' \,.\, dT - T \,.\, \frac{d\Omega}{\Omega} \end{aligned} \quad \ldots\ldots 9$$

und für $\log \Omega = -\xi$ wird $\lambda' = o$.

Wird dagegen neben

$$\Omega_{,} = T^{\lambda'} \,.\, e^{-\xi}$$

noch

$$\Omega_{,,} = T^{\lambda_{,,}} \,.\, e^{-\xi}$$

als Variable eingeführt, wobei λ' und λ'' irgend zwei beliebige Zahlen bedeuten, so wird

Digitized by Google

$$dQ = \frac{\lambda''}{\lambda'' - \lambda'} \cdot \Omega''^{\frac{1}{\lambda''-\lambda'}} \cdot \Omega'^{\frac{1}{\lambda''-\lambda'}-1} d\Omega'$$

$$+ \frac{\lambda'}{\lambda'' - \lambda'} \cdot \Omega'^{\frac{1}{\lambda_{,,}-\lambda_{,}}} \cdot \Omega''^{\frac{1}{\lambda''-\lambda'}-1} d\Omega''$$

$$= \frac{1}{\lambda''-\lambda'} \cdot \left[\frac{\Omega''}{\Omega'}\right]^{\frac{1}{\lambda''-\lambda'}} \cdot \left[\lambda'' \frac{d\Omega'}{\Omega'} - \lambda' \frac{d\Omega''}{\Omega''}\right] \quad . \quad . \quad . \quad 10.$$

$$= \frac{\lambda' . \lambda''}{\lambda''-\lambda'} \cdot \left[\frac{\Omega''}{\Omega'}\right]^{\frac{1}{\lambda''-\lambda'}} . d . \log \left(\frac{\Omega'^{\frac{1}{\lambda'}}}{\Omega''^{\frac{1}{\lambda_{,,}}}} \right) . \quad . \quad . \quad . \quad 11.$$

Die Gleichung 11. oder 10. enthält alle unter 7., 8 und 9. aufgeführten Formen als specielle Fälle; für 7. setze man in Gleichung 10. $\lambda_{,,} = c'$ und $\lambda_{,} = c$, um 8. zu erhalten $\lambda_{,} = c$ und $\lambda_{,,} = \infty$ oder c' oder o, wobei zu beachten, daſs $\Omega_{,,}^{\frac{1}{\lambda_{,,}-\lambda_{,}}}$ für $\lambda_{,,} = \infty$ und $\lambda_{,} = c$ nicht $= 1$, sondern $= T$ wird. Den Sinn von 11. erblickt man am einfachsten durch die Beziehung:

$$\left[\frac{\Omega_{,,}}{\Omega_{,}}\right]^{\frac{1}{\lambda_{,,}-\lambda_{,}}} = T$$

und

$$\log \left[\frac{\Omega_{,,}^{\lambda_{,}}}{\Omega_{,}^{\lambda_{,,}}}\right]^{\frac{1}{\lambda_{,,}-\lambda_{,}}} = \xi.$$

Bei Gasen, deren innere Arbeit Null ist, genügt auch eine Gleichung [1])

$$T = p \, . \, \varphi(v)$$

1) F. Bauschinger in Schlömilch's Ztsch. f. Mathm. u. Physik Jahrgang 11, Seite 219.

Digitized by Google

Setzen wir allgemeiner

$$T = f(p) \cdot \varphi(v)$$

so wird

$$\left(\frac{d\,T}{d\,p}\right)_v = f'(p) \cdot \varphi(v) \text{ und } \left(\frac{d\,T}{d\,v}\right)_p = f(p) \cdot \varphi'(v)$$

und

$$d\,Q = c \cdot f'(p) \cdot \varphi(v)\,dp + c'\,f(p) \cdot \varphi' v \cdot dv$$
$$= T\left(c \cdot \frac{f'(p) \cdot dp}{f(p)} + c' \cdot \frac{\varphi(v) \cdot d\,v}{\varphi(v)}\right).$$

Da jetzt c und c' nicht mehr von der Temperatur unabhängig sind, so läfst sich die Adiabate als Funktion von p und v nicht bestimmen. Will man innerhalb gewisser Strecken eine Constanz von c und c' annehmen, oder führt man statt der wahren Werthe, für solche Gebiete Durchschnittswerthe ein, so wäre

$$\xi = \log\,[f(p)^c \cdot \varphi(v)^{c'}].$$

Es gilt gegenwärtig allgemein die Annahme, der integrirende Divisor, den wir für alle Aggregatformen mit T bezeichnen, sey die absolute Temperatur. Von dieser Voraussetzung aus gilt jedenfalls allgemein für alle Körper die Gleichung

$$d\,Q = T \cdot d\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 12,$$

wo T die Temperatur, und ξ die Adiabate des Körpers genannt werden mufs. Beide Gröfsen sind *nur* für ideelle Gase *bekannte* Funktionen von p und v. Die Gleichung 12 ist in diesem Sinne schon von Rankine[1]) aufgestellt worden. Ebenso faſst Reech[2]) die Gröfse ξ (mit der Be-

1) *Philos. Trans.* 1854. *Vol.* 144 *Part. I, pag.* 126, *Phil. Mag.* (4) *XXXIX, pag.* 219.

2) *Liouville's Journ. de Mathm.* 1853, *Tom XVIII, pag.* 337 f. auch Cazin in *Ann. de chim. et de physique* (3) *T.* 62. *pag.* 262. Erst nach völligem Abschlusse meiner Abhandlung kam mir das treffliche „Handbuch der mechanischen Wärmetheorie" von Ch. Briot, deutsch von H. Weber, Leipzig 1871 in die Hände. In diesem Buche vermifst man bei durchgehender Klarheit der Anschauungen nur noch die Einführung des Namens der Adiabate, die unter dem Buchstaben μ auftritt.

Digitized by Google

zeichnung u) auf ohne ihr einen besonderen Namen zu ertheilen. Wesentlich von der Adiabate verschieden tritt diese Funktion unter dem Namen *Entropie* bei Clausius auf, worüber ich später zu discutiren haben werde.

Die partiellen Differentialquotienten von Q nach T, p und v erheischen stets zur Angabe eines bestimmten Werthes einen bestimmten Aenderungsweg. So kann der Werth von $\left(\frac{dQ}{dT}\right)$ zwischen $+$ und $-\infty$ liegen, es ist $\left(\frac{dQ}{dT}\right)_v = c$ und $\left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = c'$. Aehnlich, wenn man nach p und v die Differentialquotienten bildet. Anders mit ξ, denn unter allen Umständen ist $\frac{dQ}{d\xi} = T$, also blos von der Temperatur abhängig, für jedweden Aenderungsweg.

Die erste Hauptgleichung hat alle erdenkbaren Formen von Umwandlungen der Energie zu behandeln, und je nach den zu Grunde gelegten Hypothesen und Bedingungen werden sich für das Wärmeelement dQ andere Partial-Incremente einführen lassen.

II. a. Die zweite Hauptgleichung.

Die erste Hauptgleichung in jeder Form, und auch in ihrer einfachsten Gestalt

$$dQ = T\,d\xi$$

ist *nur auf der linken Seite integrabel*, sie bleibt rechts intact so lange der Aenderungsweg unbekannt. Durch Anwendung des integrirenden Divisiors T wird die Gleichung

$$\frac{dQ}{T} = d\xi \quad \ldots\ldots\ldots 13$$

rechts integrabel, aber links muſs sie gleichfalls intact bleiben. Das Symbol

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} = \xi_2 - \xi_1 \quad \ldots\ldots\ldots 14$$

besagt, *das Adiabatenwachsthum sey unabhängig vom Aenderungswege*. Dasselbe bestimmt aber noch nicht die bei

Digitized by Google

irgend einer diabatischen Aenderung zuzuführende Wärmemenge Q. — Die zweite Hauptgleichung 13. oder 14. besagt also sowohl etwas negatives, als auch etwas positives. Die positive Deutung liegt in der blofsen Abhängigkeit der Adiabatenwerthe vom Anfangs- und Endzustande, und nur in diesem Sinne verdient jene Gleichung den Namen einer zweiten Hauptgleichung. Als Corollar zum zweiten Hauptzatz folgt, dafs beim geschlossenen oder Kreisprocefs die Adiabate stets auf ihren Anfangswerthe zurückkehre.

Analog dem ersten, kann auch der zweite Hauptsatz durch andere Variable dargestellt werden. So finden wir aus den Gleichungen 8.:

$$\int_1^2 \frac{dQ}{v^{k-1}} = \frac{1}{R}\int e^{-\frac{\xi}{c}}.d\xi = \frac{c}{R}\left[e^{-\frac{\xi_2}{c}} - e^{-\frac{\xi_1}{c}}\right]$$

und

$$\int_1^2 \frac{dQ}{p^{k-1}} = \frac{1}{R}\int e^{-\frac{\xi}{c'}}d\xi = \frac{c'}{R}\left[e^{-\frac{\xi_2}{c'}} - e^{-\frac{\xi_1}{c'}}\right]$$

Allein auch für die Formen 7., 9. und 11., können integrirende Ausdrücke hergestellt werden. Man hat als solchen meist T allein betrachtet, und nur beiläufig findet man erwähnt[1]), dafs der allgemeinste Ausdruck

$$T.\varphi(\xi)$$

sey, wo φ eine willkürliche Funktion bedeutet. Sobald φ gegeben, kann indefs immer nur rechts die Integration ausgeführt werden. Unter allen willkürlichen Funktionen φ verdient für Gase *eine* besonders hervorgehoben zu werden wegen der zahlreichen Nutzanwendungen, das ist die Funktion

$$e^{-\frac{\xi}{\lambda}}$$

1) So z. B. bei Boltzmann, diese Ann. Bd. 143, S. 229 unten (auch Ch. Briot, „Lehrbuch der mechanischen Wärmetheorie," deutsch von H. Weber, 1847, S. 47).

Digitized by Google

so dafs als integrirenden Divisor

$$\left[T^{\lambda} e^{-\xi}\right]^{\frac{1}{\lambda}} \text{ oder } T \cdot e^{-\frac{\xi}{\lambda}},$$

auftritt. Dieser Werth in $p \alpha v$ ausgedrückt wird gleich

$$\left[p^m v^n\right]^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Setzt man $p^m v^n = W$, so ist

$$\frac{dQ}{W^{\frac{1}{\lambda}}} = \frac{1}{R}\left[\frac{c \cdot v\, dp}{p^{1-\frac{c}{\lambda}} v^{1-\frac{c'}{\lambda}}} + \frac{c' p\, dv}{p^{1-\frac{c}{\lambda}} v^{1-\frac{c}{\lambda}}}\right]$$

$$= \frac{1}{R} d\left[p^{\frac{c'}{\lambda}} \cdot v^{\frac{c'}{\lambda}}\right]$$

und analog

$$\int_1^2 \frac{dQ}{(T^{\lambda} \cdot e^{-\xi})^{\frac{1}{\lambda}}} = \lambda \left[e^{-\frac{\xi_2}{\lambda}} - e^{-\frac{\xi_1}{\lambda}}\right].$$

Die bekannte Bedingungsgleichung der Integrabilität, oder richtiger die Bedingungsgleichung für den integrirenden Ausdruck S lautet

$$-S = X\left(\frac{dS}{dv}\right) - Y\left(\frac{dS}{dv}\right).$$

Setzt man die für Gase geltenden Werthe von X und Y ein, so wird vorstehende Gleichung befriedigt für $S = W^{\frac{1}{\lambda}}$.

Man hat S als Variable in die erste Hauptgleichung eingeführt und Relationen erhalten, die zweckmäfsig zu verwerthen sind, wenn der Aenderungsweg $S = \text{const.}$ gegeben ist. Viel allgemeiner anwendbar erscheint die erste Hauptgleichung, wenn unter S nicht blos die Tem-

Digitized by Google

peratur verstanden wird. Führen wir W als Variable ein, so wird

$$\left.\begin{aligned} dQ &= A\,(X\,dp + Y\,dv) \\ \text{aber auch} \\ dQ &= \frac{A}{\left(\frac{dW}{dv}\right)}\,(X\,dW + \lambda\,W\,dv) \\ \text{und} \\ dQ &= \frac{A}{\left(\frac{dW}{dv}\right)}\,(Y\,dW - \lambda\,W\,dp) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ 15,$$

welche Formeln für jedes gegebene constante λ brauchbar sind, da alsdann $dW = 0$ und $W = \text{const.}$ ist. Der Specialfall $\lambda = \infty$ giebt die gewöhnliche Form.

Während die erste Hauptgleichung die Constanz der Energie in mannigfachen Formen behandelt, stellt die zweite Hauptgleichung die Adiabate als Eigenschaft des Körpers dar und die Combination ihrer verschiedenen Formen weist nach, *aus welchen Incrementen das gesammte Wachsthum der Adiabate zusammengesetzt werden könne.* So erhält man für Gase:

$$\left.\begin{aligned} d\xi &= c\,\frac{dp}{p} + c'\,\frac{dv}{v} \\ &= c\,\frac{dT}{T} + A\,R\,\frac{dv}{v} \\ &= c'\,\frac{dT}{T} - A\,R\,\frac{dp}{p} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ 16.$$

Die Integration dieser Gleichungen ist unabhängig vom Aenderungswege. Sie führt zu den verschiedenen schon oben bei der Einführung der Adiabate erläuterten Formen von ξ als Funktion zweier der drei Gröfsen T, p und v.

Unter den Partialincrementen der Adiabate befindet sich eines, dem Clausius besondere Aufmerksamkeit widmete. Er setzt

$$AR\,\frac{dv}{v} = dZ$$

Digitized by Google

und nennt Z die *Disgregation* des Körpers. Bei Gasen, wo es kein Ergal der Molecularkräfte giebt, hängt die Disgregation nur vom specifischen Volumen ab, das heifst

$$Z = \varphi(v) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 17,$$

denn unter allen Variablen, die die Disgregation darzustellen vermögen, ist v allein so beschaffen, dafs die Zunahme von v von dem Wachsthum von v allein abhängt. Mit anderen Worten: Z kann stets durch irgend zwei der Veränderlichen T, ξ, p, v dargestellt werden, wenn aber unter diesen v sich befindet, so ist der Coëfficient des anderen Incrementes = Null. In diesem Sinne aber bezieht sich 17, nur auf die äufsere Disgregation, und weil bei der Definition von Z für Gase nur die geleistete äufsere Arbeit in's Auge gefafst wird, so konnte nur die zweite der Gleichungen 16. und nicht die erste als Ausgangspunkt gelten[1]).

Die partiellen Differentialquotienten von ξ gewinnen besonders einfache Gestalt, wenn durchweg logarithmische Variable eingeführt werden. Setzen wir

$$\log p = \pi$$
$$\log v = \nu$$
$$\log T = \Theta$$

so wird für ideelle Gase

$$\left.\begin{array}{ll} \left(\frac{d\xi}{d\Theta}\right)_\pi = c' & \text{und } \left(\frac{d\xi}{d\nu}\right)_\pi = c' \\ \left(\frac{d\xi}{d\pi}\right)_\nu = c & \text{und } \left(\frac{d\xi}{d\Theta}\right)_\nu = c \\ \left(\frac{d\xi}{d\nu}\right)_\Theta = c' - c & \text{und } \left(\frac{d\xi}{d\pi}\right)_\Theta = -(c' - c) \end{array}\right\} 18.$$

1) Ist mit der Temperaturerhöhung bei constantem Volumen eine innere Arbeitsleistung in Ueberwindung von Molecularkräften verbunden, so besteht dieser entsprechend eine Disgregation, die man die *innere Disgregation* nennen könnte. Sei diese Z_i, die äufsere Z_a, so wäre stets $dZ = dZ_i + dZ_a$. Während Z_a eine Funktion des Körpervolumens, so wäre Z_i eine Funktion des Molecularvolumens, welch letzteres je nach den Hypothesen, anders zu fassen und bei Molecularkräften als Funktion der Molecularentfernungen zu denken wäre. Beim Schmelzen des Eises wäre dZ positiv, dZ_a negativ, dagegen dZ_i positiv und absolut gröfser als dZ_a.

Digitized by Google

Für Körper aller Aggregatformen wird, so lange letztere sich nicht ändert:

$$\left(\frac{d\xi}{dT}\right)_p = \frac{c'}{T} \quad ; \left(\frac{d\xi}{dv}\right)_p = \frac{c'}{T}\left(\frac{dT}{dv}\right)_p$$

$$\left(\frac{d\xi}{dp}\right)_v = \frac{c}{T}\left(\frac{dT}{dp}\right)_v ; \left(\frac{d\xi}{dT}\right)_v = \frac{c}{T}$$

$$\left(\frac{d\xi}{dv}\right)_T = A\left(\frac{dp}{dT}\right)_v ; \left(\frac{d\xi}{dp}\right)_T = -A\left(\frac{dv}{dT}\right)_p .$$

An diese Formen können viele andere angeschlossen werden in der Weise, wie es Clausius[1]) gethan hat, indem er nach Kirchhoff's[2]) Vorgang zwei beliebige Veränderliche x und y einführte, und denselben nachher Werthe ertheilte. Neben p, v und T kann auch die Adiabate ξ eingesetzt werden. Nur noch auf eine sehr einfache Relation, die für Gase gilt, möchte ich hinweisen. Es wird die, von Clausius eigenthümlicher Weise mit „Werkdifferenz" bezeichnete Gröſse $E_{\xi, T}$; sowie $E_{p, v}$ folgende Gestalt erhalten:

$$\left.\begin{aligned} E_{v,p} &= \frac{d\xi}{dv}\cdot\frac{dT}{dp} - \frac{d\xi}{dp}\cdot\frac{dT}{dv} = A \\ \text{und } E_{\xi,T} &= \frac{dv}{d\xi}\cdot\frac{dp}{dT} - \frac{dv}{dT}\cdot\frac{dp}{d\xi} = \frac{1}{A} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 19.$$

In Worten: Betrachtet man ξ und T als Functionen von v und p, so ist die Functionaldeterminante von Adiabate und Temperatur nach Volumen und Druck gleich dem Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit und wiederum wenn v und p Functionen von ξ und T, so ist die Functionaldeterminante von Volumen und Druck nach Adiabate und Temperatur gleich dem Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit.

Die Differentialgleichungen der Adiabate lehren uns folgende Eigenschaften dieser Gröſse kennen:

Da bei constanter Adiabate $dQ = 0$, so gehören zunächst alle Zustände eines Körpers, in die er ohne Zu- und Abfuhr von Wärme gelangen kann, zu derselben

1) Clausius: Gesammelte Abhandl. Bd. II, S. 45 ff.

2) Pogg. Ann. Bd. 103.

Digitized by Google

Adiabate. Ist diese constant, so sind alle Veränderungen auf einen Umsatz von äuſserer potentieller Energie in innere Energie und umgekehrt beschränkt. *Sofern durch Einschränkung des Körpervolumens innere Energie gewirkt wird*, die als Wärme dem Körper entzogen werden könnte, kann man jene *äufsere* potentielle Energie als *potentielle Wärme des Körpers auffassen.* Actuell wird letztere erst dann, wenn eine Compression *wirklich* statt hat. Unter einem bald zu erwähnenden Vorbehalt kann man also sagen: Die Adiabate ist constant, *so lange die Summe der actuellen und potentiellen Wärme des Körpers constant ist.* — In der That hat jeder Körper eine Beziehung zur Aufsenwelt, gegen welches er begrenzt seyn mufs. Je gröfser *sein* Volumen, um so mehr mufs die Aufsenwelt zurückgedrängt seyn und umgekehrt. Bei gröfserem Volumen hat der Körper eine höhere Adiabate bei sonst gleichen Verhältnissen. In der Aufsenwelt, die zurückgedrängt worden ist, ist die während der Expansion verwirkte Energie zu suchen bei *gleichbleibender Adiabate* des Körpers, — hat die Aufsenwelt Arbeit verwirkt, so speichert *bei kleinerem Volumen* die gewirkte innere Energie in Form von Wärme, potentiell oder actuell, sich auf bei *constanter Adiabate.*

Um die Anwendbarkeit des Begriffes der Adiabate zu erläutern, mögen hier einige einfache Beispiele aus der Experimentalphysik kurz erwähnt werden:

Es erheischt die Erhaltung einer beständigen Temperatur oft besondere Vorsicht. Meist aber ist es schwieriger, die Adiabate constant zu erhalten. Zahlreiche Versuche bedürfen einer Correction wegen der schwer zu vermeidenden Adiabatenänderung. Das Mariotte'sche Gesetz gilt, wenn die Temperatur des comprimirten Gases constant gehalten wird. Ein Vorlesungsapparat wäre defect zu nennen, wenn eine Vorrichtung zur Entziehung der Wärme fehlte. In anderen Fällen kommt die Variabilität der Adiabate in Betracht. Industrielles Interesse knüpft sich an möglichst grofse Wirkungsfähigkeit oder

Digitized by Google

präciser gesprochen an hohe Adiabatenwerthe bei möglichst kleinem Volumen und wohl auch anfänglich niedriger Temperatur. Dieser paradox erscheinenden Combination genügen wohl nur chemisch-affine Substanzen. Hat man die Verbrennungswärme der Kohle auf ein eingeschlossenes Gas übertragen, so ist des letzteren Adiabate hierdurch gewachsen, aber nach der Expansion oder Arbeitsverrichtung verläfst das Gas bei hohem Adiabatenwerthe die Maschine.

Gleich wie die Temperatur, so kann auch die Adiabate eine Function der Raumcoordinaten des Körpers seyn. Doch spricht man von einer Durchschnittstemperatur nur, wenn der Körpercomplex homogen geartet ist. Ganz analog liefse sich von einer Durchschnittsadiabate sprechen, und setzen:

$$Z = \frac{\int \xi . dm}{\int dm}$$

Dieser Werth aber wäre nicht identisch mit demjenigen Adiabatenwerthe, der nach Ausgleichung der Temperatur eingetreten wäre, wie auch die bezügliche Endtemperatur nur bei constanter specifischer Wärme sich mit jener Durchschnittstemperatur decken würde. Besser scheint es, jenen Werth, der nach Ausgleichung aller Unterschiede eintritt, als Adiabate des Körpercomplexes zu bezeichnen. In welchem Sinne einem Complexe heterogener Substanzen ein Adiabatenwerth zugesprochen werden kann, wird später erörtert werden.

Obwohl die hier herangezogenen Beispiele Jedermann geläufig sind, so werden die Meinungen der Physiker doch darüber vielleicht differiren, ob die Einführung der Adiabate nothwendig sey. Ich will indefs hier nur noch anführen, dafs, wie ich glaube, man in Rankine's thermodynamischer Function, in Reech's und Cazin's Function u, in Clausius Entropie und in Zeuner's Wärmegewicht nicht dasselbe verstanden und dargestellt hat, was

Digitized by Google

uns hier als Adiabate des Körpers entgegentritt. Indefs wird die aufgestellte Definition eine wesentliche Ergänzung erhalten bei der Behandlung der nicht umkehrbaren Processe.

III. a. Die dritte Hauptgleichung.

Die beiderseitige Integration der beiden Hauptgleichungen wird erst dann ausführbar, wenn der Aenderungsweg gegeben. Mit anderen Worten, es läfst sich Q nicht eher als Function von einer der vier Veränderlichen T, ξ, p und v darstellen, als bis jener Weg, und aufserdem noch die Coordinatenwerthe eines Anfangszustandes vorgeschrieben sind.

Dieser Weg kann gegeben werden durch die specifische Wärme, etwa durch

$$\lambda = \varphi(T) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 20$$

oder $\lambda = \psi(\xi)$ u. a.

Man könnte alsdann mit Hülfe der allgemein gültigen Gleichung

$$\lambda = T \cdot \frac{d\xi}{dT} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 21$$

durch Integration den Weg in ξ und $T =$ Coordination finden und zur Zurückführung in p und v gelten für Gase die Formeln

$$\left.\begin{aligned} v^{AR} &= T^{-c} e^{\xi} \\ p^{-AR} &= T^{-c'} e^{\xi} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 22.$$

Nur wenn $\lambda =$ const. vorgeschrieben ist, gilt für den Weg die Form

$$T^{\lambda} e^{-\xi} = \text{const.}$$

Je nach dem Wege sind andere integrirende Ausdrücke mit Vortheil anzuwenden:

Für isothermen Weg gilt

Digitized by Google

$$\int \frac{dQ}{T} = \frac{Q}{T} = \xi_2 - \xi_1$$

bei const. Vol.:

$$\frac{Q}{v^{\frac{1}{1-k}}} = \frac{c}{R}\left(e^{-\frac{\xi_2}{c}} - e^{-\frac{\xi_1}{c}}\right)$$

bei const. Druck:

$$\frac{Q}{p^{\frac{1}{k-1}}} = \frac{c'}{R}\left(e^{-\frac{\xi_2}{c}} - e^{-\frac{\xi_1}{c}}\right) \quad \ldots 23.$$

Alle diese speciellen Fälle sind enthalten in der allgemeineren Integration für irgend ein constantes λ, da

$$\int \frac{dQ}{(T^{\lambda}{}_{e} - \xi)^{\frac{1}{\lambda}}} = \int e^{\frac{\xi}{\lambda}} . d\xi,$$

woraus[1])

1) Das zuerst von Rankine eingeschlagene Verfahren, diese Integration unmittelbar aus der zwiefach ∞ kleinen Arbeitsfläche zwischen Isothermen und Adiabaten abzuleiten, ist leicht auf diabatische Wege auszudehnen. Für Gase läfst sich ganz analog dem Zeuner'schen Beweise und seinen Bezeichnungen gemäfs, wenn man statt auf Wegen $S =$ const. vielmehr $W =$ const. setzt, für jene ∞ kleine Arbeit schreiben:

$$d^2 F = dv' . dp' = \frac{dW . dQ}{A\left[y\left(\frac{dW}{dp}\right) - x\left(\frac{dW}{dv}\right)\right]} = \frac{R . dW . dQ}{c' . p\left(\frac{dW}{dp}\right) - c . v\left(\frac{dW}{dv}\right)}$$

$$= \frac{R . dW . dQ}{(c'm - c . n) W} = \frac{dW . dQ}{A . \lambda . W}$$

folglich da λ const.,

$$A . dF = \frac{dW}{\lambda . W} . Q,$$

aber

$$A\, dF = \delta Q$$

folglich

$$\frac{\delta Q}{Q} = \frac{\delta W}{\lambda . W}$$

und

$$\frac{Q}{W^{\frac{1}{\lambda}}} = \text{const.}$$

(cf. Zeuner, l. c. S. 58).

Digitized by Google

$$\frac{Q}{W^{\frac{1}{\lambda}}} = \lambda \left[e^{\frac{\xi_2}{\lambda}} - e^{\frac{\xi_1}{\lambda}} \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 24.$$

Ist λ nicht constant, so bleibt doch $W^{\frac{1}{\lambda}}$ integrirender Divisor d. h. die rechte Seite wäre integrabel, allein links ist keine Integration auszuführen. Stets wird, auch wenn der Weg gegeben ist, auf die erste Hauptgleichung zurückgegangen werden müssen, um Q darzustellen. Aufgabe ist es nicht so sehr Q für den geschlossenen Proceſs, als vielmehr für irgend eine Wegstrecke darzustellen. Das Ergebniſs für den geschlossenen Proceſs wird dann ein stets wichtiges Corollar abgeben.

Von allen Arten den Weg zu bezeichnen, scheint *eine* besonders beachtenswerth, das ist

$$Q = \varphi(\xi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 25,$$

wo φ eine willkürliche Funktion bezeichnet. Aus Vorstehendem folgt

$$\frac{dQ}{d\xi} = \varphi'(\xi) = T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 26,$$

und Gleichung 26. giebt den Aenderungsweg in T und ξ. Umgekehrt könnte 26. als gegeben betrachtet werden und die Integration von 26., nachdem für T der Werth $\frac{dQ}{d\xi}$ eingesetzt worden, ergäbe 25. als Resultat. Schreiben wir die *erste Hauptgleichung* in einfachster Form:

I. . . . . $dQ = T d\xi$

so fand das vollständige Differential von ξ Ausdruck in der *zweiten Hauptgleichung*:

II. . . . . $\frac{dQ}{T} = d\xi.$

Erst der Aenderungsweg ermöglicht die Integration und die Gleichung

III. . . . . $Q = \varphi(\xi)$

Digitized by Google

verdiente den Namen der *dritten Hauptgleichung*. Es kann nämlich, wie erläutert, diese Gleichung als Weg gefafst werden, allein durch Einführung der Adiabate gestattet sie eine tiefere Auffassung, besonders so lange φ noch ganz unbestimmt gelassen wird: Von allen denkbaren Variablen, von denen Q abhängig gedacht werden kann, hat die Adiabate ξ allein die Eigenschaft, dafs das Wachsthum von Q durch das Wachsthum von ξ allein ausgedrückt wird, während in allen anderen Fällen dQ durch die Summe zweier Incremente allgemein dargestellt wird. Mit anderen Worten: *Wird dQ durch zwei Incremente der Variablen y und z dargestellt, so ist, sobald für die eine der letzteren die Adiabate ξ gewählt ist, der Coëfficient des anderen Incrementes gleich Null.*

Gegen den Einwand, es erscheine überflüssig für eine Beziehung, die fast unmittelbar aus der ersten und zweiten Hauptgleichung gefolgert werde, eine besondere Benennung zu haben, bemerke ich, dafs es ebenso nahe läge, der zweiten Hauptgleichung eine besondere Stellung zu versagen. Andrerseits hat man das Resultat der Integration meist mit der zweiten Hauptgleichung unmittelbar in Verbindung gebracht. Mir scheint es nicht ganz unwesentlich, dafs die dritte Hauptgleichung eigentlich nur aus der ersten hervorgeht, und in der zweiten Hauptgleichung vermag ich nur Eigenschaften der Körper in Bezug auf ihre Adiabate zu erblicken[1]).

An die Gleichung 24. schliefst sich unmittelbar die Betrachtung des Kreisprocesses an. Seyen zwei Wegstrecken adiabatisch, zwei andere beliebig diabatisch mit der gegebenen specifischen Wärme λ, und seyen

$$T^{\lambda} \cdot e^{-\xi} = W_1 \text{ und } T^{\lambda} \cdot e^{-\xi} = W_2$$

1) Ich darf nicht unerwähnt lassen, dafs ich den Namen der „dritten Hauptgleichung" für die Gleichung 25. von meinem hochgeehrten Lehrer und Collegen, Prof. F. Minding, habe, der mir in seinen Notizen über mechanische Wärmetheorie die genannte Gleichung unter *diesem Namen* aufwies. —

Digitized by Google

die beiden diabatischen Wege. Heiſse die zugeführte Wärme Q_1, die abgeführte Q_2, so ist, wenn die Indices 1 bis 4 die entsprechenden Eckpunkte bezeichnen,

$$\frac{Q_1}{W_1^{\frac{1}{\lambda}}} = \frac{Q_2}{W_2^{\frac{1}{\lambda}}} = \lambda\left(e^{\frac{\xi_2}{\lambda}} - e^{\frac{\xi_3}{\lambda}}\right) = \lambda\left(e^{\frac{\xi_1}{\lambda}} - e^{\frac{\xi_4}{\lambda}}\right)$$

und die Arbeit

$$AL = Q_1 - Q_2 = Q_2 \frac{W_1^{\frac{1}{\lambda}} - W_2^{\frac{1}{\lambda}}}{W_2^{\frac{1}{\lambda}}} \quad \ldots\ldots\ldots 27.$$

Diese Gleichung geht im speciellen Falle $\lambda = \infty$ über in die bekannte:

$$AL = Q_2 . \frac{T_1 - T_2}{T_2} \quad \ldots\ldots\ldots 28.$$

Hier sind die diabatischen Wege zugleich isotherm. In einem anderen Sinne gilt die vorstehende Gleichung auch wenn die diabatischen Wege nicht isotherm sind. Alsdann entsprechen den vier Eckpunkten des Processes vier Temperaturwerthe, die mit entsprechenden Indexziffern bezeichnet werden können. Man hat dann

$$AL = Q_2 \frac{W_1^{\frac{1}{\lambda}} - W_2^{\frac{1}{\lambda}}}{W_2^{\frac{1}{\lambda}}} = \frac{T_1 e^{-\frac{\xi_1}{\lambda}} - T_4 e^{-\frac{\xi_4}{\lambda}}}{T_4 . e^{-\frac{\xi_4}{\lambda}}}$$

$$= \frac{T_2 e^{-\frac{\xi_2}{\lambda}} - T_3 e^{-\frac{\xi_3}{\lambda}}}{T_3 . e^{-\frac{\xi_3}{\lambda}}} = \frac{T_1 - T_4}{T_4} = \frac{T_2 - T_3}{T_3}$$

Digitized by Google

wenn $\xi_1 = \xi_4$ und $\xi_2 = \xi_3$, d. h. wenn zwei Wege adiabatisch sind [1]).

Specielle Fälle von Gleichung 27, für $\lambda = c$ und resp. $= c_1$ entsprechend den Gleichungen 23 führen direct zu:

$$A\,L = Q\left\{\frac{{v_1}^{1-k} - {v_2}^{1-k}}{{v_2}^{1-k}}\right\}$$

und für die Arbeit zwischen adiabatischen Curven und Wegen constanten Druckes:

$$A\,L = Q\left\{\frac{{p_1}^{k-1} - {p_2}^{k-1}}{{p_2}^{k-1}}\right\}.$$

Man hat oft den zweiten Hauptsatz mit der Gleichung 28. identificirt. Allein bei dieser Gleichung handelt es sich stets nur um ein Corollar zum dritten Hauptsatz, sobald die Arbeitsgröfse ermittelt werden soll, während als Corollar zum zweiten Hauptsatze die Wiederkehr des Anfangswerthes der Adiabate gefolgert werden kann. Wie oben erläutert, ist weder die erste, noch die zweite Hauptgleichung integrabel.

Bei umkehrbaren Processen wird stets angenommen, es stamme die zugeführte Wärme aus einem Reservoir, dessen Temperatur nur unendlich wenig die des vermittelnden Körpers überrage. Für die physische Möglichkeit der Umkehrung ist dies auch ganz richtig, allein für die Bedeutung der Hauptgleichungen ist jene Bedingung irrelevant, denn mit diesen wird *nur* der Zustand des ver-

1) cf. Zeuner l. c. S. 209. Die von Zeuner aufgestellte Analogie zwischen Temperaturen und Fallhöhen, müfste hier durch ähnliche Schlufsfolgerungen auf eine Analogie zwischen Fallhöhen und Ausdrücken $W^{\frac{1}{\lambda}}$ führen. Eine Analogie in Bezug auf die *wesentlichen* Eigenschaften einer Gröfse wird aber *nie* aus einem *Verhältnifs* $h : h_1 = W_1^{\frac{1}{\lambda}} : W_2^{\frac{1}{\lambda}}$ gefolgert werden dürfen.

Digitized by Google

mittelnden Körpers definirt, und sie sagen nichts aus über die Reservoire. Je nach der Masse der letzteren kann das Verhalten ein sehr verschiedenes seyn. Es habe beispielsweise das eine gasförmige Reservoir m_1, die Temperatur T_1 und die Adiabate heifse ξ_1, das andere Reservoir habe den Index 2, ferner sey $T_1 > T_2$. Wenn dQ von dem Reservoir 1 zu dem Körper 2 übergeht, so ist:

$$dQ = m_1 T_1 d\xi_1 = -m_2 T_2 d\xi_2$$

und

$$\left.\begin{aligned} \xi'_1 - \xi_1{}^0 &= -\int_0^1 \frac{dQ}{m_1 T_1} \\ \text{während} \\ \xi'_2 - \xi^0{}_2 &= \int \frac{dT}{m_2 T_2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 29,$$

und diese beiden Adiabatenänderungen können sehr verschieden seyn, selbst dann wenn T_1 und T_2 nur unendlich wenig differiren, denn je gröfser die Masse, um so geringer die Adiabatenänderung bei gleicher Wärmezufuhr. Sey $m_1 = m_2$ und schliefslich durch Wärmeleitung $T'_1 = T'_2$ geworden. Seyen auch die specifischen Volumina einander gleich, dann ist

$$T^0{}_1 - T'_1 = T'_2 - T'_0 = \frac{(p'^0 - p'_1)\,v}{R} = \frac{(p'_2 - p^0{}_2)\,v}{R}$$

aber

$$\left.\begin{aligned} \xi^0{}_1 - \xi'_1 &= c \log \frac{p^0{}_1}{p'_1} \\ \text{und} \\ \xi'_2 - \xi^0{}_2 &= c \log \frac{p_2{}'}{p^0{}_2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 30,$$

und die beiden letzten Werthe sind einander nicht gleich. Daraus folgt nur, dafs bei der Wärmeleitung die Adiabatenänderungen in entgegengesetztem Sinne geschehen, im Allgemeinen aber verschieden grofs sind selbst bei gleich grofsen einander homogenen Massen. Auf diesen Gegenstand kommen wir später zurück.

Digitized by Google

B. Der nicht umkehrbare Processs.

1b. Die erste Hauptgleichung.

Nicht umkehrbare Processe sind in mannigfacher Art denkbar. Wir beschränken uns zunächst auf den einfachsten Fall der Zustandsänderung eines Körpers während einer Expansion, wobei der äufsere Druck π von dem inneren Druck p um ein Endliches differire. Die erste Hauptgleichung heifst alsdann:

$$\text{I.} \quad dQ + A(p - \pi)\,dv = T.d\xi \quad . \quad . \quad . \quad 30.$$

Ein passendes Beispiel bietet der viel besprochene Gay-Lussac'sche Versuch dar, bei welchem ein Gas ohne Wärmezufuhr in ein Vacuum einströmt. Bekanntlich bleibt hierbei die Temperatur constant, wenn Ruhe wieder eingetreten. Es zeigt sich aber, dafs, obwohl Wärme weder zu- noch abgeführt worden, die Adiabate ξ gestiegen ist und zwar um denselben Betrag, *wie wenn eine Expansion in umkehrbarer Weise durch Wärmezufuhr bei constanter Temperatur bewirkt worden wäre.* Ein Blick auf vorstehende Gleichung I kann zwar von der Wahrheit dieser Behauptung überzeugen, allein in den bisher gegebenen Darstellungen findet man meist abweichende Meinungen, und ich vermag das Zeugnifs nur weniger Physiker als ein beistimmendes anzuführen. Die Erörterung des Verhaltens der Adiabate gehört indefs in die Betrachtung der zweiten Hauptgleichung, wo die bezügliche Discussion uns wesentlich erleichtert wird, wenn wir hier die Bedeutung der ersten Hauptgleichung verfolgen.

Denken wir uns die Gewichtseinheit eines Gases in einem Raume A, durch einen verschliefsbaren Hahn mit einem Vacuum B verbunden. Nach hergestellter Communication tritt die Expansion ein, es verwirkt das Gas eine Arbeit, die beim umkehrbaren Processe der Aufsenwelt zu Gut käme. Hier wo der äufsere Druck $\pi = o$ gesetzt worden, wird statt äufserer potentieller, vielmehr *innere actuelle Energie* erzeugt, und zwar *zunächst actuelle Ener-*

Digitized by Google

gie im dynamischen Sinne des Wortes. Diese actuelle dynamische Energie setzt sich in *thermische actuelle Energie* um, d. h. in Wärme. Eine solche Umwandlung ist *für das Verhalten des betrachteten Körpers* äquivalent einer Wärmezufuhr von Aufsen, daher die Adiabate des Gases wächst als wäre jene der verwirkten Arbeit entstammende Wärmemenge von Aufsen zugeführt worden. Betrachten wir nämlich ein Gas im Zustande der Ruhe. Ob wir durch irgend welche Hülfsmittel dieses Gas in Bewegung versetzen, und dann abwarten, bis die letztere sich in Wärme umgewandelt, oder ob wir sofort Wärme zuführen, der Endzustand ist derselbe, wenn nur äquivalente Mengen von Energie dem Gase zu Gute kommen. Nach adiabat umkehrbarer Expansion haben p, v und T gewisse Werthe und die Gasmasse ist in Ruhe; beim nicht umkehrbaren Proceſs kann man sagen, der Endzustand (p, v und T) sey derselbe, aber das Gas ist bewegt. Bedingung für *die Constanz* der Adiabate ist, daſs bei jeder Expansion *die verwirkte Arbeit als gewirkte Energie nach Aufsen trete.* Im nicht umkehrbaren Proceſs tritt aber die Wirkung zunächst als dynamische Energie *im Körper* auf und früher oder später, als thermische. Auch leuchtet ein, daſs dem Gase im Endzustande des Processes sich eine gröſsere Wärmemenge abgewinnen läſst als mit demselben Gase am Anfange des Processes, wenn in beiden Fällen derselbe neue Endzustand durch Compression erzielt wird.

Je nach der zu Grunde gelegten Hypothese wird der Vorgang anders verstanden werden. Wenn der innere Druck elastischen Kräften zugeschrieben wird, so ist die Erzeugung von dynamischer actueller Energie unmittelbar zu fassen. Schwieriger wird die Erklärung nach der neuen Gastheorie. Auf die Nothwendigkeit einer Sonderung der thermischen und dynamischen Bewegung hat schon Jochmann[1]) hingewiesen, indem er zeigte, wie

1) Jochmann, Theorie der Gase. Auch in Schlömilch's Ztsch. f. Mathm. u. Ph. Jahrg. V, S. 129 ff. Vergl. auch R. Rühlmann „Handb. d. mech. Wärmetheorie" 1873, S. 163 No. 25.

Digitized by Google

die gesammte actuelle Energie unmöglich die Temperatur bestimmen könne. In einer Gasmasse ist zu unterscheiden, ob in jedem Querschnitt die gleiche Anzahl von Molecülen nach entgegengesetzten Richtungen sich bewege, und ferner ob die Durchschnittsgeschwindigkeiten der nach den entgegengesetzten Seiten fortschreitenden Theilchen gleich oder verschieden seyen. Betrachten wir einen solchen Querschnitt beliebiger Gröfse, und bilden für einen gewissen Zeitmoment den Durchschnittswerth der Geschwindigkeitscomponenten nach einer Richtung, wobei wir die positiven Werthe von den negativen trennen. Im Allgemeinen werden diese beiden Durchschnittswerthe verschieden seyn. Nennen wir sie v_x und v_{-x} und setzen

$$v_x = v_\delta + v_t$$
$$v_{-x} = v_\delta - v_t$$

so entspricht

$$v_\delta = \frac{v_x + v_{-x}}{2}$$

der dynamischen Bewegung und

$$v_t = \frac{v_x - v_{-x}}{2}$$

der thermischen Bewegung.

Dieses gilt, wenn die Anzahl der nach entgegengesetzter Richtung fortschreitenden Molecüle gleich grofs; sonst tritt neben der dynamischen Bewegung noch Wärmeleitung oder Schallfortpflanzung ein[1]). Eine Umwandlung von dynamischer Energie in thermische wird durch jeden Widerstand hervorgerufen. In Fällen, wo die dynamische Bewegung nicht verändert wird (wie bei kosmischen Bewegungen), kann dieselbe selbstverständlich so lange unbeachtet bleiben (wenn nicht etwa Meteorite betrachtet werden).

Obwohl Jochmann auf den hier angedeuteten Unterschied hinwies, bezeichnete es denselben doch als Argu-

1) cf. Stefan in Schlömilch's Ztsch. für Mathem. und Phys. Jahrgang 8, Seite 360.

Digitized by Google

Bis zu dem Momente, wo dieser Werth T eingetreten, wäre nun beim nicht umkehrbaren Proceſs eine der Gröſse $(T_1 - T)$ proportionale Wärmemenge in dynamische Energie übergegangen.

Eine strenge, auf einen ähnlichen Vorgang bezogene Analyse gab Maxwell[1]) schon im Jahre 1860, und ähnliche Untersuchungen werden den Ausgangspunkt einer Gastheorie bilden. Auch wird von ihm die hydrodynamische Grundgleichung in dem oben angedeuteten Sinne aufgestellt, obwohl Maxwell nicht genauer unterscheidet, welcher Ersatz nach der neuen Theorie für den Ausdruck der Beschleunigung statuirt werden muſs[2]).

Von ganz anderen Gesichtspunkten hat Eibel[3]) in einem, leider sehr kurz gefaſsten Artikel die Unterscheidung von thermischer und dynamischer Energie beleuchtet und davon abhängig gemacht, ob in den Zustandsgleichungen die Zeit maaſsgebend erscheine, d. h. ob die Parameter der Molecularbahnen veränderlich seyen oder beständige Durchschnittswerthe besäſsen. Auch verweise ich auf eine hiermit im Zusammenhange stehende Arbeit von Most[4]) hin.

1) *Philos. Mag.* (4) *XIX, p.* 19 und *XX, p.* 21, *XXXV, p.* 129 und besonders S. 185 ff.

2) Fortschritte der Physik vom Jahre 1860 S. 323.

3) Schlömilch, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Jahrgang XIII, S. 491. „Das Potential einer Gasmasse auf sich selbst ist bei einem nicht umkehrbaren (Kreis-) Processe nicht mehr constant, sondern eine Funktion der Zeit, wodurch es eine fortschreitende Bewegung involvirt, die sehr gut von der Wärmebewegung zu trennen ist, wie auch die fortschreitende Bewegung in einer Cycloide von der wälzenden unterschieden werden kann.“

4) Diese Ann. Bd. 138 S. 569: „Bei einem nicht umkehrbaren Procefs ist ein Theil der positiven Wärme nicht zugeleitet, sondern durch Arbeit hervorgerufen.“ Ich möchte Hrn. Boltzmann widersprechen, der diesen Satz für völlig unverständlich erklärt (d. Ann. Bd. 140, S. 641). Auch die Ueberführung der von Most eingeführten Wärmegewichte ν und μ in einander kann in dem Sinne der oben erläuterten Umwandlungen umgedeutet werden. Vergl. auch Reech in Liouville l. c. S. 428 u. ff.

Digitized by Google

Von den gestellten Bedingungen hängt es ab, wann wo und ob überhaupt dynamische Energie in thermische sich wieder umsetzt. Im Gay-Lussac'schen Versuche kommt bei dieser Umwandlung die Wärme zum Theile den Wandungen zu. Da diese zur Aufsenwelt gerechnet werden können, so mufs von hier aus die Wärme wieder zum Gase zurückkehren, wenn man die anfängliche Temperatur wiedererhalten soll.

Thermische Energie läfst sich in dynamische wohl nur durch Aenderung des äufseren Druckes umwandeln bei gestatteter Expansion. Bei der Schallbewegung ist die Dichtigkeit eine Function der Raumcoordinaten, während in einer bewegten Masse mit gleichförmiger Dichtigkeit überall keine Schallbewegung existirt. Auch Schallbewegung geht leicht in Wärme über, während nur durch Volumänderung die umgekehrte Umwandlung erwirkt wird.

Auf alle Arten nicht umkehrbarer Processe wäre die Deutung der ersten Hauptgleichung auszudehnen [1]). In der hier vorgenommenen Einschränkung haben wir in

$$dQ + [A(p - \pi)\,dv], = dU + Apdv$$

rechts in dU die Zunahme der inneren Wärme und in $Apdv$ die vom Gase während der Expansion verwirkte Arbeit, links den Zuwachs an Wärme zu sehen, und zwar stammt dQ von aufsen her und die Wärme $A(p-\pi)\,dv$ ist durch gestattete Expansion erwirkt. Diese Wärme und die nach aufsen abgegebene Arbeit $A.\pi.dv$ zusammen sind gleich der verwirkten Arbeit $A.p.dv$.

II. b. Die zweite Hauptgleichung.

Die erste Hauptgleichung in der Form 30 lehrte, dafs T nach wie vor integrirender Divisor sey, daher wird auch jetzt die zweite Hauptgleichung lauten:

1) Vgl. Rankine in *Philos. Transact. l. c. pag.* 126, Gl. 6, wo die Function ψ definirt wird und S. 131, Gleichung 17 *a*, ferner *Philos. Mag.* (4) *XL, pag.* 290. Die in diesem Bande sich fortziehende Discussion zwischen Heath und Rankine betrifft nur beiläufig die vorliegende Frage, denn Heath läugnet die Verwirkung von Arbeit bei der Expansion eines Gases.

Digitized by Google

$$\frac{dQ}{T} + \frac{A(p-\pi)}{T} \cdot dv = d\xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 31.$$

Sie besagt auch jetzt in positivem Sinne nur, dafs die Adiabate unabhängig vom Wege, nur vom Anfangs- und Endwerthe abhänge. Auch in 31 ist die Integration noch nicht ausführbar, so lange der Weg nicht gegeben. War aber früher $dQ = o$ die Bedingung für adiabatisches Verhalten, so darf jetzt der Proceſs erst dann so heifsen, wenn

$$\int_{v_1}^{v_1+v_2} \frac{dQ}{T} + A \int_{v_2}^{v_1+v_2} \frac{(p-\pi)}{T} dv = o.$$

Ist dagegen $dQ = o$, so ist

$$\xi_1 - \xi_0 = A \int_{v_1}^{v_1+v_2} \frac{(p-\pi) \cdot dv}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 32.$$

Dieselbe Gleichung in dem hier gedeuteten Sinne finde ich nur bei Rankine [1]).

Der Vorgang des Ausströmens in ein Vacuum mufs also ein diabatischer Proceſs genannt werden in Bezug auf den betrachteten Körper, und es erinnert diese scheinbar widerspruchsvolle Bezeichnung durchaus an die correcte Auffassung der Erscheinung. — Das Vacuum gehört, wie sich zeigen läfst, weder zum Körper, noch zu den Substanzen der Aufsenwelt, es ermöglicht nur den Umsatz in Wärme, wie die dritte Hauptgleichung lehren wird.

Als Corollar zum zweiten Hauptsatz folgt für den geschlossenen, oder Kreis-Proceſs aus

$$\xi_1 - \xi_0 = \int_0^1 \frac{dQ_1}{T_1} + \int_{v_1}^{v_1+v_2} \frac{(p-\pi)\,dv}{T_1}$$

und

$$\xi_0 - \xi_1 = \int_1^0 \frac{dQ_2}{T_2} + \int_{v_1+v_2}^{v_1} \frac{(p-\pi)\,dv}{T_2}$$

1) *Philos. Transact. l. c. pag.* 132.

Digitized by Google

$$\int_0^1 \frac{d\,Q_1}{T_1} + \int_1^0 \frac{d\,Q_2}{T_2} + \int_{v_1}^{v_1+v_2} \frac{(p-\pi)\,dv}{T_1} + \int_{v_1+v_2}^{v_1} \frac{(\pi-p)\,dv}{T_2} = o.$$

Bei der Zurückführung des Gases in den Anfangszustand kann nämlich $\pi > p$ seyn, wodurch dynamische Energie im Gase erzeugt würde, welche demselben als Wärme zu Gut käme. Ist der Rückweg umkehrbar, so ist auf demselben $\pi = p$, und das letzte Glied der Gleichung ist gleich Null. Wesentlich ist vor Allem die bei einer Volumänderung eintretende Arbeitsleistung. Die Adiabate bleibt constant, wenn die Aufsenwelt im vollen Betrage die vom Körper verwirkte Arbeit aufnimmt und umgekehrt: Nimmt die Aufsenwelt Arbeit in irgend einem Betrage auf, so entspricht der diesem Betrage entsprechende Verlust an Energie des Körpers *keine* Adiabatenänderung. Ein vorhandener Ueberschufs der verwirkten Arbeit bedingt dagegen die Erzeugung von dynamischer Energie. Je nachdem diese als Wärme dem Körper verbleibt, oder der Aufsenwelt abgegeben wird, ändert sich die Adiabate. — Jene dynamische Energie könnte als potentielle Wärme gefafst werden, und zwar entspräche derselben ein potentielles Wachsthum der Adiabate (d. h. ein möglicherweise eintretendes). Nur durch Stofs oder Wärmeabfuhr, — *also ohne Volumänderung* — kann jene potentielle Wärme dem Körper verloren gehen.

In diesem Sinne dürfte nun auch bei chemisch-affinen Körpercomplexen von der Adiabate derselben geredet werden. Die bei der Verbrennung erzeugte gesammte Energie denke man sich in Wärme umgesetzt, und nach eingetretener Ruhe des Verbrennungsproduktes ergeben p und v den disponiblen Adiabatenwerth. Hat während der Verbrennung eine Expansion stattgehabt, so wird durch Energie, die die Aufsenwelt aufnimmt, der Adiabatenwerth *nicht* geschmälert, *wohl* aber, wenn von der erzeugten Energie ein Theil auf die Aufsenwelt überginge ohne

Digitized by Google

räumliche Einschränkung der letzteren, — also in Form von Wärme oder Stofs. —

III. b. Die dritte Hauptgleichung.

Die vorzuschreibenden Aenderungswege müssen physisch ausführbar erscheinen. Beachtet man die Mannigfaltigkeit der Umwandlungen der Energie, so leuchtet ein, dafs ebenso die Formen der dritten Hauptgleichung in sehr verschiedener Gestalt aufgestellt werden können. Im einfachsten Falle hiefse sie

$$Q + {}^{t}\int (p - \pi)\, dv = q\,(\xi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 32.$$

Sie besagt nicht nur, dafs mit φ irgend ein Aenderungsweg gegeben seyn kann, sondern auch, *dafs die zuzuführende Wärmemenge Q nebst der, der erzeugten dynamischen Energie äquivalenten Wärmemenge* eine Function der Adiabate sey.

Es sey ein Gas p, v, T in einem Cylinder eingeschlossen. Der Kolben werde von aufsen belastet, das Gas bis auf v_1 comprimirt, so zwar, dafs ein leerer Raum v_2 erzeugt werde. Diese Aenderung geschehe isotherm. Alsdann ist

$$d\,Q = A p dv$$

und

$$Q_1 = A R T \log \frac{v_1}{v_1 + v_2}$$

sowie

$$\int \frac{d\,Q_1}{T} = A R \log \frac{v_1}{v_1 + v_2} = \xi_1 - \xi_2.$$

Jetzt eröffne man dem comprimirten Gase einen Weg ins Vacuum; nach eingetretener Ruhe werden die Anfangswerthe wiedergekehrt seyn. In diesem Theile des Kreisprocesses ist

$$Q_2 = o$$

aber

$$\int \frac{d\,Q_2}{} + \int \frac{(p - \pi)\, d\,v}{T} = A R \log \frac{v_1 + v_2}{v_1} = \xi_2 - \xi_1.$$

Digitized by Google

Die Adiabate ist auf den Anfangswerth zurückgekehrt, allein aufsen ist nicht Alles beim Alten geblieben. Bezeichnen wir für jeden Proceſs die nach aufsen bezogenen Wärmemengen mit Q^* und die Arbeitsgröſsen mit L^*, so ersieht man das Facit aus folgender Zusammenstellung:

Körper:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ Q_1 = -ART\log\frac{v_1}{v_1+v_2} \qquad L_1 = +ART\log\frac{r_1}{v_1+v_2} \\ 2)\ Q_2 + \int_{v_1}^{v_1+v_2}(p-\pi)\,dv = +ART\log\frac{v_1}{v_1+v_2} \quad L_2 = -ART\log\frac{v_1}{v_1+v_2} \\ \text{Facit:}\quad \Sigma Q + \int(p-\pi)\,dv = o, \quad \Sigma L = o. \end{array}\right\} 33$$

Im Aufsenraum:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ Q^*_1 = ART\log\frac{v_1}{v_1+v_2} \qquad L^*_1 = -ART\log\frac{v_1}{v_1+v_2} \\ 2)\ Q^*_2 = o \qquad\qquad\qquad L^*_2 = o \\ \text{Facit:}\ \Sigma R = ART\log\frac{v_1}{v_1+v_2},\ \Sigma L = -ART\log\frac{v_1}{v_1+v_2} \end{array}\right\} 34.$$

In dem Körper erscheint Alles compensirt, aufsen aber nicht, da hier Q^*_1 besteht und eine äquivalente Arbeitsmenge L^*_1 verwirkt ist. Man bemerke, daſs von aufsen her das Vacuum erzeugt worden (ohne Volumvermehrung), denn hier ist etwa ein Gewicht gefallen, und hier tritt die Wärme Q^*_1 auf. Das Facit wird aber nicht wesentlich geändert, wenn der Ausströmungsproceſs nicht im Gase, sondern aufsen vorgenommen, und dann das Gas umkehrbar auf $v_1 + v_2$ zurückgeführt wird. In beiden Fällen erscheint *aufsen* die Umwandlung vollzogen. Setzen wir das Quantum.

$$ART\log\frac{v_1}{v_1+v_2} = M,$$

so wird nunmehr

Digitized by Google

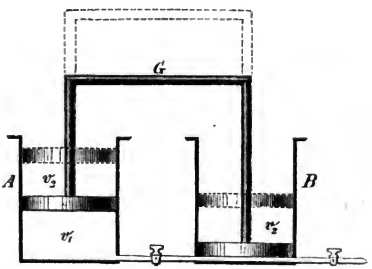
für den Körper:		im Aufsenraum:	
1) $Q_1=-M$,	$L_1=+M$,	$Q^a{}_1=+M$,	$L^a{}_1=-M$
2) —	$-\int_{v_1}^{v_1+v_2}\pi dv=Q^a{}_2=A\pi_1 v_2$,		$L^a{}_2=-A\pi_1 v_2$
3) $Q_3=+M$,	$L_3=-M$,	$Q^a{}_3=-M$,	$L^a{}_2=+M$

35.

Facit: $\Sigma Q=o$, $\Sigma L=o$, $\Sigma Q^a+\int\pi dv=A_1\pi_2 v$, $\Sigma L^a=-A\pi_1 v_2$

Gerade umgekehrt wird aber im Endresultat eine Umwandlung im Körper hervortreten, sobald von diesem selbst das Vacuum *erzeugt* wird, einerlei, welcher Körper in dasselbe einströmt. Um diesen Fall zu illustriren, seyen A und B zwei Cylinder gleichen Querschnittes, die durch eine mittelst eines Hahnes verschliefsbare Röhre mit einander communiciren. Zwei, starr durch einen Galgen G (siehe Figur 1) verbundene Kolben stecken so in den Ge-

Figur 1.

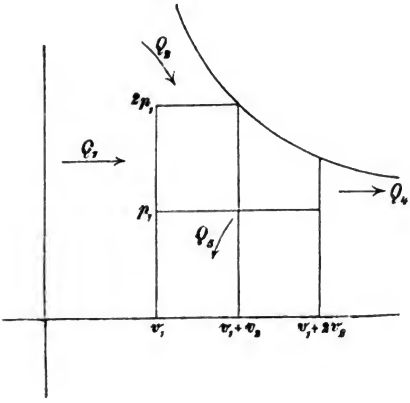


fäfsen, dafs in B der Kolben den Boden berühre, in A ein Gas v_1, p_1, T_1 abgesperrt sey. Bei verschlossenem Hahne führen wir 1) dem Gase in A Wärme Q_1 zu, bis der specifische Druck aufs Doppelte gestiegen. Dann führen wir 2) bei geschlossenem Hahne die Wärme Q_2 zu, bis das Gas das Volumen v_1+v_2 einnehme, während gleichzeitig ein Vacuum v_2 gebildet worden. 3) öffnen wir den Hahn ohne Zufuhr von Wärme Q_3. 4) entziehen wir Q_4,

Digitized by Google

bis der Druck $= p_1$ geworden und endlich 5) comprimiren wir das Gas von $v_1 + 2v_2$ auf v_1 und entziehen Q_5 bei constantem Druck. Die Anfangsadiabate sey ξ_1 und die Indices 2 bis 5 bezeichnen die übrigen Werthe. Diesen fünf Processen entspricht das Diagramm Figur 2.

Figur 2.



Nur der Proceſs 3) ist nicht umkehrbar. Jetzt ergiebt sich für den

Körper:

1) $Q_1 = \frac{c \cdot p_1 \cdot v_1}{R}$, $\quad L_1 = o$

2) $Q_2 = \frac{2c' p_1 v_2}{R}$ $\quad L_2 = -2Ap_1v_2$

3) $Q_3 + \int_{v_1+v_2}^{v_1+2v_2} (p-\pi)\,dv = ART_3 \log \frac{v_1+2v_1}{v_1+v_2}$ $\quad L_3 = -ART_3 \log \frac{v_1+2v_1}{v_1+v_2}$

4) $Q_4 = -\frac{cp_1v_1}{R}$ $\quad L_4 = o$

5) $Q_5 = -\frac{2c' p_1 v_2}{R}$ $\quad L_5 = +2Ap_1v_2$

Facit: $\Sigma Q = ART_3 \log \frac{v_1+2v_2}{v_1+v_2}$, $\Sigma L = -ART_3 \log \frac{v_1+2v_2}{v_1+v_2}$.

Digitized by Google

Anders als vorhin erscheint jetzt aufsen Alles intakt, denn

im Aufsenraum:		
1)	$Q^a_1 = -\frac{c p_1 v_1}{R}$	$L^a_1 = o$
2)	$Q^a_2 = -\frac{2 c' p_1 v_2}{R}$	$L^a_2 = 2 A p_1 v_2$
3)	$Q^a_3 = o$	$L^a_3 = o$
4)	$Q^a_4 = \frac{c p_1 v_1}{R}$	$L^a_4 = o$
5)	$Q^a_5 = \frac{2 c' p_1 v_2}{R}$	$L^a_5 = -2 A p_1 v_2$
Facit:	$\Sigma Q^a = o,$	$\Sigma L^a = o$

37.

Im Körper erschien nach vollendetem Procefs ein Ueberschufs an verwirkter Arbeit, und eine dieser äquivalente Umwandlung in Wärme. Für den Procefs 3) könnte man sagen, sey L_3 verwirkt, die Aufsenwelt habe L_3^{δ} als dynamische Energie aufgenommen und als dynamische Energie Q_3^{δ} wieder dem Körper gegeben, der als Q_3^{θ} dieselbe in thermische Energie umwandelt. Diese Umwandlung ist der Ausdruck der dritten Hauptgleichung, und nur durch dieselbe kann die Adiabate auf ihren Anfangswerth zurückkehren. Verfolgen können wir nach den gegebenen Daten nur die Adiabate des Körpers. In der That ist

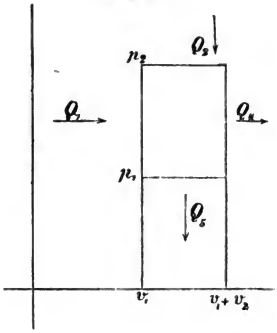
1)	$\int \frac{d Q_1}{T_1} = c \log 2 = \xi_2 - \xi_1$	
2)	$\int \frac{d Q_2}{T_2} = c' \log \frac{v_1 + v_1}{v_1} = \xi_3 - \xi_2$	
3)	$\int \frac{(p - \pi)\, d v}{T_3} = (c' - c) \log \frac{v_1 + 2 v_2}{v_1 + v_2} = \xi_4 - \xi_3$	38.
4)	$\int \frac{d Q_4}{T} = c \log \frac{v_1 + 2 v_2}{2 (v_1 + v_2)} = \xi_5 - \xi_4$	
5)	$\int \frac{d Q_5}{T} = c' \log \frac{v_1}{v_1 + 2 v_2} = \xi_1 - \xi_5$	

Durch Addition verificirt man die Behauptung, dafs die Adiabate zurückgekehrt sey auf ihren Anfangswerth.

Digitized by Google

Nun aber könnte das Ausströmen ins Vacuum auch von Massen der Aufsenwelt geschehen. Man wird finden, dafs *wiederum* im Facit die Umwandlung im Körper erscheint, weil von diesem aus das Vacuum geschaffen. Zu dem Zwecke lassen wir statt 3) nunmehr aufsen den nicht umkehrbaren Proceſs eintreten; alsdann bringen wir 4) das Gas bei constantem Volumen nach p_1 und endlich 5) bei constantem Druck nach v_1 (siehe Figur 3).

Figur 3.



Jetzt finden wir

für den Körper:

1) $Q_1 = \frac{c p_1 v_1}{R}$	$L_1 = o$	
2) $Q_2 = \frac{2 c_1 p_1 v_2}{R}$	$L_2 = -2 A p_1 v_2$	
3) —	—	39.
4) $Q_4 = -\frac{c p_1 (v_1 + v_2)}{R}$	$L_4 = o$	
5) $Q_5 = -\frac{c_1 p_1 v_2}{R}$	$L_5 = A p_1 v_2$	
Facit: $\Sigma Q = \frac{(c' - c) p_1 v_2}{R} = \Sigma L = -A p_1 v_2$		

Digitized by Google

Dagegen finden wir

im Aufsenraum:

$$
\left.\begin{array}{lll}
1) & Q^a_1 = -\frac{c p_1 v_1}{R} & L^a_1 = o \\
2) & Q^a_2 = -\frac{2c' p_1 v_2}{R} & L^a_1 = 2 A p_1 v_2 \\
3) & Q^a_1 + \int (p-\pi) dv = (c'-c) p_1 v_1 & L^a_3 = -A p_1 v_2 \\
4) & Q^a_4 = \frac{c p_1 (v_1 + v_2)}{R} & L^a_4 = o \\
5) & Q^a_1 = \frac{c' p_1 v_2}{R} & L^a_5 = -A p_1 v_2 \\
\text{Facit:} & \Sigma Q^a = o & \Sigma L = o
\end{array}\right\} \quad 40.
$$

Hier ist vermittelst eines aufserhalb des Körpers vollzogenen nicht umkehrbaren Processes schliefslich doch wieder im Körper Wärme aus Arbeit gewirkt. Die Adiabate durchläuft folgende Stadien:

$$
\left.\begin{array}{ll}
1) & \int \frac{d Q_1}{T_1} = c \log 2 = \xi_2 - \xi_1 \\
2) & \int \frac{d Q_2}{T_2} = c' \log \frac{v_1 + v_2}{v_1} = \xi_3 - \xi_2 \\
3) & \quad - \qquad\qquad \xi_4 = \xi_3 \\
4) & \int \frac{d Q_4}{T_4} = -c \log 2 = \xi_5 - \xi_4 \\
5) & \int \frac{d Q_5}{T_5} = -c' \log \frac{v_1 + v_2}{v_1} = \xi_1 - \xi_5
\end{array}\right\} \quad 41.
$$

Aus dieser Deduction folgt, dafs ein Vacuum nicht zu einem Körper gerechnet werden könne, auch wenn es von diesem erzeugt worden. Ebensowenig gehört es zur Aufsenwelt. An und für sich könnte ein Vacuum, wie eine Temperatur so auch eine Adiabate haben, allein da $p = o$ und $v = \infty$, so kann weder T noch ξ direkt gebildet werden. Weil aber das absolute Vacuum (V_2) end-

Digitized by Google

lich, mithin die Masse $= o$, so darf kein disponibler Adiabatenwerth angenommen werden. Das Vacuum ermöglicht nur die Vergrößerung der jeweiligen Adiabate desjenigen Gases, dem das fragliche Volumen eingeräumt wird. In allen Fällen erscheint beim *Kreisprocefs* in demjenigen Körper, der Arbeit verwirkend, den luftleeren Raum erzeugte, eine gewisse Arbeitsgröfse in Wärme umgewandelt, einerlei ob der nicht umkehrbare Vorgang im Körper oder ob er aufsen geschah. Läfst man den nicht umkehrbaren Vorgang in Gleichung 40 fort, so ist das Facit innen und aufsen gleich und entgegengesetzt.

Das durch das Vacuum ermöglichte Adiabatenwachsthum des eindringenden Körpers ist von den herrschenden Druckverhältnissen abhängig. — Das oben aufgestellte Gesetz findet nur dann völlig Ausdruck, wenn schliefslich das Gleichgewicht aller Druckkräfte wieder hergestellt ist. Sonst können die Beziehungen weit complicirter ausfallen.

So erklärt sich, wie mir scheint, die Meinungsverschiedenheit, die vor einigen Jahren zwischen Clausius und Bauschinger auftrat im Anschlufs an die interessanten Untersuchungen des Letzteren über das Ausströmen von Gasen und Dämpfen [1]). Wenn auf nicht umkehrbarer Wegstrecke $Q_3 = o$ ist, so scheint es, müfste nach Clausius' Definition die entsprechende sogenannte Entropie $= o$ seyn. Allein Bauschinger nimmt, unserer dritten Hauptgleichung gemäfs, die Entropie als

$$\int \frac{d\,Q_3}{T} + \int \frac{(p - \pi)\,dv}{T}$$

an. In einem bezüglichen Artikel verwahrt sich Clausius [2]) dagegen, dafs man in die von ihm gegebenen Begriffe und Definitionen andere Elemente aufnehme, als er gemeint hat. Ich glaube nun aus Clausius' eigenen Worten nachweisen zu können, dafs auch er für den nicht umkehrbaren Theil ohne Wärmezufuhr doch einen Werth für die Entropie hätte ansetzen müssen, denn auf Seite 43

1) Schlömilch, Ztschr. f. Mathem. u. Physik, Jahrg. VIII, S. 429.
2) Schlömilch, Ztschr. f. Mathem. u. Physik, Jahrg. XI. S. 460.

Digitized by Google

der Abh. IX des 2. Bandes der gesammelten Abhandlungen heifst es: „Wenn eine Bewegung sich durch passiven Widerstand in Wärme umsetzt, so ist der Aequivalenzwerth der hierbei stattfindenden uncompensirten Verwandlungen einfach durch den Verwandlungswerth der erzeugten Wärme dargestellt.“ Mithin kommt Alles darauf an zu erkennen, dafs beim Ausströmungsprocefs in der That Wärme erzeugt worden[1]), und dafs dieselbe als von aufsen herstammend zu behandeln sey. Nur in einem Punkte mufs ich auch Bauschinger widersprechen: Ich kann nicht zugeben, dafs das Ausströmen ein umkehrbarer Procefs sey, „*weil* der Anfangszustand wiederkehrt.“

Das von mir aufgestellte Resultat, dafs — in allen vier discutirten Fällen — in *dem* Körper, der das Vacuum erzeugte, schliefslich eine Arbeit in Wärme umgewandelt erscheint, dieses Resultat hat Clausius *nicht*; vielmehr tritt bei ihm in der sogenannten Entropie ein Ueberschufs auf, der bei mir in allen Fällen *nicht* existirt. — Dafs in unseren Beispielen meist auf einer Seite $\Sigma Q = o$ und $\Sigma L = o$ ist selbstverständlich ein Zufall, der leicht fortgeschafft wird durch Annahme anderer Epochenwerthe des Kreisprocesses oder durch Einschaltung anderer umkehrbarer Theilprocesse. Immer wird schliefslich ein im Körper und aufsen *nicht ausgeglichener* Theil Arbeit und Wärme auftreten. Subtrahirt man das Facit der einen Seite von der anderen, so wird eine *negative* Arbeitsgröfse nur auf der Seite auftreten, von welcher aus das Vacuum erzeugt ward. Analoge Beispiele lassen sich mit einer gespannten Feder anstellen, die comprimirt und dann losgeschnellt wird, wobei potentielle Energie erst in dynamische, dann in thermische actuelle Energie übergeht. — Bildet man einen Kreisprocefs, so entspricht das Facit einem Corollar zum dritten Hauptsatz. Nicht wesentlich anders gestaltet sich die Frage bei anderen Arten von nicht umkehrbaren Processen, wie Reibung, Strahlung u. a.

1) Vgl. auch Fortschritte der Physik, herausgegeben von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrgang 1850 und 1851, S. 582.

Digitized by Google

C. Die Adiabate und ihre Synonyma.

Aus welchem Grunde der Name *Adiabate* vor allen anderen bisher vorgeschlagenen Namen den Vorzug verdient, soll nun erläutert werden. Es wird sich dabei zeigen, ob die verschiedenen Schriftsteller die reichlich vorhandene Synonymität erkannt haben.

1.

Der Ausdruck „Veränderung auf adiabatischem Wege" ist längst bekannt und allgemein angenommen. Es lag nahe, denjenigen Parameter, der die unendliche Schaar von adiabatischen Curven bezeichnet, entsprechend zu benennen, so zwar, dafs dieser Parameter als Variable gefafst, eine Eigenschaft des Körpers definire. Durchaus unnöthig erscheint die Erfindung eines ganz neuen Namens. Die fernere Bezeichnung: Aenderung auf *diabatischem* Wege kommt schon bei J. J. Müller [1]) vor.

2.

Rankine's[2]) thermodynamische Funktion F und Reech's[3]) unbenannte Funktion U decken sich vollständig mit der Adiabate ξ [4]).

Mit Rankine's Bezeichnung ist aber keine wesentliche Eigenschaft eines Körpers indicirt. Die thermodynamische Funktion ist zudem in p und v eine andere als in v und T. In der Gleichung

$$\xi = \log\left(p^c v^{c'}\right)$$

1) Diese Annalen l. c.

2) *Philos. Transact.* 1854 l. c. vergl. die Form der Adiabate nach der Theorie der Molecular-Wirbel S. 136 Gleichung 26, in welcher $h=o$ die gewöhnliche Form der adiabatischen Aenderung giebt, desgl. Cazin in *Phil. Mag.* (4) *XL, pag.* 281.

3) Liouville's Journal 1853. l. c.

4) Thomson und Tait sprechen von *„thermodynamischem Gesetz"*. (Handbuch der theoretischen Physik, Bd. I, Th. II, S. 449.)

Digitized by Google

möchte ich rechts eine thermodynamische Funktion, links die Adiabate sehen. Die Funktion ist uns zudem nur bei ideellen Gasen bekannt, wie auch die Temperatur meist eine unbekannte Funktion von p und v ist [1]). Uebrigens finde ich, wie schon erwähnt, nirgends in Rankine's Abhandlungen einen Widerspruch gegen meine Auffassung.

3.

Für das Integral $\int \frac{dQ}{T}$ hat Zeuner den Namen „Wärmegewicht" angewandt. Der bezügliche Satz lautet:

„Die Funktion $P = \int \frac{dQ}{A \cdot T}$ spielt in der Wärmelehre eine ähnliche Rolle, wie in der Mechanik die sogenannte Kraftfunktion, und die adiabatischen Curven wie dort die Niveauflächen. Es steht unbenommen, die Funktion P als eine Kraftfunktion aufzufassen, ich ziehe jedoch vor, diesen Werth P als eine Kraft, nach Befinden, wie es bei den vollständigen Kreisprocessen erläutert wurde, als ein Gewicht darzustellen, weil eine Reihe von Untersuchungen, die für die Technik von Wichtigkeit sind, übersichtlicher sich darlegen lassen." Offenbar hat Zeuner hier die Parallele zwischen den Formeln der Wärmelehre

$$L = \frac{Q}{A \cdot T} (T_1 - T)$$

und denen der Mechanik

$$L = \frac{W}{h} (h_1 - h)$$

im Auge gehabt. Gegen die hieraus beliebte Schlufsfolge in Bezug auf eine Analogie von Temperatur und Fallhöhe habe ich mich schon früher ausgesprochen [2]). Aufser diesen Argumenten spricht aber gegen einen Begriff „Wärmegewicht" die durch die neue mechanische Wärmetheorie

1) Die Form der Adiabate für Wasser, von der Thomson und Tait (Handbuch der theoretischen Physik, Bd. I, Th. 2, S. 449) sprechen, entspricht nur einer empirischen Funktion.

2) Seite 105 und diese Annalen Ergbd. V, S. 559, Anm. 1.

Digitized by Google

gegebene Auffassung der Wärme. Am schärfsten hat Loschmidt[1]) diese Benennung discutirt und zu motiviren versucht. Immerhin wird mit diesem Namen ein Hauptzweck verfehlt, denn eine Eigenschaft des (vermittelnden) Körpers *soll* Ausdruck finden, während nach Zeuner immer nur die Wärme Q ein Wärmegewicht $\frac{Q}{T_a}$ haben kann. So spricht man von *„gelieferten Wärmegewichten"* (Zeuner l. c. S. 83), und von *abgegebenen* Wärmegewichten.

4.

Am wenigsten zutreffend erscheint mir der von Clausius eingeführte Name „Entropie." Da ich nicht nur in der Auffassung der bezüglichen Gröfse, sondern auch in den Resultaten, in Hinsicht auf das Verhalten der Adiabate bei nicht umkehrbaren Processen abwich, so zweifelte ich nicht daran, von der Bezeichnung „Entropie" absehen zu müssen.

Clausius setzt nämlich „Entropie" für Verwandlungsinhalt (Gesammelte Abhandlungen Bd. II, S. 34). Fragt man, um *wessen* Verwandlung es sich handle, — des Körpers oder der Wärme, — so mufs man den verschiedenen Schriften Clausius' folgen, um eine Aufklärung zu suchen. In der 4. Abhandlung des 1. Bandes ist vom „Verwandlungswerth einer erzeugten Wärmemenge", ja sogar vom *„Aequivalenzwerth der Entstehung einer Wärmemenge"* die Rede. So heifst es auf Seite 143: „die Entstehung der Wärmemenge Q von der Temperatur T aus Arbeit habe den Aequivalenzwerth $\frac{Q}{T}$." Ich finde schon den Ausdruck „Wärme von einer Temperatur" sehr bedenklich, denn das wäre „eine lebendige Kraft von einer lebendigen Kraft anderer Art", welches zu keiner klaren Vorstellung führt. Ferner aber findet gerade bei constanter Adiabate, d. h. ohne Wärmezufuhr, wobei $\int \frac{dQ}{T} = o$ ist, eine Umwand-

1) Sitzungsber. d. K. Ac. d. Wissensch. zu Wien, Bd. 59, II. S. 398.

Digitized by Google

lung von äufserer Energie in innere Arbeit und Wärme statt, also dürfte auch Clausius nicht vom Verwandlungswerth der „Entstehung“ reden. Erst die *Ab- oder Zufuhr* bedingt eine *Adiabatenänderung*, und es hätte Clausius, wie ich meine, nach seiner Denkweise von dem „Aequivalenzwerth der *Abfuhr* einer erzeugten Wärmemenge“ reden müssen; indefs ist es bei einer solchen Abfuhr irrelevant, woher die bezügliche Wärme herstammt.

Noch bedenklicher erscheint Clausius' Auffassung beim Ueberführen von Q von einem Körper von der Temperatur T_1 zu einem anderen von der Temperatur T_2. Hier hat weder der Körper, noch die Wärme einen Aequivalenzwerth, sondern es hat nach ihm „der Uebergang“ den Aequivalenzwerth

$$Q\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right).$$

Was hiermit bezeichnet werden sollte, ist genugsam bekannt. Ich bestreite nur, dafs mit der Ausdrucks- und Auffassungsweise sich eine klare Vorstellung verbinden lasse. Im vorliegenden Falle nimmt ein Körper Wärme auf bei T_1, giebt dieselbe Wärmemenge ab bei T_2, daher ist die bezügliche Adiabatenänderung gleich dem Unterschiede der beiden einzelnen Aenderungen. Clausius dagegen führt dem Leser die Wärmereservoire statt des vermittelnden, hauptsächlich betrachteten Körpers vor (cf. Bd. I, S. 144 und 145). Ueber die Adiabate der Reservoire kann aber gar nichts ausgesagt werden, denn alle Daten beziehen sich auf die Eigenschaft des Körpers. Der Begriff der „Compensation“ läfst sich nach meiner Auffassung leicht fassen. Im vorliegenden Beispiele wird die spätere Abfuhr von Q', bei constanter Temperatur T_2 eine Adiabatenänderung bedingen, die genau gleich und entgegengesetzt wäre dem oben dastehenden Ausdrucke.

In der That *compensiren* sich die Adiabatenänderungen ein und desselben Körpers während eines jeden Kreisprocesses, einerlei ob derselbe umkehrbar oder nicht umkehrbar. Mangelhafte *Compensation* giebt es nur beim unge-

Digitized by Google

schlossenen Proceſs. Wie aber eine Ueberführung von kalt zu warm durch Entstehung einer Wärmemenge compensirt werden könne, das ist nach meiner Meinung nicht zu verstehen. Da gerade bei *constanter Adiabate Wärmeproduktion* statt hat, so involvirt, ich betone es nochmals, Clausius' Darstellung eine Verstellung der wesentlichen Theile des Processes.

Uebrigens kann doch der Wärme nur *eine* Art von Verwandlung zugesprochen werden, auf Grund des bekannten Wärmeäquivalentes. Es kann sich eben nur Energie einer Form in Energie einer andern Form umwandeln. Ich halte es nicht für gerechtfertigt, dasselbe Wort auf eine Gröſse ganz anderer Dimension $\frac{Q}{T}$ anzuwenden. Nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch kann weder einer „Ueberführung," noch einer „Entstehung" der Wärme ein Aequivalenzwerth zukommen. Die von Clausius als zweckmäſsig hingestellte Gleichartigkeit der Namen „Entropie" und „Energie" für „nahe verwandte" Begriffe kann ich meinerseits nicht gelten lassen. Eine gewisse Verwandtschaft haben alle physikalische Gröſsen, immerhin stehen sich hier Begriffe gegenüber, die nicht minder heterogen sind, als etwa Temperatur und Druck (bes. im Sinne der neuen Gastheorie) [1]).

Es kommen aber bei Clausius noch andere Verwandlungsbegriffe vor. Auſser dem Verwandlungswerth einer „Wärmemenge" (in Körpern und in Reservoiren), dem einer „Arbeit", auſser dem einer „Entstehung" und einer „Ueberführung" begegnet uns noch der Verwandlungswerth „einer Anordnung der Bestandtheile eines Körpers", ferner der Verwandlungsinhalt „eines Körpers" und der

1) Es ist bemerkenswerth, daſs in England und Frankreich die Clausius'sche „Entropie" und Zeuner's „Wärmegewicht" nicht Eingang zu finden scheinen. Vgl. Briot, l. c. S. 81. In der Bearbeitung der Verdet'schen Wärmetheorie von R. Rühlmann findet man nur Ergänzungen des deutschen Bearbeiters über die Entropie S. 136 und ff.

Digitized by Google

Verwandlungsinhalt „der im Körper wirklich vorhandenen Wärme“. (Band II, Seite 33). Es ist nämlich Clausius nicht entgangen, dafs die zweite Hauptgleichung „eine bestimmte Eigenschaft der Körper ausdrücke“. Diese Bemerkung dient aber zunächst (Band I, Seite 149) nur zur Demonstration der Gröfse T als absoluter Temperatur (S. 150). Erst später bei Einführung des Wortes „Entropie“ mit dem Buchstaben S tritt die Bedeutung dieser Gröfse „für den Zustand des Körpers“ hervor. (Band II, Seite 31). Hier heifst es „$\frac{dQ}{T}$ sey das vollständige Differential dS einer Gröfse, welche nur vom augenblicklich statthabenden Zustande des Körpers und nicht von dem Wege, auf welchem er in denselben gelangt sey, abhänge.“ Wie zu dieser Auffassung die Behauptung stimmt, es sey beim nicht umkehrbaren Kreisprocesse die Gesammtentropie $> o$, ist nicht zu verstehen. Auch vom Anfangspunkt der Zählung der „Entropie eines Körpers“ ist die Rede. Clausius meint, man dürfe nicht von $T = o$ beginnen, da sonst die Entropie stets unendlich grofs wäre. Gewifs richtig; nimmt man einen anderen Anfangspunkt, so schwankt die Adiabate, wie die Entropie zwischen $+$ und $-\infty$. Ueber die bei einem anderen Anfangspunkt der Zählung nothwendig zu statuirenden *negativen* Werthe einer Entropie hat sich Clausius nicht geäufsert.

Wir setzten:

$$\xi_1 - \xi_0 = \log\left(p^c{}_1\, v^{c'}{}_1\right) - \log\left(p^c{}_0\, v^c{}_0\right)$$

oder direkt

$$\xi = \log\left(p^c\, v^{c'}\right).$$

Hierbei ist die Adiabate o genannt, wenn $p^c\, v^{c'}$ nach den gewählten Einheiten $= 1$ wird. Für $p = o$ wird $\xi = -\infty$ und der Zuwachs der Adiabate ∞ grofs. Erblickt man nun in der Adiabate thatsächlich den „Verwandlungsinhalt der im Körper vorhandenen Wärme“, so mufste freilich, wenn man denselben vom absoluten Null-

Digitized by Google

punkte der Temperatur aus zählen wollte, ein unendlich grofser Werth paradox und nicht zulässig erscheinen. Ich vermag daraus nur zu folgern, dafs der Name „Verwandlungsinhalt“ für die Gröfse ξ nicht zutrifft. Clausius aber erblickt in diesem Umstande einen „principiellen Beweis dafür, dafs man nie durch irgend welche Zustandsänderungen eines Körpers eine solche Kälte hervorbringen könne, um bis zum absoluten Nullpunkte zu gelangen.“ (Bd. I, S. 279) und (Bd. I, S. 319). Wenn es nun beliebte statt T, etwa $Q = \log T$ Temperatur zu nennen? Alsdann liefse sich die Temperatur auch nicht mehr vom absoluten Nullpunkte aus rechnen, da sie alsdann stets ∞ grofs wäre. Darf nun aus einer willkürlich aufgestellten Definition und aus einer unglücklich gewählten Terminologie ein Schlufs auf das *Wesen* physikalischer Erscheinungen gezogen werden?

Betreffend den Namen „Disgregation“, will ich die Speculationen, die Clausius zur Einführung dieses Begriffes vorführt, übergehen, und nur bemerken, dafs für denselben bei anderen Schriftstellern das Wort „Aggregation“ vorkommt. Offenbar hatte Clausius bei seinen ersten Abhandlungen weniger an eine Eigenschaft des Körpers gedacht, und es erinnert „disgregare“ an die Veränderung, „aggregare“ an die jeweilige Anordnung. In der Gleichung

$$d\xi = dY + dZ$$

hiefse besser Z die Aggregation, und deren Aenderung oder $Z - Z_1$ die Disgregation. Das Increment der Adiabate kann stets aus zwei Incrementen zusammengesetzt werden, von welchen das eine dZ das durch Volumänderung bedingte Increment bedeutet. Mir erscheint daher das Wort passend gewählt, nur dürfte es gut seyn innere und äufsere Disgregation zu unterscheiden [2]). Die erstere bezöge sich auf Aenderungen des Molekularvolumens und kann unter Umständen sehr von der äufseren in Gröfse

1) *Philos. Transact.*

2) S. Seite 96, Anmerkung 1.

Digitized by Google

und Zeichen abweichen. Die andere, die äufsere Disgregation hat Rankine[1]) schon früher mit *„metamophic function“* bezeichnet.

Den genannten Begriffen, Entropie und Wärmegewicht, ist es eigen, dafs in den bezüglichen Sätzen, wo sie vorkommen, das Subject womöglich unbestimmt bleibt. Das Erfassen der zweiten Hauptgleichung wird hierdurch erschwert. (Vgl. Clausius, Bd. I, S. 246).

5.

Die von Thomson behauptete in endlicher Zeit zu erwartende Ausgleichung aller Temperaturunterschiede, stöfst auf einen Widerspruch, sofern die mathematische Analyse fast eines jeden Problemes einen unendlich lang dauernden, nur asymptotisch einem Endzustande sich nähernden Procefs lehrt. Ist aber für jenen Wärmeaustausch eine ∞ grofse Zeit nöthig, so kommt auch das Ende jenes Vorganges in ∞ langer Zeit, d. h. *nie* zu Stande. Auch Clausius spricht von dem Streben nach einem *„Maximum der Entropie“*. Ein ∞ lang fortgesetztes Wachsen brächte aber nie ein Maximum zu Wege, da ein solches nur in endlicher Zeit denkbar wäre. In jedem nicht umkehrbaren Processe erblickte ferner Clausius ein nothwendiges Wachsen der Entropie. Da ein solches aber nicht statt hat, so darf auch die Richtigkeit jener These bezweifelt werden. Freilich hat Clausius seinen Satz nur „vorläufig“ hingestellt, wie es heifst „in consequenter Weise unter Berücksichtigung aller Umstände für das ganze Weltall,“ und hat sich vorbehalten, die strahlende Wärme u. a. später zu behandeln. So lange diese Nachweise fehlen, wird auch das neue „Grundgesetz des Weltalls“ nicht entfernt dem von der Constanz der Energie an die Seite gestellt werden können.

1) *Philos. Mag.* (4) *Vol. XXX, pag.* 244 *et* 408. Hier ist *op* die Adiabate und *F* die äufsere Disgregation. Cf. *Edinb. Phil. Journ.* 1855 und *Philos. Mag.* 1855 (4) *X*, *pag.* 416. Anm., wo die Disgregation auch Wärmepotential genannt wird.

Digitized by Google

D. Schlufs.

Die Resultate der vorliegenden Abhandlung suche ich in Kürze zusammenzufassen:

Dem Begriff der *Temperatur* läfst sich der der *Adiabate* eines Körpers gegenüberstellen. Der Gegensatz findet Ausdruck in der specifischen Wärme, die für Aenderungen bei constanter Temperatur $= \infty$, bei constanter Adiabate $= o$ ist.

Umkehrbare Processe sind calorisch-statische, nicht umkehrbare calorisch-dynamische. Für dieselben lassen sich drei Hauptgleichungen aufstellen.

Die erste Hauptgleichung ist der Ausdruck des Satzes von der Constanz der Energie. Sie hat alle Arten von Umwandlungen der Energie aus einer Form in eine andere zu behandeln. Ihre allgemeine Form bezieht sich auf nicht umkehrbare Processe, d. h. auf solche, bei denen kein Gleichgewicht zwischen den Druckkräften besteht. So lange der Aenderungsweg nicht vorgeschrieben, ist die Gleichung nicht integrabel. Bei Ungleichheit der äufseren und inneren Kräfte wird stets Arbeit verwirkt und dynamische Energie erzeugt, welch letztere bei umkehrbaren Processen unendlich klein ist. Die Umwandlung in thermische Energie hängt örtlich und zeitlich von den gegebenen Bedingungen ab.

Die zweite Hauptgleichung wird durch Anwendung eines integrirenden Ausdruckes aus der ersten hergeleitet. Dieser Ausdruck ist eine bestimmte Funktion der Gröfsen T, p oder v multiplicirt mit einer willkürlichen Funktion der Adiabate. Das dadurch entstandene vollständige Differential bestimmt das Wachsthum der Adiabate. Wie die erste, so ist auch die zweite Hauptgleichung einerseits nicht integrabel, andererseits drückt sie Eigenschaften der Adiabate aus, und deren Abhängigkeit von anderen Incrementen. Ein Corollar lehrt, dafs für jeden geschlossenen, oder Kreis-Procefs, umkehrbar oder nicht, die Adiabate auf ihren Anfangswerth zurückkehre. Stets mufs ther-

Digitized by Google

mische und dynamische Energie getrennt werden. Die thermische Energie bestimmt die jeweilige Adiabate, die dynamische Energie birgt einen potentiellen Adiabatenwerth. Nur bei Volumänderung tritt eine Umwandlung von thermischer in dynamische Energie ein, wobei die Adiabate sich ändert. Wird bei der Volumänderung eines Körpers potentielle Energie aufserhalb gewirkt, so vermindert sich die Adiabate nicht, wohl aber geschieht dieses durch jede ohne Volumänderung verwirkte Energie. Hieraus ergab sich die Möglichkeit, den potentiellen Adiabatenwerth eines affinen Körpercomplexes anzugeben.

Die dritte Hauptgleichung kann als Aenderungsweg betrachtet werden, oder aber als Integral der ersten oder zweiten Hauptgleichung. Sie besagt, dafs die Wärmezufuhr im Allgemeinen durch zwei Incremente dargestellt werde, nur dann aber von einem einzigen abhänge, wenn neben einer beliebigen veränderlichen Gröfse die *Adiabate* als Variable eingeführt wird. Als Corollar zur dritten Hauptgleichung ergiebt sich für den geschlossenen Procefs der Satz über das Verhältnifs der im Kreisprocefs verschwundenen zu der auf einem Theilwege zugeführten Wärmemenge. Mit Beachtung der zwischen $\pm\infty$ variirenden specifischen Wärme λ läfst sich diese Relation für Gase in eine viel allgemeinere Form bringen.

Dorpat, im Mai 1875.

IV. *Ueber die specifische Wärme und wahre Wärmecapacität der Körper; von Emil Herrmann,*

a. O. Professor an der Berg- und Forstakademie in Schemnitz.

Bekanntlich läfst sich die Aenderung der Energie und Entropie eines Körpers bestimmen, sobald der Anfangs- und Endzustand desselben gegeben ist und ist die Kenntnifs der Umstände, unter welchen die Veränderung des

Digitized by Google

Körpers vor sich ging, hierzu nicht nothwendig, sobald man voraussetzt, dafs eine Aggregatsveränderung nicht eintrat. Es ist dies darin begründet, dafs diese beiden Gröfsen Funktionen nur zweier Bestimmungsgröfsen des Körperzustandes sind und die Veränderungen derselben von einander ganz unabhängig sind. Am zweckmäfsigsten ist es — wie Clausius — die Temperatur t und das Volumen v des Körpers, als die von einander unabhängigen Bestimmungsgröfsen des Körperzustandes zu wählen. In diesem Falle ist die Spannung p, die Energie U und die Entropie E des Körpers durch je eine Funktion dieser zwei Gröfsen darstellbar; man hat demnach

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad p = f(v, t);$$

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad U = F(v, t);$$

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad E = \varphi(v, t).$$

Ich will nun zeigen, dafs zur Kenntnifs der zwei letzten Funktionen nur die Kenntnifs der Gleichung (1) und einer besonderen Funktion der *Temperatur allein* nöthig ist. Letztere Temperaturfunktion will ich dem Beispiele von Clausius folgend, die wahre Wärmecapacität des Stoffes nennen, mit dem Vorbehalte, deren Definition etwas später geben zu dürfen.

Es ist ferner bekannt, dafs die dem Körper zuzuführende Wärmemenge durch den Anfangs- und Endzustand allein noch keineswegs bestimmt ist, sondern dafs zur Bestimmung derselben die Kenntnifs der Umstände, unter welchen die Mittheilung der Wärme erfolgte, unbedingt nothwendig ist. Trotzdem läfst sich das totale Differentiale dieser Wärmemenge Q als Summe der partiell nach v und t genommenen Differentialien ausdrücken, nur sind v und t nicht als von einander unabhängig zu betrachten. Man hat daher:

$$d\,Q = \frac{\partial Q}{\partial v}\,d\,v + \frac{\partial Q}{\partial t}\,.\,d\,t.$$

Digitized by Google

Die schönen Arbeiten von Caruot, Clapeyron und insbesondere von Clausius haben den genauen Zusammenhang von $\frac{\partial Q}{\partial v}$ mit der Form der Gleichung (1) oder der sogenannten Zustandsgleichung vollkommen klar gelegt und damit einen Grundpfeiler der mechanischen Wärmetheorie aufgebaut.

Anders verhält es sich mit dem zweiten Theile d. i. $\frac{\partial Q}{\partial t}$; man begnügte sich hierfür die specifische Wärme bei constantem Volumen einzuführen und unterliefs es, den näheren Zusammenhang dieser Gröfse mit der Gleichung (1) weiter zu untersuchen, dies ist der Grund weshalb bis nun noch keine allgemeinen Ausdrücke für die Energie und Entropie der Körper existiren, obwohl die von Clausius hierfür in der Abhandlung IX gegebenen Ausdrücke (Gleichung 67 und 68) einen nicht zu unterschätzenden Werth haben. Die Erforschung dieses Zusammenhanges ist nun der Zweck vorliegender Untersuchung; sie führt zugleich auf den strengen Beweis der von Clausius aufgestellten Hypothese, dafs die Menge der in einem Körper wirklich vorhandenen Wärme, nur von seiner Temperatur und nicht von der Anordnung seiner Bestandtheile abhängig ist.

Um diesem Satze das hypothetische Wesen zu nehmen, will ich wirklich im Körper enthaltene Wärme jene Wärmemenge nennen, welche unter *allen* Umständen nur von der Temperatur des Körpers abhängig ist. Diese Wärmemenge ist offenbar ein Theil der Energie des Körpers, jedoch will ich nicht behaupten, dafs eine solche Wärmemenge im Körper nothwendig enthalten seyn müsse und noch weniger, dafs dieselbe bei gleicher Temperatur jedoch verschiedenen Aggregatformen des Körpers gleich grofs sey, dies zu beweisen ist vielmehr Aufgabe der weiteren Entwicklung. Ich kann nun auch erklären, was unter der wahren Wärmecapacität eines Körpers zu verstehen ist.

Digitized by Google

Unter der wahren Wärmecapacität oder kürzer der Wärmecapacität eines Stoffes, will ich den Differentialquotient der in der Gewichtseinheit des Körpers wirklich vorhandenen Wärme nach der Temperatur genommen, verstehen. Die Wärmecapacität kann daher nur constant oder eine Funktion der Temperatur seyn.

Um kurz seyn zu können, benutzte ich die Bezeichnung wie sie Clausius in seiner klassischen Abhandlung IX gebraucht und setze voraus, dafs in der Zustandsgleichung des Körpers die Temperatur t und das specifische Volumen v als unabhängig Veränderliche gewählt sind, somit die Spannkraft p durch

$$(1) \quad \ldots \ldots \quad p = f(v, t)$$

ausgedrückt sey. In diesem Falle ist das Element der dem Körper zuzuführenden Wärmemenge

$$(2) \quad \ldots \ldots \quad dQ = \frac{\partial Q}{\partial t} dt + \frac{\partial Q}{\partial v} dv;$$

und die Anwendung der zwei Grundsätze führt auf die Beziehungen

$$(3) \quad \ldots \ldots \quad \frac{\partial Q}{\partial v} = A T \frac{\partial p}{\partial t};$$

$$(4) \quad \ldots \ldots \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right) = A T \frac{\partial^2 p}{\partial t^2};$$

$$(5) \quad \ldots \ldots \quad T = (a + t).$$

(Siehe Clausius Abhandlungen 2. Band, Abhandlung IX, Seite 13, Gleichung 23.)

Nun ist aber $\frac{\partial Q}{\partial t}$ offenbar die specifische Wärme bei constantem Volumen, welches bei der partiellen Differentiation vorausgesetzt ist. Bezeichne ich sie wie üblich mit c_v, so geht die Gleichung (4) über in:

$$\frac{\partial (c_v)}{\partial v} = A T \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

Um hieraus die specifische Wärme bei constantem Volumen zu erhalten, mufs die Gleichung partiell nach v in-

Digitized by Google

tegrirt werden und dem Integrale eine Funktion der ***Temperatur allein*** als Summand vorgesetzt werden.

Als Zeichen dafür, dafs ein Integral ein partielles ist, will ich die betreffende Veränderliche, auf welche sich das Integral bezieht, in Form einer oberen Gränze schreiben, weshalb nun

$$c_v = \varphi(t) + AT\int^{v}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,dv \quad \text{ist.}$$

Die natürliche Temperatur T ist bei der Integration als Constante zu betrachten, weil t von v unabhängig ist. Es ist klar, dafs nach der Definition $\varphi(t)$ die Wärmecapacität bedeutet, wenn vorläufig vorausgesetzt wird, dafs die Zustandsveränderung des Körpers ohne Veränderung der Aggregatform vor sich gehe. Der Kürze wegen will ich $\varphi(t)$ durch k bezeichnen, jedoch darf nicht vergessen werden, dafs k eine Funktion der Temperatur, jedoch auch nur dieser allein ist. Sonach wird

$$(6) \quad \ldots \quad c_v = k + AT\int^{v}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,dv,$$

und die Gleichung (2) übergeht in

$$(7) \quad dQ = \left[k + AT\int^{v}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,dv\right]dt + AT\frac{\partial p}{\partial t}\,dv.$$

Man erkennt zunächst, dafs das Glied

$$k\,dt$$

allemal integrirt werden kann, und das Integral

$$C + \int k\,dt$$

ist nach der vorausgeschickten Definition die im Körper wirklich vorhandene Wärmemenge. Die Glieder

$$AT\left[dt\int^{v}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,dv + \frac{\partial p}{\partial t}\,dv\right]$$

Digitized by Google

können allgemein nicht integrirt werden, sondern es müssen die wahren Umstände der Erwärmung bekannt seyn, so daſs mit Hülfe deren und der Zustandsgleichung (1) entweder die Temperatur oder das Volumen eliminirt werden könne. Unter allen Umständen integrabel ist der in der Klammer stehende Ausdruck:

$$d\,t\int_{v}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,d\,v+\frac{\partial p}{\partial t}\,dv.$$

Denn setzt man vorübergehend

$$\int_{v}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,d\,v=P$$

und

$$\frac{\partial p}{\partial t}=Q,$$

so erhält man

$$P\,d\,t+Q\,d\,v,$$

worin P und Q der Bedingung der Integrabilität

$$\frac{\partial P}{\partial v}=\frac{\partial Q}{\partial t}=\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

entsprechen, weshalb das Integral nach Herr's Lehrbuch der höheren Mathematik, 2. Band 1. Auflage, Seite 509, Gleichung (4)

$$J=\int_{v}Q\,d\,v+\int_{t}d\,t\left(P-\int_{v}\frac{\partial Q}{\partial t}\,dv\right)=\int_{v}\frac{\partial p}{\partial t}\,dv$$

$$+\int_{t}d\,t\left\{\int_{v}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,dv-\int_{v}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,d\,v\right\}=\int_{v}\frac{\partial p}{\partial t}\,d\,v$$

somit

$$A\,T\left[d\,t\int_{v}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,dv+\frac{\partial p}{\partial t}\,d\,v\right]=A\,T\,d\int_{v}\frac{\partial p}{\partial t_0}\,dv.$$

Das dem partiellen Integrale vorgesetzte Differentialzeichen d bedeutet das vollständige Differentiale und muſs die vollständige Differentiation den Ausdruck vor der Integration geben, was auch wirklich der Fall ist, man erhält nämlich:

Digitized by Google

$$A\,T\int^{v}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,dv + A\,T\frac{\partial p}{\partial t}\,dv.$$

Man sieht nun sogleich, dafs das Differentiale der Entropie unter allen Umständen integrirt werden kann und zwar ist

$$dE = \frac{dQ}{T} = \frac{k\,dt}{T} + A\,d\int^{v}\frac{\partial p}{\partial t}\,dv,$$

somit

$$(8)\quad \ldots\quad E = \int_{t_0}^{t}\frac{k\,dt}{T} + A\left\{\int^{v}\frac{\partial p}{\partial t}\,dv\right\}_{v_0,\,t_0}^{v,\,t}$$

Das Integral $\int_{t_0}^{t}\frac{k\,dt}{T}$ läfst sich immer ermitteln, weil k und T nur Funktionen der Temperatur sind.

Es versteht sich wohl von selbst, dafs unter einer ausführbaren Integration hier immer eine solche verstanden wird, bei welcher sich die Trennung der Veränderlichen bewirken läfst, nicht aber eine Integration nach einer Veränderlichen, welche sich in geschlossener Form bewerkstelligen läfst, so z. B. kann es wohl vorkommen, dafs $\int_{t_0}^{t}\frac{k\,dt}{T}$ oder $\int^{v}\frac{\partial p}{\partial t}\,dv$ nur durch unendliche Reihen ausdrückbar sind, deshalb sind sie dennoch als allgemein ausführbare Integrale zu betrachten, weil sie sich nur auf je eine Variable beziehen.

Ebenso läfst es sich nachweisen, dafs die Energie unter allen Umständen durch einen integrablen Ausdruck gegeben werden kann. Bekanntlich ist das Differentiale der Energie

$$dU = dQ - A\,p\,dv = k\,dt + dt\,A\,T\int^{v}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,dv + A\,T\frac{\partial p}{\partial t}\,dv - A\,p\,dv.$$

Digitized by Google

Setzt man wieder

$$T\int^{v}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,dv = P$$

und

$$T\,\frac{\partial p}{\partial t} - p = Q,$$

so ist

$$dt\,T\int^{v}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,dv + \left(T\frac{\partial p}{\partial t} - p\right)dv = P\,dt + Q\,dv,$$

und die Ausdrücke P und Q entsprechen der Bedingung der Integrabilität:

$$\frac{\partial Q}{\partial v} = \frac{\partial Q}{\partial t} = T\,\frac{\partial^2 p}{\partial t^2};$$

weshalb

$$J = \int^{v}\left(T\frac{\partial p}{\partial t} - p\right)dv + \int^{t} dt\left\{T\int^{v}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,dv - \int^{v} T\,\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,dv\right\}.$$

Da aber wegen der Unabhängigkeit von T und v

$$T\int^{v}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,dv - \int^{v} T\,\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,dv = 0,$$

so folgt

$$dU = k\,dt + A\,d\int^{v}\left(T\frac{\partial p}{\partial t} - p\right)dv,$$

und

$$(9)\quad U = \int_{t_0}^{t} k\,dt + A\left\{\int^{v}\left(T\frac{\partial p}{\partial t} - p\right)dv\right\}_{v_0,\,t_0}^{v,\,t}.$$

Betrachtet man v nicht mehr als unabhängig von t, d. h. setzt man die Kenntnifs der näheren Umstände der Erwärmung voraus, so giebt die Gleichung (7) die specifische Wärme des Körpers unter den bestimmten Umständen

Digitized by Google

$$h = \frac{dQ}{dt} = k + AT\int^{v}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,dv + AT\frac{\partial p}{\partial t}\,\frac{dv}{dt}.$$

Erfolgt die Erwärmung bei constantem Drucke, so ist:

$$dp = o = \frac{\partial p}{\partial t}\,dt + \frac{\partial p}{\partial v}\,.\,dv,$$

somit

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)}{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)}.$$

Setzt man diesen Werth von $\frac{dv}{dt}$ ein, so kommt aus der Gleichung h

$$(10)\quad c_p = k + AT\int^{v}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,dv - AT\,\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2}{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)}.$$

Wie man sieht, ist die specifische Wärme eines, die Aggregatform nicht ändernden Stoffes, durch die Wärmecapacität und Zustandsgleichung unten allen Umständen bestimmt. Die Wärmecapacität aber kann, so lange deren Zusammenhang mit anderweitigen physikalischen Eigenschaften der Stoffe nicht bekannt ist, nur durch Versuche ermittelt werden und es ist zwar sehr, sehr wahrscheinlich, dafs sie constant ist, aber endgültig erwiesen ist dies vorläufig noch nicht.

Durch Anwendung der obigen Gleichungen auf die permanenten Gase erhält man keine neuen Resultate, sondern nur solche Beziehungen, welche auf andere Art, wenn auch nicht so einfach und correct erhalten wurden.

Die Zustandsgleichung ist für permanente Gase

$$p = \frac{RT}{v},$$

daher

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{R}{v},\quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = o,$$

weshalb nach Gleichung (6)

$$c_p = k,$$

Digitized by Google

d. h. die Wärmecapacität der permanenten Gase ist zugleich deren specifische Wärme bei constantem Volumen. Zugleich erkennt man, dafs dies nur dann der Fall seyn kann, wenn die Zustandsgleichung des Körpers die Temperatur nur in linearer Dimension enthält. Die specifische Wärme bei constantem Drucke wird, weil

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{RT}{v^2}$$

$$c_p = k + AT\frac{\left(\frac{R}{v}\right)^2}{\frac{RT}{v^2}} = k + AR.$$

Nun ist aber c_p für permanente Gase constant, daher dies auch für die Wärmecapacität gilt

$$k = c_p - AR.$$

Die in einem permanenten Gase wirklich vorhandene Wärmemenge ist

$$W = C + kt.$$

Nimmt man mit Redtenbacher an, dafs bei — 273° C. jene moleculare Bewegung, welche wir Wärme nennen, wirklich Null ist, so ist

$$C = k\,273,$$

daher

$$W = kT = \frac{kpv}{R}.$$

Weil ferner

$$\frac{c_p}{k} = \frac{c_p}{c_v} = 1{,}41$$

für alle permanente Gase seyn soll, so mufs

$$R = \frac{c_p - k}{A} = \frac{0{,}41}{A}k$$

und

$$W = \frac{A}{0{,}41}pv$$

seyn.

Setzt man endlich für A den von Joul bestimmten Werth

Digitized by Google

$$A = \frac{1}{423{,}6}$$

ein, so wird in runder Zahl

$$W = \frac{p\,v}{174} \text{ Calorien.}$$

Ferner ist nach Gleichung (8):

$$E = k \log \frac{a+t}{a+t_0} + A\,R \log \frac{v}{v_0} = k \log \frac{v^{0,41}\,T}{v_0^{0,41}\,T_0},$$

wogegen die Energie einfach

$$U = k\,(t - t_0)$$

wird.

Reich kann die Ausbeute genannt werden, welche man durch Anwendung der entwickelten Gleichungen auf solche Stoffe, deren Aggregatform durch die Wärme verändert wird, erhält. — Bei der Aggregatformveränderung geht der Stoff durch zwei Gränzzustände, welche ich gesättigte und vorgewärmte Zustände nennen will. Vorgewärmt wäre ein fester Körper oder eine Flüssigkeit, wenn die geringste Wärmezufuhr bei constantem äufseren specifischen Druck einen Theil des Körpers schmelzen, resp. verdampfen macht, wogegen die entstehende Flüssigkeit resp. der Dampf gesättigt wäre.

Charakteristisch für die Aggregatformveränderung ist die Discontinuität des Volumens, wogegen die Spannkraft und die Temperatur während der Aggregatformveränderung constant und im innigsten Zusammenhange stehen bleiben. Der mathematische Ausdruck für diese Erscheinung ist demnach:

$$(11) \quad \ldots\ldots \quad \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right) = o$$

oder

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p = \pm \infty.$$

Uebrigens bedingt die eine der Gleichungen immer die Zweite, wovon man sich folgends überzeugt.

Aus der Zustandsgleichung folgt nämlich:

Digitized by Google

$$dp = \frac{\partial p}{\partial v}\, dv = \frac{\partial p}{\partial t} \cdot dt.$$

Weil aber während der Aggregatformveränderung der Druck constant bleibt trotz der Wärmezufuhr, ist

$$dp = o$$

und

$$\frac{\partial p}{\partial v} = o,$$

daher

$$o = \frac{\partial p}{\partial v}\left(\frac{dv}{dt}\right)_p + \frac{\partial p}{\partial t},$$

somit

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)}{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)} = -\frac{\frac{\partial p}{\partial t}}{\infty} = o$$

oder

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)}{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)} = -\frac{\frac{\partial p}{\partial t}}{o} = \pm\infty.$$

Ich habe schon in meinen Vorlesungen über die mechanische Wärmetheorie auf die Bedingungen (11) für den gesättigten Zustand hingewiesen, folgerte dieselben aber nur aus der Erklärung des gesättigten Dampfes; soweit ich indessen die Literatur über diesen Gegenstand kenne, finden sich dieselben nirgends ausgesprochen oder benützt; ich kann daher die Priorität ohne weiteres für mich in Anspruch nehmen. Obwohl die Bedingungen (11) eigentlich der mathematische Ausdruck dessen ist, was wir mit Worten jeder Zeit erklären, dafs nämlich die Aggregatformveränderung in der Art vor sich gehe, dafs bei constanter Temperatur und Spannung eine bedeutende Volumenvermehrung oder Verminderung eintritt, somit jene Bedingungen nicht anzuzweifeln sind, will ich doch nicht unterlassen, auf jene Experimente hinzuweisen, welche dieselben bestätigen. Fairbairn und Tate bemerkten bei ihren Versuchen mit überhitztem Wasserdampfe, dafs der Ausdehnungscoëfficient bei Beginn der Ueberhitzung

Digitized by Google

sehr grofs sey, jedoch sehr rasch und wie sie glaubten unregelmäfsig abnehme. Die wahrgenommene Erscheinung findet ihre einfache und naturgemäfse Erklärung in den Bedingungen (11). Der Ausdehnungscoëfficient nähert sich bei abnehmender Ueberhitzung sehr rasch der Gränze Unendlich; wenn daher der Grad der Ueberhitzung auch nur wenig verschieden und die Temperaturzunahme mit einem geringen Fehler behaftet war, so mufste der Quotient

$$\frac{\Delta v}{v \Delta t},$$

welchen die genannten Experimentatoren für den Ausdehnungscoëfficienten ansahen, sehr verschiedene Werthe haben und sehr grofse Unregelmäfsigkeiten zeigen.

Die Bedingungen (11) geben das Mittel an die Hand, die Richtigkeit der bis nun für den überhitzten Wasserdampf aufgestellten Zustandsgleichungen zu prüfen.

Die bedeutendsten sind wohl jene von Dr. Zeuner und Prof. Schmidt aufgestellten. Grashof hat gezeigt, dafs beide Gleichungen bis zu einem Punkte sich in ganz gleicher Weise ableiten lassen, dafs sich die Eine jedoch auf die Annahme $c_p = f(p)$, die Andere aber auf $c_v = f(v)$ basire.

Dieselben nehmen dann folgende Formen an:

$$p v = B T - C p^m$$

und

$$(B T - p v) v^m = C.$$

Aus ersterer zieht man durch partielle Differentiation von p nach v:

$$p + v \frac{\partial p}{\partial v} = - m C p^{m-1} \frac{\partial p}{\partial v}$$

und mit Rücksicht auf $\frac{\partial p}{\partial v} = 0$ als Charakteristicum für den gesättigten Zustand, die Beziehung

$$p = o$$

statt $p = f(t)$, wie es der Natur der Sache nach resultiren sollte. Die Annahme $c_p = \text{Const.}$ ist daher prinzipiell

Digitized by Google

unmöglich und wenn die Resultate der Gleichung

$$p\,w = B\,T - C\,p^m$$

in manchen Punkten mit den Versuchsresultaten doch stimmen, so rührt dies daher, dafs die Constanten B und C danach bestimmt sind. Aus der zweiten Gleichung

$$(B\,T - p\,v)\,v^m = C$$

erhält man durch den gleichen Vorgang:

$$p + v\,\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{m\,C}{v^{m+1}},$$

daher als Bedingung der Sättigung:

$$p = \frac{m\,C}{v^{m+1}}.$$

Obige Gleichung kann richtig seyn, weil nach der Wahrnehmung Dr. Zeuner's, zwischen der Spannkraft und dem Volumen eine Beziehung von ähnlicher Form besteht. Eliminirt man aus

$$(B\,T - p\,v)\,v^m = C$$

und

$$p = \frac{m\,C}{m+1}$$

das Volumen, so resultirt:

$$p = D\,T^{\frac{m+1}{m}}$$

als Beziehung zwischen Spannkraft und Temperatur des gesättigten Dampfes, welche jedoch, es mag F und m wie immer gewählt werden, die Versuche Regnault's nicht genau genug darstellt. Die Annahme $c = f(v) = \text{Const.}$ steht daher der Wahrheit näher als $c_1 = f(p) = \text{Const.}$, obwohl auch diese die Genauigkeit der Experimente nicht erreicht, daher selbst in praktischen Fällen nicht mit genügender Annäherung angewendet werden kann.

Nachdem die Zustandsgleichungen der überhitzten Dämpfe nicht bekannt sind, lassen sich auch die übrigen Gröfsen für dieselben noch nicht bestimmen, wohl aber

Digitized by Google

kann man diese Gröfsen für den Sättigungszustand ermitteln, weil für dieselben $\frac{\partial p}{\partial t}$ und somit auch $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ nur Funktionen der Temperatur sind.

Die Gleichungen (6) bis (10) gehen nun in Folgende über:

$$(6') \quad \ldots \quad c_v = k + A\,T\,\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,v,$$

$$(7') \quad . \quad dQ = \left[k\,A + A\,T\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,v\right]dt + A\,T\frac{\partial p}{\partial t}\,.\,dv\,.$$
$$= k\,dt + A\,T\,d\left(\frac{\partial p}{\partial t}\,v\right),$$

$$(8') \quad . \quad E = \int_{t_0}^{t}\frac{k\,dt}{T} + A\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial t}\,v\right)_t - \left(\frac{\partial p}{\partial t}\,v_0\right)_{t_0}\right\},$$

$$(9') \quad U = \int_{t_0}^{t}\frac{k\,dt}{T} + A\left\{T\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_t v - \left(T\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{t_0} v_0 - pv + p_0 v_0\right\},$$

$$(10') \quad . \quad c_p = k + A\,T\,\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,v - A\,T\,\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^2}{0} = \infty.$$

Aus der Gleichung (10') insbesondere sieht man, dafs die specifische Wärme bei constantem Drucke des gesättigten Zustandes (gleichgültig, ob der Körper Dampf oder Flüssigkeit), ebenso jene des vorgewärmten Zustandes, unendlich ist. Auch für diese Erscheinung haben wir experimentelle Bestätigungen. De la Roche und Bérard geben als specifische Wärme des überhitzten Wasserdampfes bei constantem Drucke 0,847, wogegen Regnault bei fortschreitender Ueberhitzung die Zahlen 0,48111, 0,48080, 0,47963 giebt.

Ich glaube nun, dafs es weit wahrscheinlicher sey, die specifische Wärme des Dampfes bei constantem Drucke ändere sich stark, als dafs so eminente Experimentatoren wie Regnault, de la Roche und Bérard so verschiedene Zahlen für eine constante Gröfse finden würden, ich

Digitized by Google

glaube entschieden behaupten zu können, jene starke Differenzen rühren daher, dafs Regnault viel stärkere Ueberhitzung anwandte als de la Roche und Bèrard.

Ehe ich in der Anwendung der Gleichung 6' bis 10' weiter gehe, will ich noch nachweisen, dafs die wahre Wärmecapacität unabhängig ist von der Aggregatform des Körpers. Zu diesem Ende bestimme ich die specifische Wärme des fortwährend gesättigt bleibenden Zustandes nach Gleichung (7'):

$$h = \frac{dQ}{dt} = k + A\,T\frac{d}{dt}\left(s\,\frac{\partial p}{\partial t}\right),$$

wogegen jene des vorgewärmten Stoffes, wenn derselbe fortwährend vorgewärmt bleibt

$$h' = k' + A\,T\,\frac{d}{dt}\left(\sigma\,\frac{\partial p}{\partial t}\right),$$

wenn man zur bessern Unterscheidung das Volumen des entstehenden gesättigten Zustandes mit s, jenes des vorgewärmten sich verändernden Aggregatzustandes aber mit σ bezeichnet. Weil für beide Formen $\frac{\partial p}{\partial t}$ denselben Werth besitzt, kann man schreiben:

$$h - h' = k - k' + A\,T\,\frac{d}{dt}\left((s-\sigma)\,\frac{\partial p}{\partial t}\right).$$

In der schon erwähnten Abhandlung IX entwickelt aber Clausius die Gleichungen (52), (53) und (54) (S. 27), welche nach der hier eingeführten Schreibweise folgends ausgedrückt sind:

$$\frac{dr}{dt} + h' - h = A\,u\,\frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\frac{dr}{dt} + h' - h = \frac{r}{T}$$

$$r = A\,T\,u\,\frac{\partial p}{\partial t} \qquad u = (s-\sigma).$$

Die mittlere der Gleichungen giebt aber:

$$h - h' = T\,\frac{d}{dt}\left(\frac{r}{T}\right)$$

Digitized by Google

und mit Rücksicht auf die Letzte:

$$h - h' = A\ T \frac{d}{d t} \left((s - \sigma) \frac{\partial p}{\partial t} \right),$$

woraus denn folgt, dafs $h - h' = o$ seyn mufs.

Hiermit ist bewiesen, dafs die wahre Wärmecapacität der Körper unabhängig ist von deren Aggregatform, oder wie sich Clausius ausdrückt, von der Anordnung der Bestandtheile. Ist dies bei der Wärmecapacität der Fall, so mufs es auch von der im Körper wirklich vorhandenen Wärme gelten; was Clausius als Hypothese aufstellte, ist nun erwiesene Thatsache.

Es frägt sich nun, wie die Wärmecapacität der Körper bestimmt werden kann, ohne Kenntnifs der Zustandsgleichungen nur mit Hülfe jener Daten, welche die bisherigen Experimente geliefert haben.

Hierüber gibt die Gleichung 7' Aufschlufs. Erwärmt man ein Gemische von Dampf und Flüssigkeit bei constantem Volumen, so ist der Dampf gesättigt, die Flüssigkeit fortwährend vorgewärmt, weshalb die Spannkraft nur von der Temperatur abhängig seyn wird.

Aus (7') ergiebt sich dann:

$$d Q = k\, d t + A\, T v \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\, d t$$

und

$$Q = \int_{t_0}^{t} k\, dt + A v \int_{t_0}^{t} T \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\, d t = \int_{t_0}^{t} k\, dt + \Big\{ A v T \frac{\partial p}{\partial t} \Big\}_{t_0}^{t} - A v \int_{t_0}^{t} \frac{\partial p}{d t}\, d t$$

$$Q = \int_{t_0}^{t} k dt + A v \Big(T \frac{\partial p}{\partial t} - p \Big)_t - A v \Big[\Big(T \frac{\partial p}{\partial t} \Big)_{t_0} - p_0 \Big]_t.$$

Unbekannt bleibt beim Versuche $\int_{t_0}^{t} k\, d t$ und kann somit ermittelt werden.

Digitized by Google

Es fehlt indessen nicht an Gründen, welche für die Constanz von k sprechen; so die geringe Veränderlichkeit der specifischen Wärme bei constantem Volumen, so wie jener bei constantem Drucke, wenn der Zustand der Flüssigkeit nur einigermafsen verschieden vom Vorgewärmten oder Gesättigten. Näherungsweise läfst sich k für jene Stoffe bestimmen, für welche die specifische Wärme der Flüssigkeit bei constantem Drucke bekannt ist: Freilich verlieren die betreffenden Ausdrücke stark an Glaubwürdigkeit dadurch, dafs sie für die, dem betreffenden Drucke entsprechende Sättigungs- und Vorwärmungstemperatur nicht unendlich werden; immerhin sind diese Ausdrücke aber zuverlässiger als die bisher aufgestellten Zustandsgleichungen der Flüssigkeiten und überhitzten Dämpfe.

Setzt man k constant voraus, so wird die Entropieveränderung der Flüssigkeit bei constantem Drucke, nach Gleichung (8)

$$E = k \log n a t \frac{a+t}{a+t_0} + A \left\{ \int_{v_0, t_0}^{v} \frac{\partial p}{\partial t} d v \right\}_{v, t}.$$

Ferner kann man die specifische Wärme bei constantem Drucke ausdrücken durch

$$c_p = l + m t + n t^2$$

somit

$$E = \int_{t_0}^{t} \frac{d t (l + m t + n t^2)}{T} = (l - a m + n a^2) \log n a t \frac{a+t}{a+t_0} + \left\{ m t + \frac{n t^2}{2} \right\}_{t_0}^{t}$$

und zwar müfste nun

$$l - a m + a^2 n = k$$

seyn, wenn die zwei Ausdrücke für jede Temperatur gleich seyn sollen.

Digitized by Google

Nachdem für Wasser

$$c_p = 1 + 0{,}00004\,t + 0{,}0000009\,t^2$$

so ist

$$k = 1{,}056,$$

für Aether . . . . . $c_p = 0{,}52901 + 0{,}0005918\,t$ und $k = 0{,}3673$

„ Alkohol . . . . . $c_p = 0{,}54754 + 0{,}0022436\,t + 0{,}000006618\,t^2$ und $k = 0{,}4285$

„ Aceton . . . . . $c_p = 0{,}50643 + 0{,}0007930\,t$ „ $k = 0{,}2899$

„ Chloroform . . . . $c_p = 0{,}23235 + 0{,}0001014\,t$ „ $k = 0{,}2046$

„ Chlorcarbon . . . . $c_p = 0{,}19798 + 0{,}0001812\,t$ „ $k = 0{,}1496$

„ Schwefelkohlenstoff $c_p = 0{,}23523 + 0{,}0001630\,t$ „ $k = 0{,}1907.$

In der Theorie des gesättigten Wasserdampfes habe ich schon nachgewiesen, dafs man für Wasser $k = 1$ setzen kann, ohne dafs beträchtliche Fehler sich einschleichen würden.

Nachdem die für k gefundenen Zahlen ohnehin nur Näherungen sind, so kann man sie abrunden und setzen: für Wasser $k = 1$; Aether $k = 0{,}37$; Alkohol $k = 0{,}43$; Aceton $k = 0{,}29$; Chloroform $k = 0{,}20$; Chlorcarbon $k = 0{,}15$; Schwefelkohlenstoff $k = 0{,}29$. Ein Zusammenhang zwischen k und dem Moleculargewicht, wie denselben das Dulong'sche Gesetz ausspricht, scheint nicht zu bestehen, denn man erhält als Produkt aus der wahren Wärmecapacität k und dem Moleculargewicht m für Wasser $km = 18$; Aether $km = 27{,}34$; Alkohol $km = 19{,}78$; Aceton $km = 16{,}82$; Chloroform $km = 23{,}9$; Chlorcarbon $km = 23{,}1$; Schwefelkohlenstoff $mk = 14{,}44$.

In der Form, wie das Dulong'sche Gesetz gegenwärtig ausgesprochen wird, wonach das Produkt aus der specifischen Wärme bei constantem Volumen oder Druck und dem Moleculargewichte eine constante Zahl seyn soll, kann es überhaupt nicht bestehen, weil ich im Vorhergehenden nachgewiesen habe, dafs beide specifischen Wärmen ziemlich stark veränderlich sind, die bei constantem Drucke sogar der Gränze Unendlich sich nähert.

In einer früheren Arbeit habe ich nachgewiesen, dafs

Digitized by Google

man innerhalb der Versuchsgränzen für alle gesättigten Dämpfe setzen könne

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{p}{A\,C\,(b+t)\,(a+t)},$$

somit wäre

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{A\,C}\left\{\frac{\frac{\partial p}{\partial t}}{(b+t)(a+t)} - p\,\frac{(a+t)+(b+t)}{(b+t)^2\,(a+t)^2}\right\}$$

$$= \frac{p}{A\,C\,(a+t)^2\,(b+t)^2}\left\{\frac{1}{A\,C} - (a+b+2t)\right\}$$

und nach Gleichung (6')

$$c_v = k + \frac{v\,p}{C\,(a+t)\,(b+t)^2}\left\{\frac{1}{A\,C} - (a+b+2t)\right\}.$$

Speciell für Wasserdampf nimmt die Gleichung den folgenden numerischen Werth an:

$$c_v = 1 + \frac{p\,v}{C\,(b+t)}\left\{\frac{3366{,}48 - 2\,t}{(187{,}2+t)\,(273+t)}\right\},$$

worin

$$\frac{p\,v}{C\,(b+t)} = \frac{310129}{187{,}2+t}\left(\frac{187{,}2+t}{273+t}\right)^{2{,}676}$$

und die specifische Wärme bei constantem Volumen nähert sich bei abnehmender Ueberhitzung den Gränzen:

Für Nullgrad $c_v = 40{,}76$; für $t = 100$ $c_v = 16{,}87$; für $t = 200$ $c_v = 8{,}593$.

Aehnliche starke Aenderungen der specifischen Wärme bei constantem Volumen werden auch die gesättigten Dämpfe anderer Flüssigkeiten zeigen.

Schliefslich läfst sich noch die Entropie und Energie eines Gemisches von Dampf und Flüssigkeit in ganz bestimmter Form geben, wenn k als constant angesehen wird. Man findet aus Gleichung (8'):

$$E = k \log \frac{a+t}{a+t_0} + A\left\{\left(\frac{\partial p}{\partial t}\,v\right)_t - \left(\frac{\partial p}{\partial t}\,v\right)_{t_0}\right\}$$

$$U = k\,(t - t_0) + A\left\{T\frac{\partial p}{\partial t}\,v - pv\right\}_{t,v} - A\left\{T\frac{\partial p}{\partial t}v - pv\right\}_{t_0,v_0}.$$

Um die Gleichung (6) bis (10) auf die überhitzten Dämpfe anwenden zu können, müssen erst deren Zustands-

Digitized by Google

gleichungen ermittelt werden. Einige Anhaltspunkte über die Form derselben bieten die Bedingungen (11), allein ich will es noch nicht wagen mit den bezüglichen Gleichungen vor die Oeffentlichkeit zu treten, ehe ich mich von deren Richtigkeit in allen Richtungen überzeugt habe, weshalb ich mir dieselben für spätere Zeit vorbehalte.

Schemnitz, im Februar 1875.

V. *Der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie, abgeleitet aus dem ersten;* von *C. Szily in Budapest.*

(Vorgetragen in der am 10. Mai 1875 abgehaltenen Sitzung der ungarischen Akademie der Wissenschaften.)

Es giebt keine Theorie und es wird auch keine geben, welche nicht beweisbare, nicht erklärbare Grundannahmen entbehren könnte. Aber als um so vollkommener ist jedenfalls eine Theorie zu betrachten, je weniger dieselbe solcher nicht beweisbarer Annahmen bedürftig ist.

Die mechanische Wärmetheorie fufst nach ihrem heutigen Standpunkte auf zwei derartigen Hauptsätzen. Der erste (nach Mayer und Joule benannt) ist nichts Anderes als das universelle Princip der Erhaltung der Energie in seiner Anwendung auf die Wärme.

Der zweite Hauptsatz (der Carnot-Clausius'sche) läfst sich nicht so einfach ausdrücken und läfst sich auch nicht so leicht in den Rahmen eines allgemeinen physikalischen Princips einfügen als der zuerst erwähnte. Dieser zweite Hauptsatz lautet, nach der Formulirung von Clausius, folgendermafsen [1]):

„In allen Fällen, wo eine Wärmemenge in Arbeit verwandelt wird, und der diese Verwandlung vermittelnde Körper sich schliefslich wieder in seinem Anfangszustande

1) Pogg. Ann. 1854, Bd. 93.

Digitized by Google

befindet, mufs zugleich eine andere Wärmemenge aus einem wärmeren in einen kälteren Körper übergehen, und die Gröfse der letzteren Wärmemenge im Verhältnifs zur ersteren ist nur von dén Temperaturen der beiden Körper, zwischen welchen sie übergeht, und nicht von der Art des vermittelnden Körpers abhängig."

Offenbar kann ein derartig complicirter Satz, möge er noch so sehr mit Erfahrungs-Thatsachen im Einklang stehen, nicht als einfacher Axiom acceptirt werden. Man war daher gezwungen eine Hypothese zu suchen, die sich leichter ausdrücken, klarer vorstellen lasse als der zweite Hauptsatz, und aus welcher dann der letztere streng mathematisch abgeleitet werden könne. Man fand in der That eine Reihe derartiger Axiome zur Ableitung des zweiten Hauptsatzes.

Betrachten wir dieselben der Reihe nach wie sie successive in Vorschlag gebracht wurden. Der leichteren Uebersicht wegen vertheilen wir diese Hypothesen in zwei Gruppen. Die erste Gruppe umfafst jene Annahmen, welche sich im Allgemeinen auf das Verhalten der Wärme als Agens beziehen, ohne sich in die Art der Bewegung, die wir Wärme nennen, des Näheren einzulassen; während die zweite Gruppe diejenigen Hypothesen umfafst, die sich auf die Art der Bewegung beziehen.

In die Gruppe der thermischen Hypothesen gehören nun:

1) Das Clausius'sche Axiom, welches derselbe in seiner in Februar 1850 vor der Berliner Akademie gelesenen fundamentalen Abhandlung in Vorschlag brachte und später noch ausführlicher darlegte [1]): *„die Wärme kann nicht von selbst aus einem kälteren in einen wärmeren Körper übergehen."*

2) Das Thomson'sche Axiom [2]), welches so lautet: *„Es ist unmöglich, durch Wirkung lebloser Stoffe mechanische Arbeit zu erhalten, dadurch, dafs man irgend einen*

1) Pogg. Ann. 1850, Bd. 79.
2) *Edinb. Trans. XX*, und *Phil. Mag. Ser. IV. Vol.* 4.

Digitized by Google

Naturkörper bis unter die Temperatur der kältesten der umgebenden Gegenstände abkühlt."

3) Die zweite Clausius'sche Hypothese, welche derselbe in seiner auf die Disgregation bezüglichen Abhandlung folgendermafsen aussprach:[1]) „*die mechanische Arbeit, welche die Wärme bei irgend einer Anordnungsänderung eines Körpers thun kann, ist proportional der absoluten Temperatur, bei welcher die Aenderung geschieht.*"

4) Belpaire's Axiom[2]), welches so lautet: „*ist die Temperatur unendlich klein, so kann die bei einer isothermen Transformation in Arbeit umgesetzte Quantität der Energie ebenfalls nur unendlich klein seyn.*"

Das sind nun jene thermischen Hypothesen, welche meines Wissens zur Ableitung des Carnot-Clausius'schen Principes in Vorschlag gebracht worden sind. Die zu demselben Zwecke vorgeschlagenen dynamischen Hypothesen umfafst die zweite Gruppe, und zwar:

5) Die im Jahre 1850 von Rankine[3]) aufgestellte Hypothese der sogenannten Molecular-Wirbeln, nach welcher sich die Körpertheilchen in kreisförmigen Strömen bewegen.

6) Die Hypothese der circulirenden Ströme (*circulating streems of any figure whatever*), welche ebenfalls Rankine 1851 entwickelte und 1865 bedeutend vereinfachte[4]).

7) Die Hypothese der periodischen Bewegungen von Boltzmann 1866 zur Ableitung des zweiten Hauptsatzes benutzt[5]).

8) Die Hypothese der quasi-periodischen Bewegungen, welche 1871 zuerst Clausius[6]) aufgestellt und seitdem

1) Pogg. Ann, 1862, Bd. 116.
2) *Bull. de Belg.* 1872.
3) *Edinb. Trans. XX.*
4) *Philos. Mag. Ser. IV. Vol.* 30.
5) Sitzungsberichte der Wiener Akademie Bd. 53.
6) Pogg. Ann. Bd. 142.

Digitized by Google

in mehreren grofsen Abhandlungen eingehender entwickelt hat.

Das sind nun jene Hypothesen, welche zur Ableitung des zweiten Hauptsatzes bis dato benutzt wurden. Unter diesen fanden die Axiome von Clausius und Thomson als die plausibelsten der oben angeführten Hypothesen den meisten Anklang.

Nun wirft sich aber die Frage auf, ob denn überhaupt eine neue Hypothese zur Ableitung des zweiten Hauptsatzes nothwendig sey, und ob sich nicht die streng mathematische Ableitung desselben vermittelst des ersten Hauptsatzes allein durchführen liefse. Gelingt dies, so wäre die Wärmetheorie thatsächlich auf einen einzigen Hauptsatz gegründet, auf das universale Princip der Erhaltung der Energie.

Dieses Problem ist bis jetzt nicht nur nicht gelöst, sondern fast kaum in Erwägung gezogen worden. Meines Wissens sprechen sich nur Rankine und Clausius, der letztere aber nur nebenbei, über diese Frage aus. Rankine äufsert sich folgendermafsen: „*Carnot's law is not an independent principle in the theory of heat, but is deducible, as a consequence from the equations of the mutual conversion of heat and expansive power.*“ (*Phil. Mag. Ser. IV. Vol.* 7) und fügt hinzu, dafs er dies im ersten Theile seiner Abhandlung nachgewiesen habe; vergifst aber hiebei, dafs er in dem citirten Theile seiner Arbeit einen ganz bedeutend hypothetischen Standpunkt einnimmt, indem er unter Anderen die Temperatur folgendermafsen definirt: Die Temperatur ist eine Funktion des Quadrates der Geschwindigkeit der Molecular-Wirbeln, dividirt durch den Elasticitätscoëfficienten der Atom-Atmosphären.“ Es ist sehr natürlich, dafs eine auf eine derartig complicirte Hypothese gegründete Ableitung von Niemanden acceptirt wurde. Rankine's Folgerung ist demnach eine blofse Behauptung, deren Beweisführung er schuldig blieb.

Ganz nebensächlich berührt Clausius die aufgeworfene Frage in einem Vortrage, den er gelegentlich der

Digitized by Google

41. Versammlung der deutschen Naturforscher und Aerzte in Frankfurt hielt. Clausius drückt sich folgendermafsen aus: „Doch giebt es noch einen zweiten Satz, welcher in jenem Satze (in dem ersten Hauptsatze) noch nicht mit enthalten ist, sondern besonders bewiesen werden mufs, und welcher eben so wichtig ist wie jener, indem beide Sätze zusammen erst die vollständige Grundlage der mechanischen Wärmetheorie bilden."

Wie wir sehen, widerspricht die Aeufserung von Clausius direct der Behauptung Rankine's. Letzterer behauptet, dafs der zweite Satz aus dem ersten abgeleitet werden kann; Clausius hingegen spricht sich dahin aus, dafs der zweite Hauptsatz im ersten nicht enthalten sey.

Der Zweck gegenwärtiger Abhandlung ist, diese wichtige Frage eingehend zu prüfen, und nachzuweisen, dafs der zweite Hauptsatz ohne jede weitere Hypothese direct aus dem ersten Satze allein abgeleitet werden könne.

I.

Jeden Körper kann man als das Aggregat sehr vieler materieller Punkte betrachten, die sich unter dem Einflusse innerer und äufserer Kräfte, nach gewissen unbekannten Gesetzen bewegen. Die Natur dieser inneren Bewegung betreffend, werden wir uns an gar keine Hypothese binden; unsere einzige Annahme soll nur die seyn, dafs die Theilchen sich nicht in Ruhe befinden, sondern sich irgendwie bewegen.

Zur Charakterisirung dieser inneren Bewegung, oder mit anderen Worten zur Bestimmung des thermischen Zustandes eines Körpers, sind bekanntlich zwei unabhängige Variabeln nothwendig. Bezeichnen wir die Variabeln mit ξ und η, so bleibt der Zustand des Körpers unverändert, so lange sich weder ξ noch η ändert; sobald aber entweder ξ oder η, oder beide zugleich eine Veränderung erleiden, so ändert sich gleichzeitig auch der Zustand des betreffenden Körpers.

So lange der thermische Zustand eines Körpers unver-

Digitized by Google

ändert bleibt, so lange bleibt auch, meiner Auffassung nach, *die gesammte lebendige Kraft* (T) *für sich, und die gesammte potentielle Energie* (U) *für sich constant.*

Wenn also der Zustand des Körpers durch die zwei unabhängigen Variabeln ξ und η gegeben gedacht wird, so ist, so lange

$$\delta \xi = o \qquad \text{und} \qquad \delta \eta = o$$

ebenso

$$\delta T = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und

$$\delta U = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Masse irgend eines materiellen Punktes des Körpers sey m; ferner seyen zur Zeit $t = o$, seine rechtwinkligen Coordinaten: x, y, z; die Geschwindigkeitscomponenten x', y', z' und die Beschleunigungscomponenten: x'', y'', z''. Schon im nächsten Augenblicke, sagen wir nach der Zeit δt, wird die Lage, Geschwindigkeit, Beschleunigung dieses Punktes eine andere seyn, und zwar $x + \delta x \ldots\ldots x' + \delta x' \ldots\ldots x'' + \delta x''$. Nach der Gleichung (1) mufs aber

$$\delta T = \Sigma m (x' \delta x' + y' \delta y' + z' \delta z') = o \quad . \quad (1a)$$

und nach der Gleichung (2)

$$\delta U = - \Sigma m (x'' \delta x + y'' \delta y + z'' \delta z) = o. \quad (2a)$$

Durch Verbindung der beiden letzteren Gleichungen erhalten wir leicht eine Beziehung zwischen der Zeitvariation und den Variationen der Coordinaten. Multiplicirt man nämlich (1a) und (2a) mit dt und addirt, so ist:

$$\Sigma m (x' \delta x' + \ldots\ldots - x'' \delta x - \ldots\ldots) dt = o$$

oder der Bedeutung von x' und x'' gemäfs:

$$\Sigma m (dx \delta x' + \ldots\ldots - dx' \delta x - \ldots\ldots) = o,$$

nun ist

$$dx' \delta x = d (x' \delta x) - x' d \delta x$$

somit

$$\Sigma m (dx \delta x' + \ldots\ldots + x' \delta dx + \ldots\ldots) = d \Sigma m (x' \delta x + \ldots\ldots)$$

Digitized by Google

ferner

$$d x\, \delta x' + x' \delta\, d x = \delta (x'\, d x) = \delta (x'^2\, d t)$$

folglich

$$d \Sigma m (x' \delta x + \ldots\ldots) = \delta (2\, T\, d t).$$

So lange der Zustand des Körpers constant bleibt, ist auch T constant; somit nach unbestimmter Integration:

$$\Sigma m (x' \delta x + \ldots\ldots) = 2\, T \delta t + \text{const.}$$

Nun ist aber für

$$\delta t = o$$

auch

$$\delta x = o \ldots\ldots,$$

somit

$$\Sigma m (x' \delta x + y' \delta y + z' \delta z) = 2\, T \delta t \quad . \quad (3).$$

Die Gleichungen (1), (2) und (3) bleiben so lange und sind auch nur so lange gültig, bis sich der Zustand des Körpers nicht ändert.

II.

Wir wollen jetzt zur Betrachtung der Zustandsänderungen übergehen.

Es sey der anfängliche Zustand des Körpers (der Zustand vor der Aenderung) durch die Constanten ξ_0 und η_0 bestimmt. Die Coordinaten irgend eines Theilchens m im Augenblicke $t = o$ seyen $x_0\ y_0\ z_0$; die Geschwindigkeitscomponente $x'_0\ y'_0\ z'_0$; die gesammte lebendige Kraft T_0 und die gesammte potentielle Energie U_0. Würde der Zustand des Körpers unverändert bleiben, so würden die Gleichungen (1), (2) und (3) fortwährend bestehen.

Nun aber wollen wir von der Zeit $t = o$ an, dem Körper successive Energie zuführen. In Folge dessen wird die lebendige Kraft und die potentielle Energie des Körpers vermehrt und im Allgemeinen auch äufsere Arbeit gethan. In dem Maafse, in welchem wir dem Körper mehr und mehr Energie zuführen, wird auch der Zustand des Körpers mehr und mehr verändert. Nehmen wir an, dafs die Reihenfolge der Zustandsänderungen der-

Digitized by Google

maafsen geregelt sey, dafs die Zustandsvariablen der Gleichung $\eta = f(\xi)$ in einem jeden Augenblicke Genüge leisten, oder mit andern Worten, dafs die Aufeinanderfolge der Zustandsänderungen — sagen wir die Bahn des Zustandes — durch die Funktion f gegeben sey. Setzen wir die Energiezufuhr so lange fort, bis die Zustandsvariablen der Relation $\eta = f(\xi)$ entsprechend, die Werthe ξ_1 und η_1 annehmen. Die bis dahin zugeführte Energiemenge sey Q. Mit dem Aufhören der Energiezufuhr höre auch die Zustandsänderung auf; von da an behalten die Zustandsvariablen ξ_1 und η_1 und mit diesen auch die lebendige Kraft T_1 und die potentielle Energie U_1 ihre jetzigen Werthe.

Wir haben somit den Körper von dem Anfangszustande $(\xi_0\ \eta_0)$ auf eine bestimmte Art und Weise in den Endzustand $(\xi_1\ \eta_1)$ hinübergeleitet, und haben ihm unterdessen die Energie Q zugeführt. Ist der Anfangszustand $(\xi_0\ \eta_0)$, Endzustand $(\xi_1\ \eta_1)$ und die Bahn der Zustandsänderungen (d. h. die Funktion f) gegeben, so ist auch die dem Körper zuzuführende Gesammtenergie Q eindeutig bestimmt. Geschehe die Energiezufuhr schneller oder langsamer, die Summe der zuzuführenden Energie Q bleibt unverändert, wenn nur der Anfangspunkt, Endpunkt und die Art der Bahn unverändert bleibt; mit andern Worten *der Anfangszustand, Endzustand und die Bahn der Zustandsänderungen bestimmen die zuzuführende Gesammtenergie Q vollständig, die Zeitdauer des Ueberganges hingegen ist dadurch nicht bestimmt.* Bei demselben Q kann die Zeitdauer des Ueberganges — der mittleren Geschwindigkeit der Energiezufuhr entsprechend — einen beliebigen Werth zwischen o und ∞ annehmen. Bezeichnen wir die Zeitdauer des Ueberganges mit t. Wie lang nun diese Zeitdauer sey, oder wie grofs t sey, hängt ganz davon ab, wie wir die mittlere Geschwindigkeit der Energiezufuhr fixiren wollen; somit steht uns die Wahl, wie grofs wir t nehmen wollen, noch ganz zur Verfügung.

Führen wir jetzt den Körper von demselben Anfangs-

Digitized by Google

zustand ($\xi_0\ \eta_0$) in denselben Endzustand ($\xi_1\ \eta_1$) hinüber, aber so, dafs die jetzige Reihenfolge der Zustandsänderungen (die zweite Bahn des Zustandes) von der eben beschriebenen Reihenfolge (von der ersten Bahn) unendlich wenig verschieden sey, d. h. die Form der Funktion f in der Gleichung $\eta = f(\xi)$ erleide eine unendlich kleine Aenderung. Die Energiezufuhr beginne jetzt nicht im Augenblicke $t = o$, sondern um die unendlich kleine Zeitdauer δt später. Somit werden die Coordinaten des Theilchens m am Anfange der jetzigen Zustandsänderung nicht mehr x_0, y_0, z_0, sondern um δx_0, δy_0, δz_0 verschieden seyn; ebenso die Geschwindigkeits- und Beschleunigungscomponenten. Nun blieb aber während dieser Zeit δt der Zustand des Körpers unverändert; die Gleichung (3) behält also noch die Gültigkeit, somit:

$$\Sigma m (x'_0\, \delta x_0 + y'_0\, \delta y_0 + z'_0\, \delta z_0) = 2\, T_0\, \delta t \quad . \quad (4)$$

Am Ende der Zeit δt beginne die Energiezufuhr, und zwar der früheren derart angepafst, *dafs der Körper nach Verlauf einer gleichen Zeitdauer t in denselben Endzustand gelange, wie auf der ersten Bahn.* Die jetzt mitgetheilte Gesammtmenge der Energie sey entsprechend $Q + \delta Q$.

Auf der zweiten Bahn, wo die Zustandsänderung um δt später begann, wird sie auch um δt später, d. h. im Augenblicke $t + \delta t$ ihr Ende nehmen. In diesem Augenblicke $t + \delta t$ sind die Coordinaten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungscomponenten nicht mehr dieselben $x_1 \ldots\ldots$ $x'_1 \ldots\ldots x''_1 \ldots\ldots$, wie sie am Ende des ersten Ueberganges im Augenblicke t waren, sondern von diesen um $\delta x_i \ldots\ldots \delta x'_1 \ldots\ldots$ und $\delta x''_1 \ldots\ldots$ verschieden. Nun stellen aber einerseits $x_1 \ldots\ldots$ andererseits $x_1 + \delta x_1 \ldots\ldots$ die Coordinaten desselben Theilchens in demselben Zustande ($\xi_1\ \eta_1$) dar, und sind von einander nur in so fern verschieden, dafs die ersten dem Augenblicke t, und die letzteren dem Augenblicke $t + \delta t$ entsprechen, folglich ist die Gleichung (3) auch auf diese Variationen anwendbar, d. h.

$$\Sigma m (x'_1\, \delta x_1 + y'_1\, \delta y_1 + z'_1\, \delta z_1) = 2\, T_1 . \delta t \quad (5).$$

Digitized by Google

III.

Die Gleichungen (4) und (5) beziehen sich nur auf den Anfang und das Ende der Zustandsänderung und sind auf den ganzen Verlauf des Uebergauges nicht anwendbar. Wir müssen noch eine Relation suchen, die in einem jeden beliebigen Stadium der Zustandsänderung gültig bleibt.

Nehmen wir an, dafs der Körper auf der ersten Bahn während der Zeit τ in einen gewissen Zustand (ξ η) gelangt sey, den wir kurz mit dem Namnn „Zustand A_1“ bezeichnen wollen. In diesem Zustande sey die gesammte lebendige Kraft T, die potentielle Energie U, und die Coordinaten, Geschwindigkeiten und Beschleunigungscomponenten des Theilchens m: x ..... x' ..... und x'' .....

Auf der zweiten Bahn gelangt der Körper während dem Verlaufe der Zeit τ — also im Augenblicke $\tau + \delta t$ — in einen gewissen Zustand ($\xi + \delta\xi$, $\eta + \delta\eta$), den wir kurz mit dem Namen „Zustand A_2“ bezeichnen wollen. Die zu A_2 gehörenden Gröfsen differiren nur durch ihre Variationen von den zu A_1 gehörenden. Das Theilchen m ist jetzt nicht in der Lage x ....., sondern davon um δx ..... verschoben; ebenso haben die Geschwindigkeits- und Beschleunigungscomponenten eine unendlich kleine Aenderung $\delta x'$ ..... $\delta x''$ ..... erlitten.

Bestimmen wir nun, wie viel Energie müfste man dem Körper mittheilen, dafs er den durch die Verschiebungen δx, δy, δz bezeichneten Weg folgend, aus dem Zustande A_1 in den Zustand A_2 hinübergeleitet werde. Bezeichnen wir die gesuchte Energiemenge mit $\delta\varepsilon$, so ist:

$$\delta\varepsilon = dT - \Sigma m(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z)$$

oder auch:

$$\delta\varepsilon = \Sigma m(x'\delta x' + \ldots\ldots - x''\delta x - \ldots\ldots)$$

mit dt multiplicirt und die Bedeutung von x'.....x''..... in Betracht gezogen

Digitized by Google

$$\delta\varepsilon \,.\, dt = \Sigma m\,(dx\,\delta x' + \ldots\ldots - dx'\,\delta x - \ldots\ldots).$$

Nach einfachen Umformungen:

$$\delta\varepsilon \,.\, dt = \delta\Sigma m\,(x'\,dx + \ldots\ldots) - d\,\Sigma m\,(x'\,\delta x + \ldots\ldots).$$

Integriren wir diese Gleichung zwischen den Gränzen, die dem Anfangs- und Endzustande entsprechen, so ist:

$$\int_0^t \delta\varepsilon \,.\, dt = \delta \int_0^t \Sigma m\,(x'\,dx + \ldots\ldots) - \Sigma\,(x'_1\,\delta x_1 + \ldots\ldots) + \Sigma m\,(x'_0\,\delta x + \ldots\ldots).$$

Das Integral auf der rechten Seite transformirt und die Gleichung (4) und (5) in Betracht gezogen

$$\int_0^t \delta\varepsilon \,.\, dt = 2\,\delta \int_0^t T\,dt - 2\,T_1\,\delta t + 2\,T_0\,\delta t.$$

Indem T_1 und T_0 constant sind, kann die Gleichung auch so geschrieben werden:

$$\int_0^t \delta\varepsilon \,.\, dt = 2\,\delta \int_0^t (T - T_1 + T_0)\,dt \quad . \quad . \quad (6).$$

Die Energiemenge $\delta\varepsilon$ ist bei einem bestimmten, thatsächlich ausgeführten Uebergange aus $(\xi_0\ \eta_0)$ in $(\xi_1\ \eta_1)$ eine gewisse Funktion der Zeit. *Es kann aber der Uebergang aus demselben Anfangszustande in denselben Endzustand und auf derselben Bahn, hinsichtlich der Zeitdauer, ganz beliebig ausgeführt werden*; somit ist $\delta\varepsilon$, je nach der Geschwindigkeit der Energiezufuhr, eine verschiedene Funktion der Zeit. Indem man die Geschwindigkeit der Energiezufuhr entsprechend wählt, kann man dem

$$\int_0^t \delta\varepsilon \,.\, dt$$

einen jeden beliebigen unendlich kleinen Werth beilegen.

Präcisiren wir die Geschwindigkeit der Energiezufuhr

Digitized by Google

derart, dafs die Zeitdauer des Ueberganges der folgenden Bedingungsgleichung genüge:

$$\int_0^t \delta\varepsilon \,.\, d\,t = t \,.\, \delta\, Q$$

wo $\delta\, Q$ die Energiemenge bedeutet, um welche der Uebergang auf der zweiten Bahn mehr Energie erforderte, als der Uebergang auf der ersten Bahn.

Unterscheiden wir diese, derart bestimmte Zeitdauer von der früheren, ganz willkürlich gelassenen dadurch, dafs wir diese präcisirte Zeitdauer mit i bezeichnen, so ist:

$$\int_0^i \delta\varepsilon \,.\, dt = i\,\delta\, Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

und

$$i\,\delta\, Q = 2\,\delta \int_0^i (T - T_1 + T_0)\, d\,t$$

oder, wenn wir den Mittelwerth von T während dieser Zeit i mit $\overline{T}$ bezeichnen, und der Kürze wegen

$$\overline{T} - T_1 + T_0 = \mathfrak{T}$$

setzen, so ist:

$$i\,\delta\, Q = 2\delta\,(i\,\mathfrak{T})$$

und daraus:

$$\frac{\delta\, Q}{\mathfrak{T}} = 2\,\delta \log\,(i\,\mathfrak{T}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Diese Gleichung stimmt der Form nach vollkommen überein mit derjenigen Gleichung, auf welche ich in einer vor Kurzem veröffentlichten Arbeit [1]) den Hamilton'schen Satz zurückgeführt habe. Damals bin ich von der Voraussetzung ausgegangen, dafs

$$\Sigma\, m\,(x_1'\,\delta\, x_1 + \ldots.) = \Sigma\, m\,(x_0'\,\delta\, x_0 + \ldots.).$$

Lassen wir diese Annahme fallen, so tritt jetzt, wie

1) Pogg. Ann. Bd. 145, Seite 300.

Digitized by Google

wir sehen, an die Stelle der in der citirten Gleichung vorkommenden $\overline{T}$ die Gröfse $\mathfrak{T}$. In der gegenwärtigen Ableitung ist auch die andere beschränkende Annahme beseitigt worden, dafs nämlich die wirkenden Kräfte eine Kraftfunktion haben.

Die Gleichung (8) giebt an, wie viel Energie dem Körper zugeführt werden mufs, damit derselbe statt der Bahn $\eta = f(\xi)$ eine andere, von dieser unendlich wenig abweichenden Bahn befolge. Dieselbe Gleichung (8) können wir auch auf den Fall anwenden, wo wir die Energie suchen, die dem Körper zugeführt werden mufs, damit derselbe aus einem gegebenen Zustande $(\xi\ \eta)$ in einen andern, von diesem unendlich wenig verschiedenen Zustand $(\xi + d\xi,\ \eta + d\eta)$ übergehe. Diesem entsprechend ersetzen wir die Variationszeichen durch Differentialzeichen und schreiben:

$$\frac{dQ}{\mathfrak{T}} = 2d \log (i\,\mathfrak{T}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

So lange der Körper in demselben Zustande verharrt, ist $dQ = o$, und

$$\mathfrak{T} = T - T + T = T$$

$\mathfrak{T}$ constant, somit mufs auch i constant seyn. Für einen jeden bestimmten $(\xi\ \eta)$ Zustand des Körpers haben $\mathfrak{T}$ und i einen gewissen, bestimmten Werth, der so lange constant bleibt, bis der Körper sich in demselben Zustande befindet. In einem andern Zustande haben i und $\mathfrak{T}$ andere Werthe, die wiederum so lange constant sind, bis der Körper den neuen Zustand nicht ändert.

Wird dem Körper die unendlich kleine Energiemenge dQ zugeführt, so ändern sich die Zustandsvariablen $\mathfrak{T} = T$ und i auch nur unendlich wenig, somit wird:

$$\mathfrak{T} = \overline{T} - (T + dT) + T$$

und berücksichtigt man, dafs in diesem Falle $\overline{T}$ auch nur unendlich wenig von T verschieden seyn kann, so erhält man für eine unendlich kleine Zustandsänderung

$$\mathfrak{T} = T,$$

Digitized by Google

wobei für jedes aufgenommene Energieelement dQ diejenige lebendige Kraft $\mathfrak{L} = T$ angewendet werden muſs, welche der Körper bei seiner Aufnahme gerade hat.

Integriren wir nun die Gleichung (9) zwischen den Gränzen, die dem Anfangs- und Endzustande entsprechen, so ist:

$$\int_0^1 \frac{dQ}{\mathfrak{L}} = 2 \log \frac{(i\,\mathfrak{L})\,i}{(i\,\mathfrak{L})_o}.$$

Dehnen wir das Integral auf einen vollständigen Kreisproceſs aus, dann ist:

$$\int \frac{dQ}{\mathfrak{L}} = o. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Diese Gleichung entspricht vollkommen der Gleichung

$$\int \frac{dQ}{T} = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

die den zweiten Hauptsatz für umkehrbare Kreisprocesse ausdrückt. In der Gleichung (10) bedeutet $\mathfrak{L}$ die gesammte lebendige Kraft des Körpers, die er bei der Aufnahme des Energieelementes dQ gerade hat. In der Gleichung (11) bedeutet T die absolute Temperatur des Körpers, die er bei der Aufnahme des Wärmeelementes dQ gerade hat. Nimmt man an, wie es gewöhnlich angenommen wird — daſs die absolute Temperatur eine der gesammten lebendigen Kraft proportionale Gröſse ist, so geht die Gleichung (10) allsogleich in die Gleichung (11) über.

In unseren Betrachtungen waren wir bestrebt, uns von jeder Hypothese fern zu halten, und gründeten unsere Ableitungen einzig und allein auf das Princip der Erhaltung der Energie. Wir glauben damit bewiesen zu haben, daſs der zweite Hauptsatz aus dem ersten ohne eine weitere Hypothese abgeleitet werden kann.

Budapest, den 15. Juni 1875.

Digitized by Google

VI. *Neue tönende Flammen;* *von Herrn C. Decharme,*

Professor am Lyceum zu Angers.

(*Comptes rendus T. LXXX, p.* 1602 *et T. LXXXI, p.* 339.)

Erste Notiz.

Wenn man Leuchtgas aus einer Röhre von 3 bis 5 Mm. Durchmesser brennen läfst, so erhält man eine Flamme von 30 bis 50 Ctm. Höhe. Richtet man aus einer zweiten ähnlichen Röhre einen mäfsigen Luftstrom gegen diese Flamme (mittelst einer Kautschukkugel, welche man nach Belieben zusammendrückt), so entstehen anhaltende und sehr mannigfaltige Töne, je nach dem Angriffspunkt der Flamme und dem Druck der eingeblasenen Luft oder dem Verhältnifs der Röhrendurchmesser.

Wenn man den Luftstrom von dem oberen Theil der Flamme bis ungefähr auf 1 Decimeter von ihrer Basis herabführt, so sieht man die Feuersäule anfangs sich theilen, sich senken, dann sich um den Strom herumwinden, ihn einhüllen und beim Einhüllen mit einer dünnen hellblauen Schnur entweichen; man hört alsdann ein fortwährendes Zerreifsen dieses Lichtschleiers. Gelangt man bis zu 2 oder 3 Ctm. von der Mündung des Gasbrenners (während die Blasröhre horizontal gehalten wird und in der Flamme mündet), so entsteht ein ziemlich starkes Zischen. Wenn endlich die beiden Röhren einander berühren, kann das Zischen knarrend werden oder vielmehr, wenn der Druck schwach ist, in einen netten, für das Ohr angenehmen Ton übergehen.

Der Versuch gelingt auch mit einem Bunsen'schen Brenner, der weifses Licht giebt (dessen Seitenöffnungen geschlossen sind), wenn das einblasende Rohr horizontal ist, etwas unterhalb der Mündung des Brenners und mit ihm in Contact. Es ist kaum nöthig hinzuzufügen, dafs unter diesen Umständen kein Ton entsteht, wenn die Flamme fehlt.

Digitized by Google

Aendert man die Elemente des Phänomens: Natur und Druck des brennenden und eingeblasenen Gases, Lage, Durchmesser, Gestalt und Natur der Röhren, so erhält man mehr oder weniger grofse Modificationen sowohl hinsichtlich der erzeugten Töne, als hinsichtlich der Gestalt und Farben der Flammen.

Anderseits ist nichts sonderbarer als diese tönenden Flammen im rotirenden Spiegel zu betrachten, ihre plötzlichen Entstellungen, ihre Zertheilungen und rasche Vibrationen zu verfolgen.

Zweite Notiz.

In meiner ersten Note hielt ich mit der Erklärung des Phänomens zurück, da ich einigen Grund hatte zu glauben, dafs das eingeblasene Gas nicht blofs eine mechanische Rolle spiele, sondern auch und vorzüglich eine chemische. Hier einige Versuche, die dieser Ansicht zur Stütze dienen.

1. Wenn Leuchtgas aus einem Bunsen'schen Brenner brennt, so weifs man, dafs die Flamme weifs oder bleich, lautlos oder rauschend ist, je nachdem die Seitenöffnungen geschlossen oder geöffnet sind. Wenn man durch eine Röhre von 2 bis 3 Mm. Durchmesser, die in horizontaler Lage in die Oeffnung des Brenners gehalten wird, einen mäfsigen Luftstrom gegen die eine oder andere dieser Flammen bläst, so erhält man mit der weifsen Flamme einen sehr starken Ton, mit der bleichen aber einen äufserst schwachen, der sogar schwierig zu erzeugen ist. Der Ton erklärt sich durch die Verbindung, die zwischen dem Sauerstoff der eingeblasenen Luft und dem Wasserstoff und Kohlenstoff stattfindet, eine Verbindung, die begleitet wird von einer Reihe kleiner sehr rascher Verpuffungen, deren Gesammtheit den wahrgenommenen Ton erzeugt. In der bleichen Flamme aber, wo die Verbrennung fast beendet ist, kann der Luftstrom durch neue Zufuhr von

Digitized by Google

Sauerstoff keine merkliche Wirkung haben, und das erklärt die Schwäche des erzeugten Tones.

2. Bedient man sich zweier Röhren, einer von 3 Mm. Durchmesser, die Leuchtgas giebt, und einer von 8 Mm., die *Kohlensäure* liefert in einem eben so starken Strom, wie vorhin der der Luft, so erhält man nur einen schwachen Ton, selbst wenn man die Oeffnung dieser Röhre die des Brenners berühren läfst, während unter gleichen Umständen die eingeblasene Luft starke und anhaltende Töne erzeugt.

3. Ein Strom *Stickgas* erzeugt im Allgemeinen keinen Ton oder einen äufserst schwachen und selbst in gewissen Fällen sehr schwierig zu erhaltenden, je nach der Reinheit des Gases. Ein nicht die Verbrennung beförderndes Gas ist also ungeeignet Schallwellen zu erzeugen.

4. Ich operirte nun mit dem vorzüglichsten Verbrenner, dem *Sauerstoff*. Als bei denselben Anordnungen wie vorhin bei der Luft, die Mündung der Sauerstoffröhre in eine Flamme von 40 Ctm. Höhe gebracht wurde, entstanden nur schwache und hohe Töne. Mischte man dem Sauerstoff ein Drittel oder die Hälfte seines Volums an Luft hinzu, so begann der Ton intensiver zu werden; und wenn man die Oeffnung der Sauerstoffröhre nach und nach von der Flamme entfernte, liefs sich ein ziemlich starker Ton hören, während er mit Luft allein markirter war. Hieraus folgt, dafs der Sauerstoff, wenn er die Erzeugung eines Tons in der Flamme bewirken soll, mit Luft gemischt seyn mufs, entweder aus der Ferne hergeleitet oder direct in die Flamme geblasen.

5. Aus Vorstehendem begreift man, warum der in eine Wasserstoffflamme geblasene Sauerstoff nur ein hohes Pfeifen erzeugt. Man weifs auch, dafs die Flamme der Drummond'schen Lampe, wenn sie sehr leuchten soll, *lautlos* seyn mufs, was unsere Erklärung bestätigt [1]).

6. Ich habe auch mit *Stickstoffoxydul* und mit *Chlor*

1) Läfst man *Wasserstoff* brennen und bläst Luft in die Flamme, so erhält man unter gleichen Umständen höhere Töne als mit Leuchtgas.

Digitized by Google

operirt. Das erstere gab nur schwache Töne, aber höhere als die Luft; das zweite, halbweges verändert durch seinen Contact mit der blasenden Kautschukkugel, gab nur sehr zweifelhafte Töne.

7. Bewegt man endlich die Luftröhre dergestalt, dafs der Strom hin- und hergeht in einer Flamme von 40 Ctm. Höhe, so entsteht eine Reihe sehr rascher und kleiner netter Detonationen, die wohl eine Idee von dem Tonphänomen geben, wenn man sich diese kleinen Detonationen zusammenhängend denkt.

Kurz, bei der Erzeugung tönender Flammen durch Einblasen von Luft spielt diese mehr eine chemische als mechanische Rolle. Nach und nach entspringt der Ton aus kleinen Verpuffungen, die sich bei der Verbindung des Sauerstoffs der Luft mit dem Wasserstoff und Kohlenstoff der unvollkommen verbrennenden Flammen unaufhörlich erzeugen. Soll ein Ton entstehen, so ist, wie es scheint, das Daseyn von Luft oder eines mit Sauerstoff gemengten unthätigten Gases nothwendig, damit das Tonphänomen recht deutlich werde.

VII. *Untersuchung über die magnetische Polarisationsdrehung; von Henri Becquerel.*

(*Compt. rendus T. LXXX, p.* 1376.)

Seit ihrer Entdeckung durch Faraday ist die magnetische Polarisationsdrehung der Gegenstand vieler Studien gewesen. Man hat bemerkt, dafs die stark brechenden Substanzen im Allgemeinen auch eine starke magnetische Polarisationsdrehung zeigen; allein die Ausnahmen, die sich von dieser Regel zeigen, haben verhindert, diese beiden physischen Eigenschaften mit einander zu verknüpfen. Das Phänomen ist in der That sehr verwickelt und wird

Digitized by Google

oft abgeändert durch die magnetische Polarität, welche die Molecüle der Körper erlangen können.

Ich habe geglaubt, dafs wenn die Körper wenig magnetisch und sehr brechend wären, der Einfluſs der Brechung überwiegend werden könnte, und dafs sich möglicherweise unter diesen Umständen eine Relation zwischen der Brechung und der magnetischen Drehung zeigen möchte.

Ich bediente mich dazu eines sehr starken Elektromagnets, dessen Anker nach der Linie der Pole cylindrisch durchbohrt sind.

Die Messung geschah mit einem Jellett'schen Polarimeter (*Polarimètre à pénombre de Jellett*)[1]). Die Lichtquellen waren die monochromatischen Flammen von Natrium und Thallium, und die Lithiumflamme gesehen durch ein rothes Glas, um das orangefarbene Licht zu entfernen.

1) Die *Raports of the British Association f.* 1860, *pt. II, p.* 13 geben über dieses Instrument folgende Notiz:

Dasselbe besteht aus einem langen Kalkspathprisma, welches durch Abschleifung seiner Enden in ein gerades Prisma verwandelt und der Länge nach durch eine Ebene, welche auf seinem Hauptschnitt beinahe, aber nicht ganz winkelrecht ist, zerschnitten worden. Die Stücke, in welche das Prisma sonach getheilt ist, werden in umgekehrten Lagen wieder vereint, und auf jedem Ende wird ein Diaphragma mit kreisrunder Oeffnung angebracht. Das durch beide Diaphragmen hindurch gehende Licht erzeugt ein kreisrundes Gesichtsfeld, getheilt durch einen diametralen Schlitz in zwei Theile, in welchen die Polarisationsebenen schwach gegen einander geneigt sind. Wenn nun Licht, welches zuvor planpolarisirt worden, durchgelassen wird, erlischt es in den beiden Theilen des Gesichtsfeldes in Lagen, welche dicht zusammenliegen, und in einer Lage, die inmitten beider liegt, wird das Licht gleichförmig. Diese Lage bestimmt die Ebene, nach welcher das Licht zuvor polarisirt wurde, mit einer Genauigkeit, die gröfser ist als die, welche man sonstwie erlangt. Prof Jellett giebt an, dafs verschiedene Beobachtungen um nicht mehr als einen Winkel von einer Minute von einander abweichen, und dafs das Instrument auch bei homogenem Lichte anwendbar ist.

Digitized by Google

Die vorstehende Einrichtung des Magnets hat den Vortheil, sehr farbige Körper bei sehr kleiner Dicke untersuchen zu können. Die folgende Tabelle giebt eine gewisse Anzahl von Resultaten, beobachtet bei derselben Dicke und derselben magnetischen Intensität. Die Versuche wurden bei einer mittleren Temperatur von 17° C. gemacht, ausgenommen beim Schwefel und Phosphor.

Substanzen	Magnetische Drehung	Berechnungsindex
Erster Theil.		
Flüssigkeiten:		
Wasser	0,308	1,336 Linie *D*
Phosphorprotochlorür	0,651	1,508 „
Schwefelbichlorür	0,932	1,619 „
Schwefelprotochlorür	0,984	1,631 „
Schwefelkohlenstoff	1,000	1,633 „
„	1,000	1,615 Linie *B*
Brom	1,084	1,616 „
Wasserstoffbisulfür	1,743	1,888 Linie *D*
Schwefel, geschmolzen (bei 115°)	1,801	1,929 „
Phosphor, geschmolzen (bei 35°)	2,900	2,074 „
Einfach brechende Krystalle:		
Steinsalz	0,771	1,543 Linie *D*
Blende	5,288	2,369 „
„	5,288	2,341 Lithiumroth
Ziguélin (Kupferoxydul)	13,964	2,849 „
Zweiter Theil.		
Flüssigkeiten:		
Methylalkohol	0,220	1,363 Linie *D*
Chloroform	0,380	1,452 „
Zinnchlorid	1,035	1,506 „
Wässrige Lösung von Uranylchlorür	— 0,110	1,500 „
Titanchlorid	— 0,125	1,604 „
Einfach brechende Krystalle:		
Flufsspath (farblos)	0,207	1,435 Linie *D*
Spinell (gefärbt durch Chrom)	0,496	1,715 „
Almandin-Granat	— 0,080	1,772 Lithiumroth
Diamant (octaëdrischer)	0,380	2,420 Linie *D*
Gläser:		
Flintglas, schwer No. 1 (Feil)	1,263	1,720 Linie *D*
„ „ No. 2	1,577	1,760 „
„ „ No. 3	1,624	1,770 „
Glas mit 4 Proc. Titan (Feil)	0,436	

Digitized by Google

Flüssigkeiten und amorphe Körper gestatten eine genaue Beobachtung, wenn sie durchsichtig genug sind. Dasselbe gilt nicht von den krystallisirten Körpern, von denen ich in dieser Arbeit nur die einfach brechenden untersucht habe. Bemerkenswerth ist die bedeutend magnetische Polarisationsdrehung der Blende und des Ziguélin; erstere ist das 17-fache und letztere das 45-fache von der des Wassers.

Die Polarisationsdrehung des geschmolzenen Schwefels nimmt sehr rasch zu in dem Maafse als er erkaltet und dem Punkte seiner Erstarrung nahe kommt. Diese Veränderung entspricht einer ebenfalls raschen Zunahme des Brechungsindexes. Ich werde übrigens ausführlicher auf die Erscheinungen bei diesen Körpern, deren physische Modificationen so merkwürdig sind, zurückkommen, wenn ich mich mit der Wirkung der Wärme auf die Polorisationsdrehungen verschiedener Körper beschäftige.

Die im ersten Theile obiger Tabelle aufgeführte Gruppe von Substanzen, welche hauptsächlich Verbindungen des Chlors, Phosphors, Schwefels und Kohlenstoffs sind, zeigen für dieselbe Wellenlänge eine regelmäfsige Zunahme der Drehung in dem Maafse als der Brechungsindex steigt. Eine einfache, die Beobachtungen genau darstellende Funktion des Brechungsindexes erkennt man zwar nicht, allein wenn man mit n den Index eines Strahls von bestimmter Wellenlänge, mit y die Drehung und mit A eine Constante bezeichnet, so erlaubt ein empirischer Ausdruek von der Form $y^2 = A\,n^2\,(n^2 - 1)$ eine Curve zu construiren, welche, innerhalb der Beobachtungsgränze, den Anwuchs der Drehung mit der Zunahme des Indexes ziemlich gut darstellt.

Was die Substanzen des zweiten Theils der Tabelle betrifft, so können die Ausnahmen, welche sie von obiger Regel darbieten, theils den Effecten der Lamellarpolarisation (wie beim Diamant und Granat), theils der Anwesenheit magnetischer Körper, theils noch unbekannten Ursachen zugeschrieben werden. Bei einem Almandin-Gra-

Digitized by Google

nate, welcher einen beträchtlichen Antheil Eisen enthielt, war die Drehung anscheinend negativ.

Der allgemeine Ausdruck des Phänomens ist wahrscheinlich eine Funktion verschiedener physikalischen und chemischen Eigenschaften der Körper. Bestehen diese aus Elementen, von denen einige sehr magnetisch sind, so ist der Einfluſs des eigenthümlichen Zustandes, in welchem sie sich unter Einwirkung des Magnets befinden, der Art, daſs jede Spur von Relation zwischen magnetischer Drehung und Brechungsindex verschwindet.

Vielleicht könnte man diese Effecte durch die Annahme erklären, daſs die magnetische Drehung der Polarisation entspringe aus einer Wirkung des Magnetismus auf den intermolecularen Aether und daſs zugleich die influencirten Molecüle des Körpers magnetisch polarisirt würden, dergestalt, daſs sie Pole von entgegengesetztem Namen in Bezug auf die des Magnetes darstellten. Diese Molecüle wären dann eben so viele kleine, dem sie influencirenden Magnet entgegengesetzte Magnete, die in sehr kleiner Entfernung auf das Mittel wirkten, welches die Lichtschwingungen fortpflanzt. Diese moleculare Wirkung ist bei verschiedenen Körpern ungemein veränderlich; sie kann abhängen von ihrem specifischen Magnetismus und von dem wechselseitigen Abstand der Molecüle. Denkbar ist alsdann, daſs die umgekehrte Wirkung dieser Molecüle die directe Wirkung des Magnetes sehr schwäche; ja sogar wenn der Körper sehr magnetisch und sich unter angemessenen Umständen befindet, daſs diese Molecularwirkung überwiege und eine negative Drehung hervorriefe, wie man sie bei gewissen Salzen der magnetischen Metalle beobachtet.

Zusammengefaſst: der Versuch zeigt, daſs bei den schwach magnetischen und stark lichtbrechenden Körpern, welche bisher noch nicht studirt worden sind, der Anwuchs dermagnetischen Polarisationsdrehung im Allgemeinen der Zunahme des Brechungsindexes folgt.

Digitized by Google

VIII. *Neue Methode Schallschwingungen und Interferenzen auf Quecksilber hervorzubringen; von Hrn. C. Decharme.*

(*Comptes rendus, Tome LXXX, pag.* 802.)

Diese Methode besteht in der Anwendung eines Luftstroms, in einer engen Röhre, deren Ende der Oberfläche von Quecksilber nahe kommt (*vient d'affleurer*). Sind die Bedingungen des Versuchs gehörig geregelt, so bekommt man musikalische Töne und auf der Oberfläche der Flüssigkeit Wellen, mittelst deren man Interferenzen, feste und symmetrische Concamerationen usw. erzeugen kann.

IX. *Physikalische Eigenschaften der Collodiumblättchen.*

Wenn man eine (ätherische) Collodiumlösung auf eine reine Glasplatte gießt, so kann man nach der Verdunstung des Aethers das Collodium vom Glase ablösen, und erhält es dann in Gestalt eines sehr dünnen und durchsichtigen Blättchens, das sich auf einem Rahmen ausspannen läßt[1]).

Hr. E. Gripon hat die physikalischen Eigenschaften desselben näher untersucht und folgendes beobachtet.

Es polarisirt das Licht sowohl durch Reflexion als durch Refraction. Der Polarisationswinkel, von der Oberfläche aus gerechnet, ist 33° 35′ und darnach, dem Brewster'schen Gesetz zufolge, der Refractionsindex =1,5108. Daraus berechnet sich die Dicke der untersuchten Lamellen zu $0^{mm},0081$ bis $0^{mm},0088$. Bei dieser Dicke lassen sie strahlende Wärme durch, leuchtende zu 91, dunkle zu 70 Proc. Aus mehren solchen, auf Rahmen von dünnem Zinkblech ausgespannten Lamellen lassen sich Säulen bilden, die wie Glassäulen zu Untersuchungen über Licht und Wärme zu gebrauchen sind. (*Comptes rendus, T. LXXX, p.* 882).

1) Herr Grüel hat bekanntlich auf diese Weise schon 1848 kleine Aërostaten gebildet. (Annal. 1848, Bd. 758, S. 333.

A. W. Schade's Buchdruckerei (L. Schade) in Berlin, Stallschreiberstr. 47

Digitized by Google

ANNALEN
DER PHYSIK UND CHEMIE.
Band VII. ERGÄNZUNG. Stück 2.

I. *Bestimmung der Elasticitätsconstanten des Steinsalzes; von Dr. Woldemar Voigt.*

Schluſs von Seite 53.

II. Theil.

Die Bestimmung der Torsionsconstanten des Steinsalzes.

I. Die Ableitung der Formel für die Torsion eines Steinsalzstäbchens.

1. Die Torsion eines vollkommenen Prismas um seine geometrische Axe. Es läſst sich bei krystallinischen Medien nicht so wie bei unkrystallinischen ein einziger Torsionscoëfficient aufstellen, wenn man nicht über die Gestalt der torquirten Stäbe eine beschränkende Annahme machen will, da in der Gleichung für den Torsionswinkel die Dimensionen des Prismas nicht allein in einem gemeinschaftlichen Factor aller Glieder vorkommen.

Die von Herrn Geh.-Rath Neumann abgeleitete Formel ergiebt den Torsionswinkel τ eines um seine geometrische Axe torquirten vollkommenen Prismas, das aus einem Krystall des regulären Systemes geschnitten ist, abhängig von dem ausgeübten Drehungsmoment M, von den Dimensionen des Stäbchens l, b, d, von den Winkeln seiner Längsrichtung l und der Normalen auf seinen Seitenflächen, b und d, gegen die Krystallaxen xyz, und lautet

$$\tau = \frac{3\,M\,l}{d^3\,b^3}\Big\{\frac{b^2+d^2}{\varepsilon}$$
$$-\,4\left(\frac{1}{2\varepsilon}-\frac{1}{A-B}\right)\Big[\cos^2(l,x)\left(d^2\cos^2(d,x)+b^2\cos^2(b,x)\right)$$
$$+\cos^2(l,y)\left(d^2\cos^2(d,y)+b^2\cos^2(b,y)\right)$$
$$+\cos^2(l,z)\left(d^2\cos^2(d,z)+b^2\cos^2(b,z)\right)\Big]\Big\}.$$

Digitized by Google

Sie enthält also die drei Elasticitätsconstanten A, B und ε einmal in demselben Aggregat $\left(\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{A-B}\right)$ wie die Formel für den Elasticitätscoëfficienten, und aufserdem ε für sich. Die Verbindung beider Beobachtungsmethoden ergiebt also alle drei gesuchten Constanten. Der Umstand, dafs ein Aggregat in beiden Formeln vorkommt, erlaubt durch Vergleichung der durch beide Methoden dafür gefundenen Zahlenwerthe ein Urtheil über die Sicherheit der Resultate.

2. Eine parallele Verschiebung der Drehungsaxe innerhalb des Prismas ist ohne Einfluſs. Die geometrische Axe eines Prismas ist eine ideale, nicht sichtbar ausgeprägte Linie, und darum nicht leicht genau zur Drehungsaxe zu machen, zumal, da der von mir benutzte Apparat keine Drehung um 180° gestattete. Eine Torsion um eine Kante des Prismas bietet technisch weit geringere Schwierigkeiten und ist daher in den meisten Fällen von mir angewandt worden. Die folgenden Beobachtungsresultate ergaben die Berechtigung, auf dieselbe ohne weiteres die obige Formel anzuwenden.

Drei Stäbchen — nach der später zu erklärenden Bezeichnung *W* I, *GB* V und *O* II — wurden erst um die Kante, dann um die Axe torquirt, und ergaben nach Reduction der Torsionswinkel auf die Einheit aller Dimensionen in einer hier gleichgültigen Einheit ausgedrückt folgende Resultate:

	W I.	*GB* V.	*O* II.
Torsion um die Kante	26,9	11,9	16,1
Torsion um die Axe	26,7	11,3	15,7.

Die Abweichungen liegen innerhalb der Gränze der Beobachtungsfehler; dafs sie alle in demselben Sinn stattfinden, ist einmal deshalb unbedenklich, weil man statt eines Abnehmens gerade ein Wachsen erwarten sollte, andererseits aber vollständig dadurch erklärt, dafs die Stäbchen-Enden bei beiden Beobachtungsarten auf etwas verschiedene Weise eingeklemmt werden mufsten, und die Bestimmung der Längen der Stäbchen zwischen den Klemmen also *verschiedenen* Fehlern ausgesetzt war.

Digitized by Google

Während das Stäbchen in denselben Fassungen eingeklemmt blieb, liefs sich die Drehungsaxe nur etwa um $1\frac{1}{4}^{mm}$ nach allen Richtungen verschieben. Das Stäbchen *GB* V vom Querschnitt *abcd* (siehe die Fig. 14, Taf. II) wurde so nach einander um die Axen α, β und γ torquirt und ergab bei gleichen Belastungen die Werthe der Torsionswinkel:

$$\alpha)\ \tau = 38'\ 6''$$
$$\beta)\ \tau = 38'\ 3''$$
$$\gamma)\ \tau = 38'\ 5'';$$

(Werth der möglichen Beobachtungsfehler $= 6''$).

Hiernach ist die Lage der Drehaxe, so lange sie nur der geometrischen parallel und innerhalb des Querschnitts bleibt, auf die Torsion eines Prismas ohne Einfluss; ob streng oder nur angenähert, kann ich nicht entscheiden.

Auch eine geringe Abweichung vom Parallelismus scheint unwirksam zu seyn. Das Stäbchen *W* I wurde mit dem einen Ende so in der Fassung verschoben, dafs an diesem die Drehungsaxe von α (Fig. 15, Taf. II) nach β und nach γ rückte, während sie am anderen ziemlich unverändert blieb; die Drehung bei den drei Lagen α, β, γ der Axe ergab für gleiche Belastung die Torsionswinkel:

$$\alpha)\ \tau = 94'\ 20''$$
$$\beta)\ \tau = 94'\ 20''$$
$$\gamma)\ \tau = 94'\ 40''.$$

So lange also die Drehungsaxe innerhalb des Prismas bleibt, ist ihre Lage so gut als gleichgültig; nicht so aufserhalb des Prismas. Davon wird bei der Zusammenstellung der Beobachtungen der Torsion um eine Kante sich der Beweis ergeben (S. 202).

3. Einfluss der unregelmäfsigen Gestalt der Steinsalzstäbchen auf die Torsion. Die in § 1 für den Torsionswinkel aufgestellte Formel gilt nur für vollkommene Prismen, während meine Steinsalzstäbchen eine nach der Längsrichtung variable Breite und Dicke, sowie einen vom Rechteck abweichenden Querschnitt hatten.

Digitized by Google

Was den ersten Punkt betrifft, so liefsen sich bei den zur Torsion verwandten Stäbchen (ebenso wie bei den meisten zur dritten Serie Biegungsbeobachtungen benutzten) Dicke und Breite sehr nahe durch lineäre Functionen des Abstands ξ vom Mittelpunkt ihrer Länge darstellen; also setzen:

$$b = b_m + \beta \cdot \xi \qquad d = d_m + \delta \cdot \xi.$$

Dabei bezeichnen b_m und d_m Breite und Dicke im mittelsten Querschnitt (für $\xi = o$), und war das Quadrat von $\frac{\beta}{b} \cdot \frac{l}{2}$ und $\frac{\delta}{d} \cdot \frac{l}{2}$ $\left(\text{weil immer} < \frac{1}{800}\right)$ zu vernachlässigen.

Es gilt dann für die relative Drehung zweier um $d\xi$ von einander entfernten Querschnitte, die um ξ vom mittelsten des Stäbchens entfernt sind, die Formel

$$d\tau = \frac{3 M d\xi}{b_m^3 d_m^3}\left[b_m^2\left(1 - \frac{\beta\xi}{b_m} - 3\frac{\delta\xi}{d_m}\right)Q + d_m^2\left(1 - 3\frac{\beta\xi}{b_m} - \frac{\delta\xi}{d_m}\right)R\right]$$

wo Q und R von ξ unabhängig sind.

Hieraus erhält man die relative Drehung der beiden um l abstehenden Querschnitte, d. i. die Torsion des ganzen Stäbchens durch Integration von $-\frac{l}{2}$ bis $+\frac{l}{2}$. Das Resultat ist eine Formel für τ, die sich von der im § 1 angegebenen nur dadurch unterscheidet, dafs b_m und d_m an der Stelle von b und d steht.

Es sind ferner die Querschnitte der Stäbchen nicht Rechtecke, sondern Trapeze. Da die Breite bei allen 4—5 Mal bedeutender ist, als die Dicke, so sind ihre Verschiedenheiten auf der obern und untern Seite desselben Stäbchens fast unmerklich. Die Querschnitte ähneln also Paralleltrapezen.

Bei Drehungen um die geometrische Axe war es nicht möglich, die schädliche Wirkung dieser Unregelmäfsigkeit, die die Torsionswinkel offenbar kleiner erscheinen läfst, als bei einem vollständigen Prisma von mittlerer Dicke, durch eine Beobachtungsmethode zu eliminiren; nur Sorg-

Digitized by Google

falt bei der Anfertigung der Stäbchen konnte sie verkleinern.

Die gröfste Zahl meiner Beobachtungen bezieht sich auf Torsionen um eine Kante; bei diesen läfst sich die erwähnte Fehlerquelle einigermafsen eliminiren, indem das Stäbchen nach einander um zwei sich im Querschnitt *abcd* (Fig. 16) diagonal gegenüberliegende Kanten torquirt wird. Im Vergleich mit der Torsion eines idealen Prismas von der mittleren Dicke Δ wird die Drehung um eine der *kleinern* Schmalseite *ab* (Fig. 16) anliegende Kante einen zu *kleinen*, die Drehung um eine der *gröfsern* Schmalseite anliegende Kante einen zu *grofsen* Werth des Torsionswinkels ergeben. Das Mittel aus beiden würde also in weit geringerem Maafse von dem unregelmäfsigen Querschnitt beeinflufst sein.

Was die Abweichung der Axe meiner Stäbchen von der geforderten Richtung betrifft, so brauche ich, da ich nur diejenigen Richtungen untersucht habe, für die der Torsionswinkel bei sonst gleichen Umständen ein Maximum oder Minimum wird, nur auf das im I. Theil am Ende des § 13 Gesagte zu verweisen. Die Abweichung ist hier aus denselben Ursachen ohne Belang wie dort. —

II. Die Beobachtungsmethode.

4. Der Beobachtungsapparat. Die Apparate, die ich zur Beobachtung der Torsion nöthig hatte, dienten einerseits dazu, das Stäbchen drehbar zu befestigen, andererseits, die Belastung desselben hervorzubringen und zu reguliren. Diese Vorrichtungen sind nicht sehr einfach, da aber oft von ganz unscheinbaren Stücken ihre Brauchbarkeit abhing, so ist es nicht möglich, sie kurz zu beschreiben. Ich hoffe, dafs eine genaue Beschreibung durch eine Reihe von später vorzunehmenden Beobachtungen mit andern Krystallen gerechtfertigt werden wird.

Gemäfs den beiden oben angegebenen Bestimmungen werde ich die Apparate in 2 Abtheilungen beschreiben.

Digitized by Google

bestand aus 2 Rollen, deren Axen in einer horizontalen Geraden lagen, und die auf den einander zugewandten Seiten eine Vorrichtung trugen, um die Enden des zu torquirenden Stäbchens fest einzuspannen. Bei der Beobachtung wurde einmal die eine, einmal die andere von ihnen durch Bremsschrauben festgestellt, während an der freien das Gewicht wirkte, mit welchem torquirt werden sollte. Da die beobachteten Stäbchen nicht alle gleiche Länge hatten, so mufste die eine Rolle mit der sie tragenden Gabel auf der eben abgeschliffenen Unterlage sich durch eine Schraube der andern nähern oder von ihr entfernen lassen.

Um die Reibung der Rollen in ihren Axen soweit zu vermindern, als es ohne Beeinträchtigung der Festigkeit des Apparates nur anging, wählte ich statt der sonst (etwa bei Drehbänken) gewöhnlichen Einrichtung die folgende.

Es ist in der Fig. 17, Taf. II, welche die eine Hälfte des Torsionsapparates von oben herabgesehen darstellt, *RR* die eine Rolle, die in den Spitzen der durch die oberen Enden *GG* der Gabel gebohrten Schrauben *ss* sehr leicht läuft.

Auf die kurze dicke Axe *AA* der Rolle ist ein Messingrähmchen *rrrr* aufgeschraubt, das auf der der andern Rolle zugewandten Seite *K* die Vorrichtung zum Einklemmen des einen Stäbchenendes trägt; diese mufste, je nachdem sie das Stäbchen um die Axe oder um eine Kante drehbar befestigen sollte, verschieden seyn.

Zu letzterem diente die in Fig. 18, Taf. II dargestellte. An der Seite *K* des Rähmchens ist ein kleiner Widerhalt *W* aufgeschraubt, so dafs die Spitze des von ihm mit dem Rähmchen gebildeten rechten Winkels in die Drehungsaxe fällt. An ihn wurde das zu torquirende Stäbchen angeschoben und dadurch mit einer Kante in die Drehungsaxe gebracht. Um es in dieser Lage zu befestigen, wurde darüber ein dem darunterliegenden ähnliches Messingstäbchen gelegt und durch die zwei Federn *ff* mäfsig ange-

Digitized by Google

drückt, so dafs es sich, auch wenn die obere Fläche des Stäbchens der untern nicht ganz parallel war, gut anschmiegte. Die zwei Muttern *mm* hielten es in der erlangten Lage fest. — Die beiden Backen dieser Schraubklemmen waren, wie bei Beifszangen, stumpf zugeschärft, damit nur die äufserste Kante und nicht etwa statt ihrer eine andere Linie das Stäbchen festhielte; denn dadurch wäre die Bestimmung seiner Länge unsicher geworden [1]).

Beim Einlegen des Stäbchens in diese Schraubklemme öffnete ich die Backen nicht mit der Hand, um nicht dadurch einen (durch Hebelwirkung ziemlich verstärkten) Druck auf die Axe der Rolle auszuüben, sondern schob zwischen sie mittelst der Schraube *S* (s. Fig. 19, Taf. II) die durch eine Feder verbundenen kleinen Keile *KK*; dann hatte ich beide Hände für das Einlegen des Stäbchens frei.

Wenn das Stäbchen um seine geometrische Axe torquirt werden soll, trägt das Rähmchen statt der beschriebenen Vorrichtung ein kleines Klemmfutter, das dem auf den Drehbänken gebräuchlichen im Princip ähnlich ist. Die Breitseiten des Stäbchens werden zwischen zwei verschiebbare Backen, die Schmalseiten zwischen zwei Schrauben gefafst.

Das Stäbchen befindet sich mit seiner geometrischen Axe in der Drehungsaxe, wenn die eine Breit- oder Schmalseite durch eine Drehung um 180° genau an die Stelle kommt, wo vorher die andere gelegen hat. Ob dies erfüllt ist, wird durch einen auf dieselbe gelegten Fühlhebel untersucht, dessen Drehpunkt unveränderlich fest mit dem Gestell des Torsionsapparates verbunden ist. — Da die Bewegung in Spitzen den Torsionsrollen keine Drehung um 180° erlaubt, ist das kleine Klemmfutter seinerseits um eine Axe drehbar im Rähmchen befestigt, die mit der der

1) Ein Festkitten der Enden des Stäbchens in Fassungen ist zu verwerfen. Der Kitt zieht sich aus der Fassung am Stäbchen hin und verwischt die Gränze zwischen dem festgehaltenen und dem freien Theil.

Digitized by Google

Digitized by Google

den auf kleine aus federndem Messingblech gebogene Klemmen aufgesetzt, welche die in Fig. 20. Taf. II dargestellte Form hatten und über das Stäbchen geschoben wurden. Dann hielten sie sich allein durch ihre Federkraft mit den Kanten *kk* am Stäbchen fest und brauchten an keiner anderen Stelle unterstützt zu werden. Der Spiegel erhielt darum die Drehung des Querschnittes, in dem die Kanten *kk* das Stäbchen umfassten: ich wählte dazu die Endquerschnitte, unmittelbar benachbart denen, in denen das Stäbchen eingespannt war. So gab die Differenz der Drehungen beider Spiegel mit Sicherheit den Torsionswinkel des zwischen den beiden Schraubklemmen liegenden freien Theiles des Stäbchens.

Jeder Spiegel war durch ein Gegengewicht compensirt; durch andere der Druck, den das Gewicht der Rollen sammt den Klemmvorrichtungen auf die Axen der Rollen ausübte, auf beide Spitzen gleichmäßig vertheilt.

7. Der Belastungsapparat.

An der Peripherie der Torsionsrollen war die Belastung anzubringen, mit der das Stäbchen gequält werden sollte. Damit sie nicht einen Druck auf die Axe ausübte und dadurch die Reibung vergrößerte und veränderlich machte, wandte ich ein Kräftepaar an. Es war nämlich am höchsten und tiefsten Punkte der Torsionsrolle *A* ein Silberdraht befestigt, der obere, wie Fig. 21. Taf. II zeigt, an der einen Seite der Rolle hinab, der untere an der anderen hinauf und über die Führungsrolle *B* geleitet; an beider Enden war horizontal ein leichter hölzerner Querstab *ss* befestigt, in dessen Mitte die Waagschale *w* zur Aufnahme von Gewichten hing. Hierdurch war nun zwar die Belastung in der Axe der Torsionsrolle *A* von der Belastung unabhängig, dafür aber die in der Axe der Führungsrolle *B* variabel. Den störenden Einfluß derselben vermied ich, indem ich die Reibung in der Führungsrolle *B* durch Anwendung des veränderlichen Prinzips der Torsionsrollen fast vollständig vermied.

Digitized by Google

Torsionsrolle zusammenfällt [1]). Diese Drehung ist während der Torsionsbeobachtungen arretirt [2]).

Die Torsionswinkel wurden an zwei mit den letzten freien Querschnitten des Stäbchens fest verbundenen Spiegeln an einer verticalen Scala abgelesen. Wie schon erwähnt, war die eine Rolle bei Belastungen an der anderen festgestellt; wegen der Elasticität der Rähmchen *rrrr* war aber das an ihr eingespannte Stäbchen-Ende nicht vollständig unbeweglich. Es mufste also bei jeder Belastung die Stellung beider Spiegel abgelesen werden; um dazwischen das Fernrohr nicht verstellen zu müssen, liefs ich die Bilder, die beide Spiegel von der Scala zeigten, neben einander im Fernrohr erscheinen. — Die Elasticität der das Stäbchen umfassenden Backen der kleinen Schraubklemmen liefs die Enden des Stäbchens etwas andere Drehungen erfahren, als die dasselbe haltenden Klemmen. Daher brachte ich die Spiegel für die Ablesung nicht an den Schraubklemmen, sondern am Stäbchen selbst an. Sie wur-

1) Eine kleine Abweichung hiervon wird bei dem Centriren des Stäbchens berücksichtigt.

2) Für die Brauchbarkeit des Apparates ist die Erfüllung zweier Voraussetzungen nöthig, die nicht ohne Controle als vorhanden angesehen werden durften. Ob die Axen der beiden Torsionsrollen in eine Gerade fallen, läfst sich erkennen, indem man die Rollen aus ihren Gabeln nimmt und die Spitzen, in denen sie gingen, herausschraubt. Waren vorher die vier Spitzen in einer Geraden gewesen, so mufste nun dasselbe mit den Bohrungen stattfinden, in die jene eingeschraubt waren; dem Hindurchschauenden mufsten sie daher als vier kleine concentrische Kreise erscheinen.

Die Kante der Stäbchen sollte bei einer Gattung Beobachtungen in die Drehungsaxe fallen. Um dies zu ermöglichen, war noch während der Anfertigung der Rollen mittelst der Drehbank auf der vordern Fläche *K* der an den Rollen befestigten Rähmchen (Fig. 17 u. 18) ein kleiner ($\frac{1}{2}$ — $\frac{3}{4}$ mm im Durchmesser haltender) Kreis angerissen; sein Mittelpunkt bezeichnete die Drehungsaxe, und in ihn wurde die Spitze des zum Einlegen der Stäbchen bestimmten rechten Winkels mit grofser Genauigkeit gebracht.

Abweichungen hiervon waren, Dank der ausgezeichneten Sorgfalt der Verfertiger des Apparates Hrn. Heyde und Wachtel in Dresden, durchaus nicht zu bemerken.

Digitized by Google

den auf kleine aus federndem Messingblech gebogene Klemmen aufgesetzt, welche die in Fig. 20, Taf. II dargestellte Form hatten und über das Stäbchen geschoben wurden. Dann hielten sie sich allein durch ihre Federkraft mit den Kanten *kk* am Stäbchen fest und brauchten an keiner andern Stelle unterstützt zu werden. Der Spiegel erhielt darum die Drehung des Querschnittes, in dem die Kanten *kk* das Stäbchen umfafsten; ich wählte dazu die Endquerschnitte, unmittelbar benachbart denen, in denen das Stäbchen eingespannt war. So gab die Differenz der Drehungen beider Spiegel mit Sicherheit den Torsionswinkel des zwischen den beiden Schraubklemmen liegenden freien Theiles des Stäbchens.

Jeder Spiegel war durch ein Gegengewicht compensirt; durch andere der Druck, den das Gewicht der Rollen sammt den Klemmvorrichtungen auf die Axen der Rollen ausübte, auf beide Spitzen gleichmäfsig vertheilt.

b) Der Belastungsapparat.

An der Peripherie der Torsionsrollen war die Belastung anzubringen, mit der das Stäbchen torquirt werden sollte. Damit sie nicht einen Druck auf die Axe ausübte und dadurch die Reibung vergröfserte und veränderlich machte, wandte ich ein Kräftepaar an. Es war nämlich am höchsten und tiefsten Punkte der Torsionsrolle *A* ein Silberdraht befestigt; der obere, wie Fig. 21, Taf. II zeigt, an der einen Seite der Rolle hinab, der untere an der anderen hinauf und über die Führungsrolle *B* geleitet; an beider Enden war horizontal ein leichter hölzerner Querstab *ss* befestigt, in dessen Mitte die Waagschale *w* zur Aufnahme von Gewichten hing. Hierdurch war nun zwar die Reibung in der Axe der Torsionsrolle *A* von der Belastung unabhängig, dafür aber die in der Axe der Führungsrolle *B* variabel. Den störenden Einfluſs derselben vermied ich, indem ich die Reibung in der Führungsrolle *B* durch Anwendung des vereinfachten Princips der Frictionsrollen fast vollständig vermied.

Digitized by Google

Den Torsionsrollen selbst war eine solche Einrichtung nicht zu geben, denn bei ihnen mufste hauptsächlich erzielt werden, dafs die Axen von beiden in derselben Geraden lagen, und ihr gegenseitiger Abstand während der Beobachtungen unverändert blieb. Dies war aber unter Anwendung von acht Frictionsrollen nicht zu erreichen, und mit meiner Vereinfachung noch weniger.

Das Princip derselben ist folgendes: Läfst man die Axe der Führungsrolle statt in Lagern auf zwei ebenen Unterlagen rollen, so wird die gleitende Reibung in eine ganz unerhebliche wälzende verwandelt. Bei der Bewegung ändert aber die Rolle ihre Lage, und es entsteht eine Kraft, die sie in die ursprüngliche zurückführen will und einer Weiterbewegung widersteht. Ich liefs die Axe *a* der Führungsrolle statt auf einer ebenen, auf einer Kreisbogenbahn *b b* (siehe Fig. 22, Taf. II) rollen, die ihrerseits um eine im Kreismittelpunkt *c* angebrachte Schneide durch das Gegengewicht *P* vollständig compensirt und sehr leicht beweglich aufgehängt war. Drehte sich die Rolle, so schob sich die Bahn auf die Art unter der Axe fort, dafs diese immer senkrecht unter dem Aufhängungspunkte *c* blieb, ihre absolute Lage also nicht änderte [1]).

Die Waagschale zum Aufnehmen der Gewichte mufste abwechselnd freigelassen und wieder arretirt werden können, damit sich die Stellung der am Stäbchen angebrachten Spiegel für den torquirten und nicht torquirten Zustand des Stäbchens ablesen liefs. Dies wurde durch die folgende in Fig. 23, Taf. II dargestellte Vorrichtung bewerkstelligt. Der um den Punkt *p* drehbar befestigte Draht $\overline{pq}$

1) Diese Art von Frictionsrollen ist ohne weitere Abänderung immer brauchbar, wenn die Rolle nur eine geringe Zahl von Umdrehungen zu machen hat; benutzt man statt des Kreisbogens *b b* einen vollen Kreis (und dies ist technisch nicht unmöglich), so ist sie für jede Anzahl Umdrehungen anwendbar. Ihr Nutzen erhellt daraus, dafs, während die vor ihr angewandte, in Spitzen laufende, Rolle bei einer Belastung mit 6 gr. ein einseitiges Uebergewicht von 0,1 gr. zur Ueberwindung der Reibung erforderte, die letztere kaum 0,01 gr. bedurfte. Eine ganz langsame, etwa durch einen Stofs hervorgebrachte Bewegung, erhielt sich, so lange es die Länge der Kreisbahn erlaubte.

Digitized by Google

lag mit seinem freien Ende auf einer Kreisscheibe *q*, die excentrisch mit der durch eine Schnur drehbaren Rolle *o* verbunden war, und liefs sich durch ein Drehen derselben sehr langsam heben und senken. Dieser Draht lag derart unter dem Bügel der erwähnten Waagschale *w*, dafs er dieselbe in seiner höchsten Stellung vollständig trug, bei einer tiefern aber frei an dem Torsionsapparat hängen liefs. Während des ersteren (arretirten) Zustandes wurden die Gewichte aufgelegt, mit denen das Stäbchen torquirt werden sollte. Das Arretiren und Freilassen der Waagschale, und dadurch das Belasten und Entlasten des Stäbchens, gestattete eine wie ein Klingelzug von meinem Beobachtungstisch etwa 4^m weit zum Apparat geführte Drahtleitung *klmnor* (in Fig. 23), die sich durch eine kleine, bei *k* angebrachte Winde regieren liefs. Ich durfte nämlich während der Beobachtungen meinen Platz nicht verlassen, da jede Bewegung Störungen verursachte. Ob die Belastung und Entlastung des Stäbchens, wie nothwendig war, ohne Erschütterungen vor sich ging, konnte ich durch das Beobachtungsfernrohr controliren.

Wenn ich die stark beschwerte Waagschale nicht vollständig frei liefs, konnte ich mittelst der beschriebenen Vorrichtung dem Stäbchen, bis auf $\frac{1}{2}$ Bogenminute genau, eine gewünschte Drehung ertheilen. Die Benutzung dieses Kunstgriffes wird im nächsten Abschnitt erörtert werden.

Das Auflegen neuer Gewichte, während die Waagschale arretirt war, liefs sich ebenfalls vom Beobachtungstisch aus ausführen. Von einer zweiten am Beobachtungstisch angebrachten Winde führte nämlich eine zweite Drahtleitung, der oben beschriebenen parallel, nach dem Schenkel *h* des ebenfalls unter dem Torsionsapparate aufgestellten (in Fig. 24 wiedergegebenen) dreiarmigen Hebels *hik*. Der Schenkel *i* hielt gerade über die Waagschale *w* die Gewichte, welche die Einrichtung hatten, ihre Aufhängung loszulassen, sowie sie auf die Schale aufgesetzt wurden. Sie bestanden nämlich aus runden Messingscheiben, die mit einer auf der obern Fläche hart am Rande eingedreh-

Digitized by Google

ten Rinne *rr* und zwei angelötheten dünnen Federn versehen waren, welche die in Fig. 25 angegebene Biegung und am freien Ende eine nach unten gerichtete Spitze besafsen. Eines von ihnen wurde mit seinen Federn in die am Hebelarm *i* (Fig. 24) angebrachten Oesen eingehängt, ein zweites von derselben Gröfse in die auf dem ersten eingedrehte Rinne, ein drittes wieder an jenes und so fort. Dieser Complex hing, durch ein Gegengewicht am Schenkel *k* oben erhalten, über der Waagschale und konnte durch die bei *i* endigende Drahtleitung auf dieselbe herabgeführt werden. Stand das unterste Gewicht auf der Waagschale auf, so liefsen seine Federn das darüberhängende los, und ein Gewichtsstück war auf die Schale aufgelegt. Das zweite wurde dann aufs erste drauf gesetzt, das dritte aufs zweite u. s. f. Da ich 4 gleiche Gewichte zu 4 grm., 3 gleiche zu 8 grm. und 3 zu 12 grm. angefertigt hatte, konnte ich zum Gewicht der Waagschale 4, 8, 12, 16 grm., oder 8, 16, 24 grm., oder 12, 24, 36 grm. fügen. Das Hinzufügen geschah, während die Waagschale arretirt war, und liefs sich durch ein zweites am Beobachtungstisch angebrachtes Fernrohr überwachen.

Mit diesen Apparaten wurde nun folgendermafsen operirt.

5. Vorbereitungen. Nachdem die Spiegelklemmen von beiden Enden her über das Stäbchen geschoben waren, wurde dasselbe in den Torsionsapparat eingespannt und seine Länge, das heifst der Abstand der beiden festgeklemmten Querschnitte, bestimmt. Dazu war auf der Platte, auf der sich die eine Torsionsrolle mit ihrem Gestell der andern näher oder ferner schieben liefs, eine Millimetertheilung mit willkürlichem Anfangspunkt angebracht und ihr Werth bestimmt, indem *bekannte* Längen (nämlich die im I. Theil § 6 angegebenen Messingbleche von 50 resp. 63^{mm} Länge) zwischen die beiden Schraubklemmen eingeschoben wurden. Die Stellung der verschiebbaren Rolle auf dieser Theilung ergab sogleich die in Rechnung zu ziehende Länge des Stäbchens.

Digitized by Google

Stand jetzt der Apparat genau an der durch vorgezogene Linien bestimmten Stelle, so dafs die Entfernung der Spiegel von der Scala immer dieselbe war, so waren die zwei Spiegelchen so zu stellen, dafs man durch das Fernrohr in beiden zugleich die Scala erblickte. Dazu brachte ich nach Verdunklung des Zimmers an die Stelle des Fernrohr-Objectivs eine Laterna magica mit nur der Beleuchtungslinse, und liefs ihr helles Licht auf die Spiegelchen fallen. An der diesen gegenüberstehenden Wand erschienen dann die von ihnen reflectirten Bilder der Lampe; brachte ich diese durch Drehen der Spiegelchen auf die Scala, so war die ohne dies Hülfsmittel gewifs mühsame Einstellung vollendet.

Darauf wurde, nachdem die Schrauben erst der einen, dann der anderen Schraubklemme gelöst waren, entsprechend erst das eine, dann das andere Ende des Stäbchens um $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2}^{mm}$ aus diesen herausgezogen, so dafs die Spiegelklemmen nun ganz frei auf dem Stäbchen safsen, ohne ihre Stellung verändert zu haben. Dafs letzteres wirklich der Fall war, sah man an der Unveränderlichkeit der zwei Bilder der Scala im Fernrohr. Dann wurden die Stäbchenenden wieder in den Schraubklemmen festgespannt, die Belastungsvorrichtungen unter dem Torsionsapparat aufgestellt, die Torsionsrolle, an der nun torquirt werden sollte, gelöst, die andere festgestellt, und mit den Belastungen begonnen.

6. Elimination der Reibung. Die bei einer Belastung durch die Differenz der Bewegungen der festen und der beweglichen Rolle des Torsionsapparates gemessene Drehung ist nicht sogleich als richtig in Rechnung zu ziehen. Denn die Reibung der beweglichen Rolle in ihren Spitzen läfst den Drehungswinkel weder für den Fall der Belastung seinen wirklichen Werth, noch für den der Entlastung den Nullpunkt erreichen. Wäre man sicher, dafs die Fehler bei jeder Stellung der Rolle gleich grofs wären, so brauchte man nur mit den Differenzen von Drehungen für verschiedene Belastungen zu rechnen, statt mit den Drehungen selbst, um

Digitized by Google

von dem Einfluſs der Reibung frei zu seyn. Die Beobachtung nach einem noch zu erörternden Princip hat aber nicht zu vernachlässigende Verschiedenheiten der Reibung bei verschiedenen Stellungen der Rolle gezeigt, so daſs ihr Einfluſs bei jeder Beobachtung zu bestimmen nöthig ist. Dies geschah auf Grund folgender Vorstellung, die durch dazu angestellte Beobachtungen begründet worden ist.

Wäre keine Reibung vorhanden, so wüchse der Torsionswinkel τ lineär mit der Belastung P des Stäbchens, und sein Wachsthum während des Belastens würde in einem Coordinatensystem (P, τ) Fig. 26, Taf. II durch die Gerade $\overline{oA}$ dargestellt. Ich nenne diesen den idealen Verlauf der Drehung.

In Wirklichkeit ist aber (ganz abgesehen von einer durch vorhergehende Drehungen erzeugten dauernden Torsion, die der *innern* Reibung des Stäbchens das Daseyn verdankt) die Drehung im unbelasteten Zustande nicht $= o$, sondern gleich dem kleinen Werth $\overline{oa}$ in Fig. 27, wie sie der Reibung in der Axe gemäſs von der vorhergehenden Drehung zurückgeblieben ist. Beginnt nun die Drehung, so bleibt der Torsionswinkel zunächst unverändert $\tau = \overline{oa}$, bis P die einer idealen Torsion um $\overline{oa}$ entsprechende Belastung P_0 überschritten hat, und bleibt beim weitern Verlauf mehr und mehr hinter dem idealen zurück; für $P = P_1$ etwa um $\overline{Ab}$. Beim Entlasten wird der wirkliche Torsionswinkel je mehr und mehr gröſser werden, als der ideale, so daſs der ganze Verlauf der Belastung und Entlastung im P, τ Coordinatensystem (Fig. 26, Taf. II) durch die Curve $apbqa$ dargestellt ist. Die Regelmäſsigkeit desselben wird aber durch die Verschiedenheit der Reibung in verschiedenen Stellungen der Rollen so sehr zerstört, daſs es nicht möglich ist, ein Gesetz für denselben aufzustellen und zur Correction der Beobachtungen zu verwenden. Nur das kann man annehmen, daſs in der Mitte des durchlaufenen Intervalles, für $P = \frac{P_1}{2}$, der auf dem Hin- und der auf dem

Digitized by Google

Rückwege passirte Werth des Torsionswinkels von dem idealen um gleichviel verschieden ist, dafs also in Fig. 26 $\frac{P_2 p + P_2 q}{2} = P_2 c$. Hieraus ist die Regel zu schliefsen, dafs, wenn man sich einem bestimmten Werth der Belastung P aus derselben Entfernung einmal von gröfseren, das andere Mal von kleineren Werthen nähert und beide Male die Torsion bestimmt, das Mittel aus beiden Messungen die der Belastung P entsprechende ideale Torsion ist.

Diese Regel wandte ich bei der folgenden Beobachtungsmethode an, die anschaulich zu beschreiben ich abermals die Darstellung in einem (P, τ) Coordinatensystem wähle, unter der Annahme, dafs der Torsionswinkel τ durch die mittelst Fernrohres an der *Scala* abgelesenen Werthe gemessen wird.

Es sey in Fig. 27 $\overline{P_1 A} = P_1 . \tau_1$ der der Belastung P_1 entsprechende ideale Torsionswinkel (also τ_1 der für 1 Gramm), welcher durch einen vorläufigen Versuch bis auf einzelne Scalentheile bereits bestimmt ist. Um zunächst den Endpunkt A zu finden, torquire ich durch ein Uebergewicht etwa um 10 Scalentheile über A hinaus und lese nach Entfernung des Uebergewichtes zum ersten Male die Stellung der Spiegel bei der Belastung P_1 ab; dann ist der in der Figur dargestellte Verlauf $abcd$ beendet; dem Punkt d entspreche der Theilstrich d der Scala. Hierauf wird die Belastung um den Werth des erwähnten Uebergewichtes zeitweilig vermindert und nach Beendigung des Weges def in der Fig. 27 zum zweiten Male bei der Belastung P_1 abgelesen; es finde sich der Theilstrich f. Dann ist der dem Endpunkt A entsprechende Scalentheil $= \frac{d+f}{2}$. Die Entlastung führt auf den Punkt g der Scala; die Abweichung desselben vom Nullpunkt ist um so gröfser, je gröfser die vorhergegangene Torsion war; diese Veränderlichkeit fortzuschaffen, wird noch einmal um etwa 10 Scalentheile torquirt und so durch Fortführung des Verlaufs um das Stück gha der dritte abge-

Digitized by Google

lesene Punkt a gewonnen. Die Abweichung $oa = \Delta$ wird nicht bestimmt, sondern aus einer Reihe Beobachtungen mit wachsender Belastung eliminirt. Bezeichnet Sa das Gewicht der Waagschale, so giebt eine solche unter Benutzung der Entfernung E der Scala vom Spiegel:

$$\text{arctg}\left(\frac{\frac{d_0+f_0}{2}-a}{E}\right) = r_1 Sa - \Delta$$

$$\text{arctg}\left(\frac{\frac{d_1+f_1}{2}-a}{E}\right) = r_1 (Sa + P_1) - \Delta$$

$$\text{arctg}\left(\frac{\frac{d_2+f_2}{2}-a}{E}\right) = r_1 (Sa + 2P_1) - \Delta \text{ u. s. f.}$$

Bei der Elimination von Δ fällt zugleich $r_1 . Sa$ heraus, das Gewicht der Waagschale wird also nicht berücksichtigt; ich wählte es darum, wie es den verschiedenen Stäbchen angemessen erschien, bald gröfser, bald kleiner.

Die bei dieser Methode erwähnten Veränderungen der Belastung während der Beobachtung wurden durch die auf S. 186 und in Fig. 23 beschriebene Vorrichtung hervorgebracht. Der zum Arretiren der Waagschale w bestimmte Draht $\overline{pq}$ griff nämlich nicht unmittelbar ihren Bügel an, sondern eine zwischen der Waagschale und ihrer Aufhängung eingeschaltete, wie in Fig. 28 geformte Drahtöse mit den drei Oeffnungen rtu. In der Oeffnung t hing die Waagschale, in r griff der zum Tragen der Waagschale in den Querschnitt ss (vergl. die Fig. 21) eingeschraubte Haken v, durch die mittlere u ging der erwähnte Draht $\overline{pq}$. Liefs man ihn frei hindurch gehen, so lastete die Waagschale mit den aufgelegten Gewichten vollständig auf dem Stäbchen; indem man ihn hob, konnte man sie erleichtern und selbst ganz arretiren; senkte man ihn aber, so dafs er auf dem untern Rand der Oese u auflag, so wurde das Gewicht der Waagschale um *sein* Gewicht vermehrt.

Der Einfluſs der Reibung ist im hohen Grade von der

Digitized by Google

Art und Weise abhängig, mit der die Belastung geschieht; dabei stattfindende auch nur geringe Erschütterungen vermindern ihn bedeutend. Um eine möglichst grofse Gleichmäfsigkeit zu erzielen, suchte ich ein Belasten und Entlasten ohne alle durch das Beobachtungsfernrohr (welches Schwankungen von 10″ bemerken liefs) sichtbaren Erschütterungen des Stäbchens zu erlernen. Neben der sorgfältigen Zusammenstellung der Belastungsapparate war eine ruhige Hand beim Regieren der Drahtleitungen die Hauptsache. Denn wenn auch das Aufsetzen neuer Gewichte auf die *arretirte* Waagschale geschah, die erwähnten kleinen Veränderungen der Belastung wirkten unmittelbar auf das Stäbchen. Die eigenthümliche Form der kleinen Drahtöse ist unter mehreren versuchten als die zu diesem Zweck passendste gefunden worden.

7. Benutzung einiger Sätze über dauernde Dilatationen. Eine Gattung von Stäbchen (die späterhin mit *GB* bezeichnete) erhielt bei geringen Belastungen ganz aufserordentlich grofse dauernde Deformationen, so dafs von einer hervorgebrachten Drehung oft nur ein Drittel beim Entlasten verschwand. Dadurch gewann die elastische Nachwirkung, von der im nächsten Abschnitt gehandelt werden soll, eine solche Bedeutung, dafs sie Abweichungen von der Proportionalität zwischen Belastung und Torsionswinkel bis zu $\frac{1}{10}$ des letzteren verursachte. Um einen so grofsen Einfluſs eines Fehlergliedes zu vermeiden, suchte ich die starke Deformation durch folgenden Kunstgriff aufzuheben.

Die Untersuchung des Rückstandes in gebogenen Stäbchen hatte gezeigt, dafs die durch ein gewisses Gewicht erzeugte bleibende Biegung in *einer* Richtung durch eine gleich grofse in der entgegengesetzten Richtung völlig zerstört und zugleich in letzterer Richtung eine Elasticitätsgränze gleich dieser Belastung hervorgebracht würde. Es zeigte sich, dafs dies für die Torsion anwendbar war, und ich verfuhr darum wie folgt. Beabsichtigte ich, mit höchstens 20 grm. zu belasten, so liefs ich zunächst 20 oder,

Digitized by Google

um recht sicher zu gehen, 22 grm. in der, der beabsichtigten Drehung *entgegengesetzten* Richtung einige Zeit wirken; hätten diese etwa eine bleibende Torsion um 2° hervorgebracht, so brachte eine Belastung mit 22 Grm. im entgegengesetzten Sinn das Stäbchen auf die natürliche Gestalt zurück, die es bei allen folgenden Belastungen (in *letzterer* Richtung!) innerhalb 22 grm. (also jedenfalls bis 20 grm.) nicht verlor.

Die Anwendung dieser Vorsichtsmafsregel liefs die Abweichungen von der Proportionalität erheblich geringer werden. Unter den Stäbchen *GB* ist No. III und IV ohne, Nr. II und V mit Benutzung derselben beobachtet.

Um ein Maximum der Belastung für jedes Stäbchen zu bestimmen, das ohne Gefahr für das kostbare Material erreicht, aber nicht überschritten werden durfte, und doch nicht durch unnöthig kleine Drehungen der Genauigkeit Eintrag zu thun, benutzte ich folgenden Satz aus jener Untersuchung des Rückstands in gebogenen Stäben (Dissertation S. 39 Satz IV):

Das Brechen eines Stäbchens erfolgt, wenn jede mitgetheilte Verschiebung sogleich dauernd, also keine elastische Kraft mehr erregt wird.

Die universelle Natur dieses Satzes erlaubte, ihn ohne weiteres auf torquirte Stäbchen zu übertragen und folgendermafsen anzuwenden. Hatte ich bereits mit 20 grm. torquirt und wollte wissen, ob ein Weiterbelasten ungefährlich wäre, so torquirte ich mittelst der am Ende des vorigen Paragraphen beschriebenen Vorrichtung noch um 10′, und abermals um 10′ weiter und beobachtete nach Entfernung des Uebergewichts, wieviel jedesmal von dem mitgetheilten Zuwachs dauernd geworden war. Betrug dies etwa die Hälfte — also jedesmal 5′ —, so war noch keine Gefahr im Weiterbelasten. Legte ich nun 25 grm. auf und operirte wie zuvor, und fand, dafs $\frac{3}{4}$ bis $\frac{5}{6}$ des ertheilten Zuwachses dauernd wurde, so stand ich von dem Weiterbelasten in der Regel ab; jedenfalls aber, wenn der Bruchtheil noch gröfser war.

Digitized by Google

Den grofsen Vortheil dieser Methode für alle Versuche über Elasticität, die die untersuchten Präparate gefährden, zeigt die Thatsache, dafs bei den Torsionsversuchen nicht *ein* Stäbchen zerbrochen ist. Dies war zumal gegenüber den grofsen vor der Entdeckung dieses Satzes bei den Versuchen über die Biegung erlittenen Verlusten ein grofser Fortschritt.

III. Die Beobachtungen und ihre Berechnung.

8. Ueber die zu den Beobachtungen verwandten Stäbchen. Die wenigen von den Versuchen über die Biegung noch übrigen Stäbchen waren wegen der nicht untadelhaft gebliebenen Politur nur zu vorläufigen Beobachtungen der Torsion zu benutzen. Diese zeigten, dafs die neu anzufertigenden Stäbchen eine gröfsere Dicke haben durften, als die früher verwendeten, denn die Beobachtungsmethode mit Spiegel und Fernrohr war genau genug, um nur kleine Torsionswinkel zu erfordern, und eine Belastung mit grofsen Gewichten vortheilhaft, weil dabei das zum Ueberwinden der Reibung nöthige Gewicht im Verhältnifs zu dem ganzen aufgelegten nur klein war. Gröfsere Dicke liefs sich zugleich genauer bestimmen, als kleinere; und zumal, da die Dimensionen mit einer Art von Schubmaafs (s. I, § 8) gemessen werden mufsten, während die Stäbchen in Terpentinöl lagen, war es wünschenswerth, dafs eine Genauigkeit bis auf $0{,}01^{mm}$ genügte; denn vollständig unsichtbar in dem Terpentinöl umherschwimmende Fäserchen von $0{,}01^{mm}$ und mehr Dicke konnten Fehler in der Messung hervorbringen, deren Ursprung nicht nachzuweisen war. Wiederholte Messungen desselben Stäbchens stimmten denn auch nur bis auf $0{,}01^{mm}$. In Rechnung gezogen wurde nach II, § 3 das Mittel aus 10 — 14 Messungen, von denen die Hälfte in der einen, die andere in der entgegengesetzten Lage des Stäbchens an gleich weit von einander entfernten Stellen gemacht war.

Die verschiedenen zu Torsionsbeobachtungen benutzten Arten von Stäbchen wurden folgendermafsen erhalten:

Digitized by Google

Von dem Krystall wurde eine $5 - 8^{mm}$ dicke Platte durch Spalten abgelöst. Stäbchen, welche von dieser parallel einer Kante abgesägt wurden, bildeten die erste Gattung; ihre Axe steht normal zu einer Würfelfläche, daher die Bezeichnug der Gattung *W*. Die Lage der Seitenflächen des Stäbchens ist bei dieser Gattung gleichgültig, wie die in § 1 angegebene Formel zeigt. Es war am bequemsten, sie Würfelflächen parallel zu legen. Der Torsionswinkel der Gattung *W* ist bestimmt durch die Formel

$$\tau = \frac{3\,M\,l}{4\,b^3\,d^3}\left[\frac{b^2+d^2}{\varepsilon}\right].$$

Stäbchen, die aus der erwähnten Platte parallel ihrer Diagonale geschnitten wurden, standen mit ihrer Axe normal zu einer Granatoëderfläche, darum erhielten sie die Bezeichnung *G*. Bei ihnen war die Lage der Seitenflächen nicht gleichgültig; fiel die Schmalseite in die Ebene der Platte (d. i. in eine Würfelfläche) und also die Breitseite in eine Granatoëderfläche, so nannte ich die Gattung *GA*, im umgekehrten Falle *GB*. Der Torsionswinkel ist für die Gattung *GA*:

$$\tau = \frac{3\,M\,l}{4\,b^3\,d^3}\left[\frac{b^2}{\varepsilon} + \frac{2\,d^2}{A-B}\right]$$

und für die Gattung *GB*:

$$\tau = \frac{3\,M\,l}{4\,b^3\,d^3}\left[\frac{d^2}{\varepsilon} + \frac{2\,b^2}{A-B}\right].$$

Endlich schnitt ich parallel einer Granatoëderfläche eine Platte aus dem Krystall; die Diagonale dieses Durchschnittsrechtecks steht normal zu einer Octaëderfläche; Stäbchen, deren Axe in diese Richtung fällt, sind mit *O* bezeichnet. Ihre Torsion ist im Allgemeinen abhängig von der Lage der Seitenflächen, zufällig aber gerade gleich für die beiden Gattungen, bei denen die Schmal- oder Breitseite in die Fläche der erwähnten Platte fällt, und die ich gewählt und angefertigt hatte, ehe mir die Formel bekannt war; nämlich

$$\tau = \frac{3\,M\,l}{4\,b^3\,b^3}\,\frac{(b^2+d^2)}{3}\left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{4}{A-B}\right].$$

Digitized by Google

Von diesen vier Gattungen Stäbchen hätten je zwei genügt, die zwei Werthe $\frac{1}{\epsilon}$ und $\frac{1}{A-B}$ zu bestimmen; die übrigen konnten dienen, um die Beobachtung mit der Theorie zu vergleichen.

9. Die Beobachtungstafeln. Die mit den vier Gattungen von Stäbchen angestellten Beobachtungen sind in den folgenden Tafeln enthalten. Nicht aufgenommen sind alle diejenigen, bei denen die Methode noch nicht vollständig die oben beschriebene war, sowie auch sechs nach der definitiven Methode angestellte Beobachtungsreihen, bei denen nachweisbar Störungen stattgefunden hatten, und die deshalb zum Theil nicht beendet waren. Diese Störungen bestanden in Unregelmäfsigkeiten theils der Gestalt der Stäbchen, theils der Einspannung derselben in den Apparat, wie sich dergleichen während der Beobachtung zeigten, theils in Erschütterungen des Beobachtungsraumes durch vorüberfahrende Wagen und dgl. Bei Torsionen um die Axe sind die auf ein Stäbchen bezüglichen Beobachtungen in einer, bei Torsionen um die Kante in zwei Tafeln enthalten, die sich nach § 3 auf zwei diagonal gegenüberliegende Kanten als Drehungsaxe beziehen. Für jedes Stäbchen ist angegeben: seine Gattung und Nummer in derselben, sodann seine Dimensionen *l, b, d*, von denen die erste (gleich dem Abstand der zwei das Stäbchen haltenden Klemmen) sich bei wiederholtem Einspannen verschieden finden konnte. Für Breite und Dicke ist nicht jede einzelne Messung, sondern sogleich das Mittel aus allen angegeben, weil auf die Torsion die Gestalt des Stäbchens nicht von solchem Einflufs ist, wie auf die Biegung. Es folgen darauf die Beobachtungen; zu oberst die in jeder Verticalreihe constante Belastung *P*, ausgedrückt in dem Gewicht der Waagschale Sa + der Anzahl aufgelegter Gramme. Jede Tafel enthält zwei Beobachtungsreihen: bei der ersten (*r*) war die rechts befindliche, durch eine eingeritzte I gekennzeichnete Rolle des Torsionsapparates beweglich, die linke, II fest; bei der zweiten, (*l*) umgekehrt. In jeder Reihe fanden für jede

Digitized by Google

Belastung zwei oder drei Ablesungen statt: angegeben ist das Mittel aus ihnen. Bei der Vergleichung der Resultate in verschiedenen Beobachtungsreihen sind nicht die absoluten Werthe der Drehungswinkel in Betracht zu ziehen, sondern deren beigeschriebene Differenzen, die von dem Einfluſs der Reibung frei sind.

Torsion um eine Kante.

W. I. 1) $l = 65{,}5^{mm}$; $b = 5{,}31^{mm}$; $d = 1{,}41^{mm}$.

P	Sa	Sa + 12	Sa + 24	Sa + 36
τ r	27′ 0″	66′ 0″	105′ 10″	143′ 20″
	39′ 0″	39′ 10″	38′ 10″	
τ l	28′ 0″	67′ 10″	105′ 50″	145′ 20″
	39′ 10″	38′ 40″	39′ 30″	

2) $l = 64{,}6^{mm}$.

τ r	26′ 30″	65′ 20″	104′ 30″	144′ 0″
	38′ 50″	39′ 10′	39′ 30″	
τ l	28′ 50″	68′ 20″	108′ 0″	148′ 0″
	39′ 30″	39′ 40″	40′ 0″	

Torsion um die geometrische Axe.

W. I. 3) $l = 64{,}8^{mm}$.

P	Sa	Sa + 10	Sa + 20	Sa + 30
τ r	14′ 40″	46′ 20″	77′ 50″	109′ 50″
	31′ 40″	31′ 30″	32′ 0″	
τ l	14′ 30″	45′ 40″	77′ 10″	108′ 50″
	31′ 10″	31′ 50″	31′ 40″	

Torsion um eine Kante.

W. II. 1) $l = 64{,}8^{mm}$; $b = 5{,}42^{mm}$; $d = 1{,}23$.

P	Sa	Sa + 8	Sa + 16	Sa + 24
τ r	38′ 50″	75′ 30″	112′ 50″	150′ 0″
	36′ 40″	37′ 20″	37′ 10″	
τ l	40′ 40″	78′ 30″	116′ 10″	154′ 10″
	37′ 50″	37′ 40″	38′ 0″	

Wegen einiger Bedenken im Folgenden mit einer leichteren Waagschale wiederholt.

Digitized by Google

W. II. 2) $l = 64{,}1^{mm}$.

P =	Sa	Sa + 8	Sa + 16	Sa + 24
τ r	20′ 30″	57′ 0″	93′ 30″	130′ 20″
	36′ 30″	36′ 30″	36′ 50″	
τ l	20′ 20″	57′ 20″	94′ 30″	132′ 0″
	37′ 0″	37′ 10″	37′ 30″	

3) $l = 64{,}8^{mm}$.

τ r	19′ 20″	56′ 30″	94′ 0″	131′ 40″
	37′ 10″	37′ 30″	37′ 40″	
τ l	19′ 50″	57′ 30″	96′ 10″	134′ 30″
	37′ 40′	37′ 40″	38′ 20″	

W. III. 1) $l = 64{,}9^{mm}$; $b = 5{,}44^{mm}$; $d = 1{,}24^{mm}$.

P =	Sa	Sa + 8	Sa + 16	Sa + 24
τ r	36′ 50″	73′ 10″	109′ 0″	145′ 20″
	36′ 20″	35′ 50″	36′ 20″	
τ l	40′ 30″	77′ 20″	114′ 40″	151′ 50″
	36′ 50″	37′ 20″	37′ 10″	

2) $l = 64{,}7^{mm}$.

τ r	39′ 20″	76′ 10″	113′ 40″	150′ 30″
	36′ 50″	37′ 30″	36′ 50″	
τ l	37′ 30″	74′ 20″	111′ 10″	148′ 30″
	36′ 50″	36′ 50″	37′ 20″	

G A. I. 1) $l = 57{,}0^{mm}$; $b = 5{,}11^{mm}$; $d = 1{,}30^{mm}$.

P =	Sa	Sa + 8	Sa + 16	Sa + 24
τ r	31′ 30″	61′ 20″	91′ 10″	121′ 10″
	29′ 50″	29′ 50″	30′ 0″	
τ l	30′ 30″	60′ 20″	90′ 30″	120′ 50″
	29′ 50″	30′ 10″	30′ 20″	

2) $l = 58{,}0^{mm}$.

τ r	31′ 20″	60′ 50″	90′ 50″	120′ 40″
	29′ 30″	30′ 0″	29′ 50″	
τ l	32′ 0″	61′ 30″	91′ 40″	121′ 40″
	29′ 30″	30′ 10″	30′ 0″	

Digitized by Google

GA. II. 1) $l = 59{,}6^{mm}$; $b = 5{,}12^{mm}$; $d = 1{,}33^{mm}$.

	P = Sa		Sa + 8		Sa + 16		Sa + 24
τ	r	26′ 30″	54′ 50″		83′ 40″		112′ 40″
			28′ 20″		28′ 50″		29′ 0″
	l	30′ 40″	59′ 20″		88′ 30″		117′ 0″
			28′ 40″		29′ 10″		28′ 30″

2) $l = 59{,}6^{mm}$.

τ	r	28′ 0″	55′ 50″		84′ 10″		112′ 10″
			27′ 50″		28′ 20″		28′ 0″
	l	28′ 40″	57′ 10″		85, 50″		114′ 10″
			28′ 30″		28′ 40″		28′ 20″

GB. II. 1) $l = 55{,}7^{mm}$; $b = 3{,}34^{mm}$; $d = 1{,}34^{mm}$.

	P = Sa		Sa + 3		Sa + 6		Sa + 9
τ	r	19′ 20″	34′ 0″		49′ 10″		64′ 10″
			13′ 40″		15′ 10″		15′ 0″
	l	21′ 40″	36′ 10″		51′ 0″		66′ 0″
			14′ 30″		14′ 50″		15′ 0″

2) $l = 55{,}1$.

τ	r	20′ 20″	34′ 10″		48′ 10″		62′ 40″
			13′ 50″		14′ 0″		14′ 30″
	l	20′ 40″	34′ 10″		47′ 50″		62′ 0″
			13′ 30″		13′ 40″		14′ 10″

GB. III. 1) $l = 40{,}0^{mm}$; $b = 3{,}01^{mm}$; $d = 1{,}12^{mm}$.

	P = Sa		Sa + 3		Sa + 6		Sa + 9
τ	r	7′ 20″	21′ 20″		35′ 50″		51′ 20″
			14′ 0″		14′ 30″		15′ 30″
	l	10′ 40″	24′ 40″		39′ 30″		54′ 40″
			14′ 0″		15′ 10″		15′ 10″

2) $l = 40{,}2^{mm}$.

τ	r	8′ 20″	23′ 10″		38′ 40″		55′ 10″
			14′ 50″		15′ 30″		16′ 30″
	l	10′ 0″	25′ 30″		41′ 10″		57′ 20″
			15′ 30″		15′ 40″		16′ 10″

Digitized by Google

G B. V. 1) $l = 58{,}4^{mm}$; $b = 3{,}90^{mm}$; $d = 1{,}33^{mm}$.

	P = Sa	Sa + 3	Sa + 6	Sa + 9	Sa + 12
τ r	9′ 0″	20′ 40″	32′ 30″	44′ 50″	56′ 50″
		11′40″	11′50″	12′ 20″	12′ 0″
τ l	11′ 10″	23′ 10″	35′ 0″	47′ 10″	59′ 10″
		12′0″	11′50″	12′ 10″	12′ 0″

2) $l = 58{,}9^{mm}$.

τ r	12′ 0″	24′ 10″	36′ 0″	48′ 10″	60′ 20″
		12′ 10″	11′ 50″	12′ 10″	12′ 10″
τ l	10′ 30″	22′ 10″	34′ 40″	46′ 30″	58′ 50″
		11′40″	12′ 30″	11′ 50″	12′ 20″

Torsion um die geometrische Axe.

G B. V. 3) $l = 57{,}0^{mm}$.

	P = Sa	Sa + 5	Sa + 10	Sa + 15
τ r	16′ 10″	35′ 10″	54′ 20″	74′ 30″
		19′ 0″	19′ 10″	20′ 10″
τ l	17′ 10″	35′ 50″	54′ 50″	75′ 0″
		18′ 40″	19′ 0″	20′ 10″

Torsion um eine Kante.

O. I. 1) $l = 59{,}6^{mm}$; $b = 4{,}56^{mm}$; $d = 1{,}31^{mm}$.

	P = Sa	Sa + 8	Sa + 16	Sa + 24
τ r	16′ 20″	46′ 0″	75′ 50″	106′ 0″
		29′ 40″	29′ 50″	30′ 10″
τ l	16′ 0″	46′ 10″	76′ 10″	106′ 50″
		30′ 10″	30′ 0″	30′ 40″

2) $l = 59{,}6^{mm}$.

τ r	12′ 50″	42′ 20″	71′ 30″	101′ 10″
		29′ 30″	29′ 10″	29′ 40″
τ l	14′ 0″	43′ 50″	73′ 50″	103′ 50″
		29′ 50″	30′ 0″	30′ 0″

Digitized by Google

O. II. 1) $l = 55{,}7^{mm}$; $b = 4{,}38^{mm}$; $d = 1{,}38^{mm}$.

	P =	Sa		Sa + 8		Sa + 16		Sa + 24
τ	r	15′ 20″		41′ 20″		67′ 30″		93′ 40″
			26′ 0″		26′ 10″		26′ 10″	
	l	14′ 20″		40′ 40″		66′ 40″		93′ 0″
			26′ 20″		26′ 0″		26′ 20″	

2) $l = 54{,}6^{mm}$.

τ	r	14′ 0″		38′ 40″		63′ 20″		88′ 40″
			24′ 40″		24′ 40″		25′ 20″	
	l	13′ 10″		38′ 30″		64′ 0″		89′ 50″
			25′ 20″		25′ 30″		25′ 50″	

Torsion um die geometrische Axe.

O. II. 3) $l = 56{,}1^{mm}$.

τ	r	12′ 50″		37′ 40″		63′ 0″		89′ 0″
			24′ 50″		25′ 20″		26′ 0″	
	l	14′ 40″		39′ 10″		64′ 0″		89′ 40″
			24′ 30″		24′ 50″		25′ 40″	

Bei den Beobachtungen der Torsion *um eine Kante* war der Radius der I. Torsionsrolle $38{,}0^{mm}$, der der II. $38{,}2^{mm}$; also sollten die Differenzen der ersten Beobachtungsreihe in jeder Tafel um etwa $\frac{1}{200}$ kleiner seyn als die der zweiten. Dies ist aber in den wenigsten Tafeln erfüllt; zwei Ursachen dieses Fehlers sind mir klar geworden. Die erste fand sich bei zwei von der obigen Zusammenstellung ausgeschlossenen Beobachtungstafeln von *GA.* I., in denen die Differenzen der zweiten Reihe kleiner waren, als die in der ersten. Es zeigte sich, dafs ein kaum $0{,}1^{mm}$ dickes Steinsalzsplitterchen zwischen den kleinen Widerhalt *W* (siehe Fig. 18, Taf. II) und das Stäbchen gekommen war und dasselbe verhindert hatte, mit seiner Kante genau in der Drehungsaxe zu liegen. Die nach seiner Entfernung angestellten mitgetheilten Beobachtungen von *GA.* I. sind von diesem Fehler frei. Eben

Digitized by Google

solche Störungen — wie sie sehr leicht vorkommen konnten, da das Stäbchen mit einer Schicht dickflüssigen Terpentines überzogen in den Torsionsapparat eingespannt wurde, — müssen zum Theil die Abweichungen bei den andern Stäbchen verursacht haben, wenn sie da auch nicht nachgewiesen werden konnten. Sie lassen jedenfalls die Torsionswinkel zu klein erscheinen.

Eine zweite Ursache des in den Tafeln sichtbaren Fehlers ist die folgende. Es zeigte sich mitunter in der Axe der einen Rolle nach dem Einspannen der Stäbchen eine starke Reibung, die vorher nicht vorhanden gewesen war, und sich auch durch eine Vergrößerung der Entfernung zwischen beiden Spitzen, in denen die Rolle lief, nicht vermindern ließs. Sie enstand dadurch, daſs die das Stäbchen haltende Klemme dasselbe in zwei nicht demselben Querschnitt angehörigen Linien faſste, — etwa wie Fig. 29, Taf. II zeigt. Dann wurde durch Anziehen der Muttern *m* das Stäbchen gebogen und dadurch ein Druck auf die Axe der Rolle ausgeübt, an welcher sich die Klemme befand, der sich in der vermehrten Reibung kund that. Die Folge muſste eine zu kleine Torsion bei der Belastung an dieser Rolle seyn; denn ein so angespanntes Stäbchen muſs der Drehung einen gröſseren Widerstand leisten, als ein im natürlichen Zustand befindliches. Wo in einer Reihe Beobachtungen also die Reibung sehr groſs und *zugleich* der Drehungswinkel auffällig klein gefunden ist, dürfte das eben erwähnte stattgefunden haben; z. B. bei *W.* I. Tafel 1, *W.* III. Tafel 1 und 2, und vielleicht auch *O.* I. Tafel 2.

Soweit er nicht von diesen kleinen Biegungen hervorgebracht wurde, scheint der Einfluſs der Reibung durch die angewandte Beobachtungsmethode ziemlich vollständig eliminirt zu seyn. Um zu zeigen, wie sehr wechselnde Werthe er für verschiedene Stellungen der Rolle haben kann, führe ich als Beispiel an: *W.* II. Tafel 2, wo sich für ihn in der ersten Reihe 5,6 6,2 6,0 6,4, in der zweiten 5,3 4,4 3,8 2,5 Scalentheile ergaben, deren je-

Digitized by Google

des einer Drehung um 56″ entspricht. Dennoch erreichen die Abweichungen der beobachteten Winkelwerthe von den im nächsten Abschnitt berechneten nicht 10″.

10. Der Einfluſs der elastischen Nachwirkungen auf die Werthe der gemessenen Torsionswinkel. Bei der Biegung wurde, wie im I. Theil S. 47 bemerkt, die elastische Nachwirkung nur bei Stäbchen (der zweiten Serie), die eine starke Deformation durch zuvor damit angestellte Rückstandsbeobachtungen erlitten hatten, — und selbst bei diesen ganz unerheblich, — gefunden, während die zur definitiven Bestimmung des Elasticitätscoëfficienten angestellten Beobachtungen (der dritten Serie) keine Spur davon zeigten. So günstig gestalteten sich die Verhältnisse bei der Torsion nicht. Die Differenzen aufeinander folgender Beobachtungen derselben Reihe zeigen ein nicht zu vernachlässigendes Wachsen mit der Belastung.

Auf Grund darauf zielender Versuche bin ich zu der Annahme gekommen, daſs, wenn es möglich wäre, in einem einzigen Augenblick ohne Erschütterung zu entlasten, die Proportionalität zwischen Belastung und Torsionswinkel vollständig erfüllt, also eine Reihe von Beobachtungen dargestellt seyn würde durch:

$$\beta_0 = \tau_1 (Sa) - \Delta$$
$$\beta_1 = \tau_1 (Sa + P) - \Delta$$
$$\beta_2 = \tau_1 (Sa + 2P) - \Delta$$
$$\beta_3 = \tau_1 (Sa + 3P) - \Delta \text{ u. s. f.}$$

(wo Δ, wie in § 6, den Einfluſs der Reibung im entlasteten Zustand bedeutet,) und daſs diese Werthe sich nur mit der Zeit durch Hinzutreten eines positiven, mit der Belastung schnell wachsenden Gliedes ändern.

Um ein Gesetz für dieses Glied aufzufinden, war sein Werth zu klein und seine Aenderung mit der Zeit zu gering; denn seine zu Anfang lebhaftere Veränderung fand hauptsächlich während des langsamen Entlastens statt. Nach der Entlastung aber in sehr langen Zwischenräumen

Digitized by Google

abzulesen, um sich mehr und mehr dem definitiven Werth zu nähern, verbot sich, weil in so langer Zeit Erschütterungen des Beobachtungsraumes, die, (wie mehrfach erwähnt) von aufserordentlichem Einfluſs sind, zu leicht stattfinden und übersehen werden konnten.

Die Kleinheit der gesammten elastischen Nachwirkung, und die Absicht, nur eine Correction, (— nicht ein Gesetz —) für sie zu finden, erlaubte aber, den nach einem recht langsamen Entlasten beobachteten Werth des Torsionswinkels als den nach *unendlich* langer Zeit eingetretenen zu betrachten. Für die Abhängigkeit der elastischen Nachwirkung von der vorhergegangenen Belastung war gleichfalls experimentell nicht wohl ein Gesetz zu finden. Eine Art von Interpolationsformel folgerte ich aus einer bei der Untersuchung des Rückstandes (Dissertation S. 47, Anmerkung) gefundenen Anschauung der elastischen Nachwirkung bei der Biegung, als eines (wenn ich so sagen darf) negativen Rückstandes; ich vermuthete daher, daſs die elastische Nachwirkung angenähert dem empirischen Gesetz für die Abhängigkeit des Rückstandes von der Belastung folgen würde, und versuchte, da jene Formel (Dissertation S. 43) entwickelt kein quadratisches Glied giebt, ob die Hinzufügung eines der dritten Potenz der Belastung proportionalen Gliedes zu der Formel

$$\beta = \tau_1 (Sa + P) - \Delta$$

dieselbe mit den Beobachtungen übereinstimmender machen könnte.

In welchem Grade dies stattfindet, möge die folgende Zusammenstellung der nach der Formel

$$\beta = \tau_1 (Sa + P) + c (Sa + P)^3 - \Delta$$

berechneten Werthe der Torsionswinkel mit den beobachteten zeigen. Da bei der Elimination von Δ zugleich $\tau_1 (Sa)$ fortfällt, so läſst sich die der Berechnung zu Grunde gelegte Formel schreiben

$$\beta = a + \tau_1 P + c (Sa + P)^3.$$

Digitized by Google

τ_1, a und c sind gesucht; τ_1 stellt die Drehung für 1 gr. Belastung dar. Da die Länge l, das Moment M und der Torsionswinkel τ in der Formel

$$\tau = \frac{3\,M\,l}{d^3\,b^3}\left\{\frac{b^2+d^2}{\epsilon}\right.$$

$$-4\left(\frac{1}{2\epsilon}-\frac{1}{A-B}\right)\Big[\cos(l,x)\left(d^2\cos^2(d,x)+b^2\cos^2(b,x)\right)$$

$$+\cos(l,y)\left(d^2\cos^2(d,y)+b^2\cos^2(b,y)\right)$$

$$\left.+\cos(l,z)\left(d^2\cos^2(d,z)+b^2\cos^2(b,z)\right)\Big]\right\}$$

lineär vorkommen, so durfte der Berechnung das Mittel aus allen in den verschiedenen Beobachtungsreihen *desselben* Stäbchens vorkommenden Werthe von l, M und β zum Grunde gelegt werden. (Die verschiedenen Werthe von l und M unterscheiden sich bei demselben Stäbchen um weniger als $\frac{1}{100}$).

W. I. Torsion um eine Kante.

beob.	27′ 35″	66′ 44″	105′ 54″	145′ 10″
ber.	27′ 36″	66′ 44″	105′ 54″	145′ 10″

$a = 27'\,35'',5$; $12\,.\,\tau_1 = 39'\,6''$; $c = 0'',25$.

W. I. Torsion um die geometrische Axe.

beob.	14′ 35″	46′ 0″	77′ 30″	109′ 15″
ber.	14′ 35″	45′ 59″	77′ 31″	109′ 15″

$a = 14'\,34''$; $10\,.\,\tau_1 = 31'\,19''$; $c = 0'',69$.

W. II. Torsion um eine Kante.

beob.	20′ 0″	57′ 5″	94′ 32″	132′ 8″
ber.	19′ 55″	57′ 8″	94′ 34″	132′ 7″

$a = 19'\,54''$; $8\,.\,\tau_1 = 37'\,12''$; $c = 0'',58$.

W. III.

beob.	38′ 32″	75′ 15″	112′ 7″	149′ 2″
ber.	38′ 31″	75′ 16″	112′ 6″	149′ 2″

$a = 38'\,31''$; $8\,.\,\tau_1 = 36'\,42'',5$; $c = 0'',37$.

Digitized by Google

G A. I.

beob.	31′ 20″	61′ 0″	91′ 2″	121′ 5″
ber.	31′ 18″	61′ 4″	90′ 59″	121′ 5″

$a = 31' 17'',5$; $8.\tau_1 = 29' 41'',5$; $c = 0'',68$.

G A. II.

beob.	28′ 27″	56′ 47″	85′ 32″ (?)	114′
ber.	28′ 22″	56′ 53″	85′ 25″	114′

$a = 28' 22''$; $8.\tau_1 = 28' 30''$; $c = 0'',12$.

G B. II.

beob.	20′ 39″	34′ 45″	49′ 12″	63′ 48″
ber.	20′ 37″	34′ 47″	49′ 9″	63′ 48″

$a = 20' 36''$; $3.\tau = 14' 4''$; $c = 0'',94$.

G B. III.

beob.	9′ 5″	23′ 40″	38′ 47″	54′ 38″
ber.	9′ 6″,5	23′ 41″	38′ 46″	54′ 36″

$a = 9' 4''$; $3.\tau_1 = 14' 17''$; $c = 2'',52$.

G B. V.

beob.	10′ 40″	22′ 32″	34′ 32″	46′ 40″	58′ 48″
ber.	10′ 39″	22′ 33″	34′ 32″	46′ 37″	58′ 49″

$a = 10' 37''$; $3.\tau = 11' 50''$; $c = 0'',24$.

G B. V. Torsion um die geometrische Axe.

beob.	16′ 40″	35′ 30″	54′ 35″	74′ 45″
ber.	16′ 43″	35′ 24″	54′ 39″	74′ 44″

$a = 16' 40''$; $5.\tau_1 = 18' 22''$; $c = 2'',58$.

O. I. Torsion um eine Kante.

beob.	14′ 48″	44′ 35″	74′ 20″	104′ 28″
ber.	14′ 43″	44′ 30″	74′ 24″	104′ 27″

$a = 14' 42''$; $8.\tau_1 = 29' 44''$; $c = 0'',53$.

Digitized by Google

O. II.

beob.	14′ 12″	39′ 47″	65′ 22″	91′ 18″
ber.	14′ 13″	39′ 43″	65′ 15″	91′ 18″

$a = 14'\,12''$; $8.\tau_1 = 25'\,24''$; $c = 0'',84$.

O. II. Torsion um die geometrische Axe.

beob.	13′ 32″	38′ 22″	63′ 32″	89′ 20″
ber.	13′ 35″	38′ 22″	63′ 32″	89′ 15″

$a = 13'\,33''$; $8.\tau_1 = 24'\,35''$; $c = 1'',82$.

Aus dieser Zusammenstellung ersieht man Folgendes: Nirgends ist $c \leq o$, also geschah überall die Abweichung von der Proportionalität zwischen Torsionswinkel und Belastung in *demselben* Sinne; wenn dies auch von einzelnen Beobachtungsreihen unentschieden gelassen wird, so stimmen doch die Mittel aus allen auf dasselbe Stäbchen bezüglichen darin überein. Demnach können nicht blos Beobachtungsfehler diese Abweichungen verursachen.

Die Stäbchen, welche den gröfsten Rückstand zeigten, nämlich *G B.* und *O.*, ergaben das gröfste c, d. i. die bedeutendste Nachwirkung.

Die Torsion um die geometrische Axe zeigt gröfsere Nachwirkung, als die um eine Kante; der Grund hierfür liegt darin, dafs das Stäbchen, um centrirt zu werden, mehrfach hin- und hergedreht werden mufs (siehe S. 183) und hierbei ziemlich bedeutende Rückstände erhalten kann.

Anmerkung: Dies ist ein Grund, warum, trotz mancher Bequemlichkeiten, die Methode, das Stäbchen um die geometrische Axe zu torquiren, nicht zu empfehlen ist. Nach den gewonnenen Erfahrungen halte ich für das Beste, eine beliebige der geometrischen Axe parallel liegende Linie im Stäbchen zur Drehungsaxe zu wählen, und behufs Verkleinerung des Einflusses der unregelmäfsigen Gestalt, das Stäbchen in zwei entgegengesetzten Lagen zu beobachten, — also etwa so, dafs nach einander zwei gegenüberliegende Kanten in einem fest mit der Rolle verbundenen rechtwinkligen Widerhalt liegen.

Digitized by Google

11. Berechnung der Torsionsconstanten. Alle in der Formel für die Torsionswinkel (§ 1) vorkommenden Werthe sind angegeben bis auf den des ausgeübten Drehungsmomentes M. Da alle Beobachtungen auf die Belastung 1 gr. reducirt sind, so ist M für alle Beobachtungen gleich 1 gr. multiplicirt mit dem Radius der Rolle, an der torquirt wurde.

Die Radien der Rollen wurden mittelst eines kleinen Schubmaafses gemessen, dessen Schnäbel auf der einander zugewandten Seite so zugeschärft waren, dafs sie in die, um die Rolle laufende Rinne eingeschoben werden konnten. Figur 30, Tafel II stellt den Durchschnitt der einen halben Rolle und des anzuschiebenden einen Schnabels dar. Der als Hebelarm in Rechnung zu ziehende Radius der Rolle ist gleich der Entfernung ihres Mittelpunktes von der Axe des zum Daranhängen der Gewichte darumgeschlungenen dünnen Drahtes. Die Messung des Durchmessers der Rolle, *während der Aufhängedraht darum gelegt war*, vermindert um die Drahtdicke, gab hiervon das Doppelte.

Die Rollen des Apparates für die *Torsion um die geometrische Axe* ergaben auf diese Weise:

I. Rolle. Der Durchmesser an verschiedenen Stellen gemessen

73,90^{mm}; 73,90^{mm}; 73,85^{mm}; 73,90^{mm}; 73,95^{mm}; 73,90^{mm}.

Im Mittel: 73,9^{mm}. Davon ab die Drahtdicke 0,2^{mm} ergiebt 73,7^{mm}, also den Radius = 36,85^{mm}.

II. Rolle. Durchmesser:

73,50^{mm}; 73,50^{mm}; 73,50^{mm}; 73,45^{mm}; 73,50^{mm}.

Im Mittel: 73,49^{mm}. Davon die Drahtdicke = 0,04^{mm} ergiebt 73,45^{mm}, also den Hebelarm = 36,73^{mm}.

Für die *Torsion um eine Kante* wurden andere Rollen eingesetzt.

I. Rolle. Durchmesser:

76,00^{mm}; 76,15^{mm}; 76,15^{mm}; 76,00^{mm}; 75,80^{mm}; 76,05^{mm}; 76,05^{mm}; 76,00^{mm}; 76,00^{mm}.

Digitized by Google

Im Mittel: 76,03^{mm}, davon die Drahtdicke 0,04 ergiebt 76,99^{mm}, also den Hebelarm = 38,00^{mm}.

II. Rolle. Durchmesser:

76,43^{mm}; 76,42^{mm}; 76,45^{mm}; 76,48^{mm}; 76,47^{mm};
76,47^{mm}; 76,46^{mm}; 76,46^{mm}.

Im Mittel 76,46^{mm}; davon die Drahtdicke 0,04 ergiebt 76,42^{mm}, also den Hebelarm 38,21^{mm}.

Aus dem S. 206 erwähnten Grunde wurden die *Mittel* aus Werthen des Moments für die zwei Rollen desselben Apparates in Rechnung gezogen, also für die erste Art $M = 36{,}8^{mm}$. 1 gr. für die zweite $M = 38{,}1^{mm}$. 1 gr.

Durch Einsetzen der sämmtlichen gemessenen Werthe in die in § 8 aufgestellten Gleichungen für die Torsionswinkel der vier Gattungen Stäbchen erhalten die dort in Klammer stehenden Ausdrücke folgende Werthe:

Für die Stäbchen

W. I. 1) $\frac{26{,}9}{1000000} = 30{,}18 \cdot \frac{1}{\varepsilon}$

2) $\frac{26{,}7}{1000000} = 30{,}18 \cdot \frac{1}{\varepsilon}$

II. $\frac{27{,}3}{1000000} = 30{,}89 \cdot \frac{1}{\varepsilon}$

III. $\frac{27{,}2}{1000000} = 31{,}10 \cdot \frac{1}{\varepsilon}$

G A. I. $\frac{24{,}5}{1000000} = 26{,}11 \frac{1}{\varepsilon} + 3{,}37 \frac{1}{A - B}$

II. $\frac{24{,}2}{1000000} = 26{,}21 \frac{1}{\varepsilon} + 3{,}54 \frac{1}{A - B}$

G B. II. $\frac{9{,}7}{1000000} = 1{,}80 \frac{1}{\varepsilon} + 22{,}30 \frac{1}{A - B}$

III. $\frac{7{,}1}{1000000} = 1{,}25 \frac{1}{\varepsilon} + 18{,}05 \frac{1}{A - B}$

V. 1) $\frac{11{,}9}{1000000} = 1{,}76 \frac{1}{\varepsilon} + 30{,}44 \frac{1}{A - B}$

2) $\frac{11{,}3}{1000000} = 1{,}76 \frac{1}{\varepsilon} + 30{,}44 \frac{1}{A - B}$

Digitized by Google

$$O.\ \text{I.} \quad \frac{17{,}1}{1000000} = 7{,}51\ \frac{1}{\varepsilon} + 30{,}02\ \frac{1}{A-B}$$

$$\text{II. 1)} \quad \frac{16{,}1}{1000000} = 7{,}03\ \frac{1}{\varepsilon} + 28{,}11\ \frac{1}{A-B}$$

$$\text{2)} \quad \frac{15{,}7}{1000000} = 7{,}03\ \frac{1}{\varepsilon} + 28{,}11\ \frac{1}{A-B}.$$

Ist ein Stäbchen zwei Mal aufgeführt, so bezieht sich die zweite Reihe auf eine Torsion um seine geometrische Axe. Von der Berechnung der Constanten ist *G B.* II. und III. ausgeschlossen worden; ersteres, weil in seinen Beobachtungstafeln die zweiten Reihen wesentlich gröfsere Werthe zeigen als die ersten, ohne dafs hierfür ein Grund nachgewiesen werden konnte; letzteres, weil seine Belastung noch nicht unter Anwendung des in § 7 erwähnten Kunstgriffes geschah. Ihre Resultate sind aber unten mit den berechneten verglichen, um den Einfluſs der genannten Störungen zu zeigen.

Hieraus bestimmen sich, wenn man der Bequemlichkeit halber die beiden Hauptgleichungen durch die Summe der ersten sechs und der letzten fünf Formeln bildet, die beiden Torsionsconstanten:

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{0{,}8839}{1000000} \qquad \frac{1}{A-B} = \frac{0{,}3393}{1000000}.$$

Dabei ist vorausgesetzt, dafs die Einheiten des Momentes Millimeter und Gramme sind. Setzt man diese Werthe in die obigen zwölf Gleichungen wieder ein und vergleicht die sich ergebenden Werthe der rechten Seiten mit den aus den beobachteten berechneten linken, so zeigt sich folgende Uebereinstimmung:

W. I.	1)	26,9	26,8
	2)	26,7	26,8
II.		27,3	27,4
III.		27,2	27,5
G A. I.		24,5	24,2
II.		24,2	24,4
G B. V.	1)	11,9	11,8
	2)	11,3	11,8

Digitized by Google

O. I.	17,1	16,8
II. 1)	16,1	15,7
2)	15,7	15,7.

Ich füge hinzu von den Ausgeschlossenen:

G A. I.	24,3	24,2
G B. III.	7,1	7,2
II.	9,7	9,2.

12. Graphische Darstellung der Resultate. Um von den gefundenen Resultaten eine anschauliche Vorstellung zu erhalten, ist es practisch, die Torsion eines Stäbchens mit *quadratischem* Querschnitt zu betrachten, die nicht von der Lage seiner Seitenflächen, sondern nur von der Richtung seiner Axe im Krystall abhängt. Für ein solches lautet die Formel (s. § 1):

$$\tau = \frac{12\,M\,l}{d^4}\left[\frac{1}{A-B} + \left(\frac{1}{2\,\varepsilon} - \frac{1}{A-B}\right)\left(\cos^4(l,x) + \cos^4(l,y) + \cos^4(l,z)\right)\right].$$

Wegen der vollständigen Analogie dieser Gleichung mit der für die Biegung geltenden:

$$\eta = \frac{4\,P\,l^3}{d^4}\left[\left(\frac{1}{2\,\varepsilon} - \frac{B}{(A-B)\,(A+2B)}\right) - \left(\frac{1}{2\,\varepsilon} - \frac{1}{A-B}\right)\left(\cos^4(l,x) + \cos^4(l,y) + \cos^4(l,z)\right)\right]$$

könnte man den nur von der Richtung der Axe des Stäbchens abhängigen Werth der Klammer den Torsions- resp. Biegungscoëfficienten nennen.

Trägt man mit ihm proportionale Längen auf alle möglichen Richtungen vom Mittelpunkt eines Würfels auf, so erhält man durch ihre Endpunkte eine Oberfläche bestimmt und zwar für die Biegung die schon I. § 13 erwähnte, in Fig. 11, Taf. I dargestellte, für die Torsion aber die in Fig. 31, Taf. II gezeichnte. Aehnelt die Oberfläche für den Biegungscoëfficienten einem abgerundeten Würfel, so die für den Torsionscoëfficienten einem Octaëder, — beide über die Axen der Krystallform construirt.

Digitized by Google

Maxima oder Minima finden statt in den drei Richtungen der Würfel, Octaëder- und Granatoëdernormale, und zwar sind die Werthe der drei Biegungscoëfficienten:

$$B_w = \frac{0{,}243}{1000000} \qquad B_o = \frac{0{,}295}{1000000} \qquad B_d = \frac{0{,}312}{1000000},$$

und die der drei entsprechenden Torsionscoëfficienten:

$$T_w = \frac{0{,}442}{1000000} \qquad T_o = \frac{0{,}391}{1000000} \qquad T_d = \frac{0{,}373}{1000000}.$$

Vorausgesetzt ist, dafs die Belastungen in Grammen, die Längen in Millimetern ausgedrückt, in die Formeln eingesetzt werden.

Da die Biegungen und Drehungen diesen Coëfficienten proportional sind, so zeigt diese Zusammenstellung, dafs diejenige Gattung Stäbchen, die sich am leichtesten biegt, sich am schwersten torquiren läfst.

Ich füge hinzu, dafs auch, so weit meine Beobachtungen reichen, diejenige Gattung, die am leichtesten *zerbricht* (nämlich *W*), dem *Zerdrehen* den gröfsten Widerstand entgegensetzt.

Schlufsfolgerungen.

Es erübrigt noch die Berechnung der drei Elasticitätsconstanten A, B und ε durch Combination der numerischen Resultate beider Beobachtungsmethoden.

Durch die Beobachtungen der Biegung ist gefunden (I. § 13):

$$\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{B}{(A-B)(A+2B)} = \frac{0{,}3465}{1000000},$$

$$\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{A-B} = \frac{0{,}1031}{1000000},$$

durch die der Torsion

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{0{,}8839}{1000000}$$

$$\frac{1}{A-B} = \frac{0{,}3393}{1000000},$$

also daraus:

$$\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{A-B} = \frac{0{,}1027}{1000000},$$

Digitized by Google

was von dem obigen erst in der vierten Decimale abweicht, welche ohnehin unsicher ist. Ich behalte im Weiteren nur die dritte bei.

Aus diesen Zahlenwerthen ergiebt sich das wichtige Verhältnifs der zwei Constanten A und B:

$$96\,A = 148\,B$$

oder

$$A = 1{,}54\,B.$$

Die Constanten selbst erhalten folgende Werthe:

$$A = 84_{50000}\text{ gr.}$$
$$B = 55_{00000}\text{ gr.}$$
$$\varepsilon = 113_{000}\text{ gr.}$$

oder den Druck der Atmosphären ausgedrückt:

$$A = 83_{0000}\text{ Atm.}$$
$$B = 53_{0000}\text{ Atm.}$$
$$\varepsilon = 110_{000}\text{ Atm.}$$

Vergleicht man diese Resultate mit den aus der Navier- und Poisson'schen Theorie sich ergebenden, die ich in der Einleitung (s. S. 3) erwähnt habe, so widersprechen sie einander in Folgendem:

Die Krystalle des regulären Systems verhalten sich ihrer Elasticität nach *nicht* wie unkrystallinische Medien, denn Biegungs- und Torsionscoëfficienten sind von der Richtung *nicht* unabhängig, also in der Neumann'schen Gleichung für dieselben ε nicht gleich $\frac{A-B}{2}$. In gleichen ist die zur Uebereinstimmung der Navier- und Poisson'schen Gleichungen mit den Neumann'schen nothwendige Relation $\varepsilon = B$, oder $A = 3B$ nicht erfüllt, die Beobachtung zeigt vielmehr $A = 1{,}54\,B$.

Digitized by Google

II. *Ueber den Satz vom mittleren Ergal und seine Anwendung auf die Molecularbewegungen der Gase; von R. Clausius.*

(Vorgetragen in der Niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde am 9. November 1874.)

§ 1. Nachdem ich in einer i. J. 1870 veröffentlichten Abhandlung [1]) zur Erklärung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie eine Gleichung in Anwendung gebracht hatte, welche sich auf eine in geschlossener Bahn stattfindende Bewegung eines materiellen Punktes bezog, habe ich in einer im vorigen Jahre veröffentlichten Abhandlung [2]) eine allgemeinere Gleichung aufgestellt, welche einen neuen und, wie ich glaube, fruchtbaren Satz in Bezug auf stationäre Bewegungen ausdrückt.

Es sey ein beliebiges System von materiellen Punkten gegeben, welche sich unter dem Einflusse von Kräften, die eine Kräftefunction oder ein Ergal haben, in stationärer Weise bewegen. Zur Bestimmung der Lage, welche die Punkte zur Zeit t einnehmen, können rechtwinklige Coordinaten, oder Polarcoordinaten, oder andere geeignete Gröfsen angewendet werden. Wir wollen ganz allgemein annehmen, es seyen irgend welche Veränderliche, die mit $q_1, q_2, \ldots q_n$ bezeichnet werden mögen, zu diesem Zwecke eingeführt. Dann ist auch das Ergal U als eine Function dieser Veränderlichen zu betrachten. Ferner läfst sich nach Lagrange die lebendige Kraft T des Systemes von Punkten durch eine Function dieser Veränderlichen und ihrer nach der Zeit genommenen Differen-

1) Ueber die Zurückführung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie auf mechanische Principien. Sitzungsberichte der Niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde 1870, S. 167 und diese Ann. Bd. 142, S. 433.

2) Ueber einen neuen mechanischen Satz in Bezug auf stationäre Bewegungen. Sitzungsberichte derselben Gesellschaft 1873, S. 137 u. diese Ann. Bd. 150, S. 106.

Digitized by Google

tialcoëfficienten, welche wir mit $q'_1, q'_2, \ldots q'_n$ bezeichnen wollen, darstellen, welche Function in Bezug auf die eben genannten Differentialcoëfficienten homogen vom zweiten Grade ist, und daher folgender Gleichung genügt:

$$2T = \frac{dT}{dq'_1} q'_1 + \frac{dT}{dq'_2} q'_2 + \ldots + \frac{dT}{dq'_n} q'_n.$$

Setzt man zur Abkürzung, wenn ν irgend einen der Indices von 1 bis n bedeutet:

$$p_\nu = \frac{dT}{dq'_\nu} \tag{1}$$

so lautet die Gleichung:

$$2T = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \ldots + p_n q'_n$$

oder unter Anwendung des Summenzeichens:

$$2T = \Sigma p q'. \tag{2}$$

Es möge nun angenommen werden, dafs an die Stelle der vorher betrachteten stationären Bewegung eine andere stationäre Bewegung trete, welche unendlich wenig von jener abweiche. Die Abweichung kann dadurch veranlafst seyn, dafs die anfänglichen Lagen und Geschwindigkeiten der Punkte nicht ganz dieselben waren, wie bei der ursprünglichen Bewegung, oder auch dadurch, dafs die das Ergal darstellende Function U eine etwas andere Form hat. Um das Letztere in einfacher Weise auszudrücken, wollen wir annehmen, die Function U enthalte aufser dem Veränderlichen $q_1, q_2 \ldots q_n$ noch eine oder mehrere Gröfsen, welche während jeder der beiden Bewegungen constant sind, aber bei der einen Bewegung etwas andere Werthe haben, als bei der anderen. Die ursprünglichen Werthe mögen mit c_1, c_2 etc. und die veränderten Werthe mit $c_1 + \delta c_1$, $c_2 + \delta c_2$ etc. bezeichnet werden.

Denkt man sich nun während jeder der beiden Bewegungen den Mittelwerth des Ergals gebildet, so sind diese beiden Mittelwerthe etwas von einander verschieden, und ihre Differenz nennen wir die Variation des mittleren Ergals. Diese Variation ist es, welche durch meine Glei-

Digitized by Google

chung bestimmt werden soll, indem sie mit anderen Variationen in Beziehung gebracht wird.

Um den Sinn der Gleichung möglichst leicht verständlich zu machen, soll zunächst vorausgesetzt werden, dafs sowohl bei der ursprünglichen, als auch bei der abweichenden Bewegung die Veränderlichen q_1, q_2, ... q_n ihre Veränderungen in periodischer Weise vollziehen. Wir wollen die den einzelnen Veränderlichen als Periodendauer dienenden Zeitintervalle für die ursprüngliche Bewegung mit i_1, i_2, ... i_n und für die abweichende Bewegung mit $i_1 + \delta i_1$, $i_2 + \delta i_2$ .... $i_n + \delta i_n$ bezeichnen. Ferner wollen wir bei jeder im Verlaufe der Bewegung veränderlichen Gröfse den Mittelwerth dadurch von dem veränderlichen Werthe unterscheiden, dafs wir über das Symbol, welches den letzteren darstellt, einen waagrechten Strich machen. Dann lautet meine Gleichung:

$$(1) \qquad \delta(\overline{U} - \overline{T}) = \Sigma \overline{p\,q'}\,\delta \log i + \Sigma \overline{\frac{dU}{dc}}\,\delta c,$$

worin die erste Summe an der rechten Seite sich auf alle n Veränderlichen q und demgemäfs auf alle n Intervalle i, und die zweite Summe auf die oben erwähnten im Ergal vorkommenden constanten Gröfsen c bezieht.

In meiner vorigen Abhandlung habe ich weiter gezeigt, dafs diese Gleichung nicht blofs für solche Fälle gilt, wo die Veränderungen der Gröfsen q_1, q_2 .... q_n in periodischer Weise vor sich gehen, sondern auch auf andere stationäre Bewegungen anwendbar ist, wenn nur die Zeitintervalle i_1, i_2 .... i_n so gewählt werden können, dafs eine gewisse dort näher angegebene Bedingungsgleichung erfüllt ist. Auf diese Bedingungsgleichung will ich aber hier nicht weiter eingehen, weil sie einige Erläuterungen erfordern würde, welche zum Verständnisse des Folgenden nicht nothwendig sind.

§ 2. Man kann der vorigen Gleichung noch andere Formen geben, welche theoretisch interessant und für die Anwendung bequem sind.

Digitized by Google

Aus der Gleichung (2) ergiebt sich:

$$(3) \qquad 2\,\delta\,\overline{T} = \Sigma\,\delta\,\overline{p\,q'}.$$

Wenn man diese Gleichung zu (I) addirt, und die Summe $U + \overline{T}$, welche die *Energie* des Systems bedeutet, mit E bezeichnet, so erhält man:

$$(II) \qquad \delta E = \Sigma\,\frac{1}{i}\,\delta\,\overline{(p\,q'\,i)} + \Sigma\,\frac{\overline{d\,U}}{dc}\,\delta c$$

oder in anderer Form:

$$(II\,a) \qquad \delta E = \Sigma\,\overline{p\,q'}\,\delta \log\,\overline{(pq'\,i)} + \Sigma\,\frac{\overline{d\,U}}{dc}\,\delta c.$$

Dividirt man die Gleichung (3) durch 2, und addirt sie dann zu (I), so kommt:

$$(III) \qquad \delta\,\overline{U} = \frac{1}{2}\,\Sigma\,\frac{1}{i^2}\,\delta\,(\overline{p\,q'\,i^2}) + \Sigma\,\frac{\overline{d\,U}}{dc}\,\delta c$$

oder in anderer Form:

$$(III\,a) \quad \delta\,\overline{U} = \frac{1}{2}\,\Sigma\,\overline{p\,q'}\,\delta\,\log\,(\overline{p\,q'\,i^2}) + \Sigma\,\frac{\overline{d\,U}}{dc}\,\delta c.$$

In der Gleichung (I) ist die Gröfse $\overline{U} - \overline{T}$ als Function der verschiedenen i und der verschiedenen c anzusehen, und die Gleichung kann in so viele Partialgleichungen zerlegt werden, als an der rechten Seite unabhängige Variationen vorkommen. Ebenso ist in den Gleichungen (II) und (II a) die Energie als Function der verschiedenen Gröfsen $\overline{p\,q'}\,i$ und der Constanten c, und endlich in den Gleichungen (III) und (III a) das mittlere Ergal $\overline{U}$ als Function der verschiedenen Gröfsen $\overline{p\,q'}\,i^2$ und der Constanten c anzusehen.

Für die Gröfsen $\overline{p\,q'}\,i$ und $\overline{p\,q'}\,i^2$ wollen ir der Kürze halber einfache Buchstaben einführen, inde.. wir setzen:

$$(4) \qquad e_\nu = \overline{p_\nu\,q'_\nu}\,i_\nu \text{ und } u_\nu = \overline{p_\nu\,q'_\nu}\,i_\nu^2.$$

Dann gehen die Gleichungen (II), (II a), (III), (III a) über in:

Digitized by Google

$$(\text{II}\,b) \qquad \delta E = \Sigma \frac{1}{i} \delta e + \Sigma \overline{\frac{dU}{dc}} \delta c,$$

$$(\text{II}\,c) \qquad \delta E = \Sigma \overline{pq'} \delta \log e + \Sigma \overline{\frac{dU}{dc}} \delta c,$$

$$(\text{III}\,b) \qquad \delta \overline{U} = \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{i^2} \delta u + \Sigma \frac{d\overline{U}}{dc} \delta c,$$

$$(\text{III}\,c) \qquad \delta \overline{U} = \frac{1}{2} \Sigma \overline{pq'} \delta \log u + \Sigma \overline{\frac{dU}{dc}} \delta c.$$

Den Satz, welcher durch alle diese Gleichungen, nur in verschiedenen Formen, ausgedrückt wird, wollen wir, da das Vorkommen der Gröfse $\overline{U}$ in ihnen charakteristisch ist, den *Satz vom mittleren Ergal* nennen.

§ 3. Wie schon gesagt, läfst sich jede der Gleichungen (I), (II) und (III) in so viele Partialgleichungen zerlegen, wie an der rechten Seite unabhängige Variationen vorkommen. Wir können z. B. die Gleichung (III *c*) in folgender Form schreiben:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\overline{U}}{du_1} \delta u_1 + \frac{d\overline{U}}{du_2} \delta u_2 + \ldots + \frac{d\overline{U}}{du_n} \delta u_n \\ &\qquad + \frac{d\overline{U}}{dc_1} \delta c_1 + \frac{d\overline{U}}{dc_2} \delta c_2 + \text{etc.} \\ &= \frac{1}{2} \overline{p_1 q'_1} \frac{\delta u_1}{u_1} + \frac{1}{2} \overline{p_2 q'_2} \frac{\delta u_2}{u_2} + \ldots + \frac{1}{2} \overline{p_n q'_n} \frac{\delta u_n}{u_n} \\ &\qquad + \overline{\frac{dU}{dc_1}} \delta c_1 + \overline{\frac{dU}{dc_2}} \delta c_2 + \text{etc.} \end{aligned} \right.$$

Nehmen wir nun an, die Variationen seyen sämmtlich von einander unabhängig, so können wir die an beiden Seiten stehenden Factoren jeder Variation unter einander gleichsetzen.

Wenden wir dieses zunächst auf die Variationen δu an, so erhalten wir n Gleichungen von der Form:

$$\frac{d\overline{U}}{du_\nu} = \frac{1}{2} \overline{p_\nu q'_\nu} \frac{1}{u_\nu}$$

oder umgeschrieben:

Digitized by Google

$$(6) \qquad \frac{a\overline{U}}{du_\nu} u_\nu = \frac{d\overline{U}}{d\log u_\nu} = \frac{1}{2}\overline{p_\nu q'_\nu}.$$

Der Differentialcoëfficient des mittleren Ergals nach dem Logarithmus eines u ist also gleich dem betreffenden Theile der lebendigen Kraft. Ebenso lassen sich auch die Gleichungen (I) und (II) behandeln, und wir erhalten dadurch mit Einschluſs der vorigen folgende Gleichungen:

$$(6a) \quad \frac{1}{2}\frac{d(\overline{U}-\overline{T})}{di_\nu} i_\nu = \frac{1}{2}\frac{dE}{de_\nu} e_\nu = \frac{d\overline{U}}{du_\nu} u_\nu = \frac{1}{2}\overline{p_\nu q'_\nu}.$$

Ich will hier daran erinnern, daſs ich in einer vor Kurzem veröffentlichten Abhandlung nachstehende Gleichung entwickelt habe[1]):

$$\frac{1}{2} p_\nu q'_\nu = \frac{1}{2}\frac{d(U-T)}{dq_\nu} q_\nu + \frac{1}{2}\frac{d(p_\nu q_\nu)}{dt}.$$

Wenn nun die Veränderlichen $q_1, q_2 \ldots q_n$ von der Art sind, daſs sie sich aus den Lagen der Punkte eindeutig bestimmen lassen, so ist der Mittelwerth des Differentialcoëfficienten $\frac{d(p_\nu q_\nu)}{dt}$ bei einer stationären Bewegung als verschwindend zu betrachten, und die Gleichung geht daher, wenn man die Mittelwerthe nimmt, über in

$$(7) \qquad \frac{1}{2}\overline{p_\nu q'_\nu} = \frac{1}{2}\overline{\frac{d(U-T)}{dq_\nu} q_\nu}.$$

Der hier an der rechten Seite stehende Ausdruck ist das auf die Veränderliche q_ν bezügliche Virial.

In den Gleichungen (6*a*) kommen nun drei andere Ausdrücke vor, welche auch gleich $\frac{1}{2}\overline{p_\nu q'_\nu}$ sind, und daher ebenfalls als Virialausdrücke betrachtet werden können. Dabei ist zu bemerken, daſs diese letzteren insofern für die Anwendung bequemer sind, als sie Pro-

1) Ueber verschiedene Formen des Virials, diese Annalen, Jubelband, S. 411, Gleichung (40).

Digitized by Google

ducte sind, die sich sofort in zwei Factoren zerlegen lassen, während bei dem in (7) stehenden Ausdrucke, welcher der Mittelwerth des Productes zweier veränderlicher Gröfsen ist, eine solche Zerlegung nicht stattfinden kann.

Wenn man in der Gleichung (5) die mit den Variationen δc_1, δc_2 etc. behafteten Glieder betrachtet, so kann man, indem man unter μ einen der Indices 1, 2 etc. versteht, Partialgleichungen von folgender Form ableiten:

$$\frac{d\overline{U}}{dc_\mu} = \overline{\frac{dU}{dc_\mu}}. \tag{8}$$

Hierin macht der äufserlich geringe Unterschied, dafs der waagrechte Strich an der linken Seite nur über dem U und an der rechten Seite über dem ganzen Differentialcoëfficienten steht, der Bedeutung nach einen wesentlichen Unterschied, und der Sinn der Gleichung läfst sich folgendermaafsen aussprechen: *Wenn man das mittlere Ergal als eine Function von u_1, u_2 . . . . u_n, c_1, c_2 etc. betrachtet, und diese nach c_μ differentiirt, so erhält man dieselbe Gröfse, als wenn man das durch eine Function von q_1, q_2 . . . . q_n, c_1, c_2 etc. dargestellte veränderliche Ergal nach c_μ differentiirt und von diesem Differentialcoëfficienten den Mittelwerth nimmt.*

Aus den Gleichungen (I) und (II) erhält man in entsprechender Weise Partialgleichungen von der Form:

$$\frac{dE}{dc_\mu} = \overline{\frac{dU}{dc_\mu}}, \tag{8a}$$

$$\frac{d(\overline{U} - \overline{T})}{dc_\mu} = \overline{\frac{dU}{dc_\mu}}, \tag{8b}$$

worin E als Function von e_1, e_2 . . . . e_n, c_1, c_2 etc. und $\overline{U} - \overline{T}$ als Function von i_1, i_2 . . . . i_n, c_1, c_2 etc. zu betrachten ist.

§ 4. Als Beispiel für die Anwendung des Satzes vom mittleren Ergal habe ich in meiner vorigen Abhandlung

Digitized by Google

die Bewegung zweier materieller Punkte unter dem Einflusse ihrer gegenseitigen Anziehung behandelt. Hier wollen wir zunächst einen andern Fall behandeln, welcher wegen seiner grossen Einfachheit geeignet ist, die Sache anschaulich zu machen.

Es sey ein materieller Punkt mit der Masse m gegeben, dessen Lage durch rechtwinklige Coordinaten bestimmt werde, die wir mit x_1, x_2 und x_3 bezeichnen wollen. Auf diesen Punkt soll eine Kraft wirken, deren nach den Coordinatenrichtungen genommene Componenten X_1, X_2 und X_3 einer ungeraden positiven Potenz der betreffenden Coordinaten proportional sind, so dafs man, wenn n eine positive gerade Zahl ist, setzen kann:

$$(9)\quad X_1 = -n\frac{x_1^{n-1}}{c_1^{n}};\quad X_2 = -n\frac{x_2^{n-1}}{c_2^{n}};\quad X_3 = -n\frac{x_3^{n-1}}{c_3^{n}}$$

worin c_1, c_2, c_3 drei positive Constante darstellen, und dafs man demgemäfs für das Ergal die Gleichung

$$(10)\qquad U = \left(\frac{x_1}{c_1}\right)^n + \left(\frac{x_2}{c_2}\right)^n + \left(\frac{x_3}{c_3}\right)^n$$

bilden kann.

Da in diesem Falle jede Kraftcomponente nur von der dazugehörigen Coordinate und nicht von den beiden andern Coordinaten abhängt, so können wir die Bewegung nach jeder Coordinatenrichtung besonders betrachten.

Der auf eine einzelne Coordinatenrichtung bezügliche Theil der lebendigen Kraft ist $\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ oder anders geschrieben $\frac{m}{2}x'^2$, und den auf dieselbe Coordinatenrichtung bezüglichen Theil des Ergals wollen wir mit H bezeichnen, so dafs wir setzen können:

$$(11)\qquad H = \left(\frac{x}{c}\right)^n.$$

Demgemäfs nimmt die Gleichung (I), wenn sie nur auf die Bewegung nach der einen Coordinatenrichtung bezogen wird, folgende Form an:

Digitized by Google

$$(12) \qquad \delta\left(\overline{H} - \frac{m}{2}\overline{x'^2}\right) = m\overline{x'^2}\,\delta\log i + \frac{\overline{dH}}{dc}\,dc.$$

Ferner ist nach dem Satze vom Virial:

$$\frac{m}{2}\overline{x'^2} = -\frac{1}{2}\overline{Xx} = \frac{n}{2}\overline{\left(\frac{x}{c}\right)^n}.$$

Wenn man diese Gleichung mit 11 verbindet, so erhält man:

$$(13) \qquad \overline{H} = \frac{m}{n}\overline{x'^2}\,^{1}),$$

$$(14) \qquad \frac{\overline{dH}}{dc} = -n\frac{\overline{x^n}}{c^{n+1}} = -m\overline{x'^2}\,\frac{1}{c}.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe geht (12) über in:

$$-\frac{n-2}{2n}\,\delta\left(m\overline{x'^2}\right) = m\overline{x'^2}\,\delta\log i - m\overline{x'^2}\,\delta\log c,$$

welche Gleichung man auch, nachdem man gesetzt hat:

$$\frac{n-2}{2n}\,\delta\left(m\overline{x'^2}\right) = \frac{n-2}{2n}\,m\overline{x'^2}\,\delta\log\left(m\overline{x'^2}\right)$$

$$= m\overline{x'^2}\,\delta\log\left(m\overline{x'^2}\right)^{\frac{n-2}{2n}}$$

in folgende Form bringen kann:

$$(15) \qquad \delta\log\left[\frac{i}{c}\left(m\overline{x'^2}\right)^{\frac{n-2}{2n}}\right] = o,$$

und hieraus folgt:

1) Ich will hier gelegentlich bemerken, dafs die in der Gleichung (13), welche sich auch so schreiben läfst:

$$\frac{n}{2}\overline{H} = \frac{m}{2}\overline{x'^2},$$

ausgedrückte Beziehung zwischen dem mittleren Ergal und der mittleren lebendigen Kraft eine viel allgemeinere Gültigkeit hat. Wenn nämlich für irgend ein System von materiellen Punkten das Ergal, abgesehen von der willkürlichen additiven Constanten, welche man gleich Null setzen kann, sich durch eine homogene Function der Coordinaten der Punkte darstellen läfst, so ist, wenn n den Grad der homogenen Function bedeutet, *das Virial und demgemäfs auch die mittlere lebendige Kraft gleich dem mittleren Ergal multiplicirt mit* $\frac{n}{2}$.

Digitized by Google

$$\frac{i}{c}\left(m\overline{x'^2}\right)^{\frac{n-2}{2n}} = C, \tag{16}$$

worin C eine Constante ist, deren Werth von n abhängt.

Diese Gleichung können wir so schreiben:

$$i = Cc\left(m\overline{x'^2}\right)^{\frac{2-n}{2n}},$$

und aus ihr können wir sofort noch folgende Gleichungen ableiten:

$$e = m\overline{x'^2}\, i = C\,c\left(m\overline{x'^2}\right)^{\frac{n+2}{2n}}$$

$$u = m\overline{x'^2}\, i^2 = C^2 c^2 \left(m\overline{x'^2}\right)^{\frac{2}{n}},$$

woraus sich umgekehrt auch die nachstehenden Gleichungen bilden lassen:

$$m\overline{x'^2} = \left(\frac{Cc}{i}\right)^{\frac{2n}{n-2}} = \left(\frac{e}{Cc}\right)^{\frac{2n}{n+2}} = \left(\frac{u}{C^2 c^2}\right)^{\frac{n}{2}}. \tag{17}$$

Hieraus ergiebt sich unter Berücksichtigung von (13):

$$\begin{cases} H - \frac{m}{2}\overline{x'^2} = \frac{2-n}{2n}\, m\overline{x'^2} = \frac{2-n}{2n}\left(\frac{Cc}{i}\right)^{\frac{2n}{n-2}} \\ \overline{H} + \frac{m}{2}\overline{x'^2} = \frac{n+2}{2n}\, m\overline{x'^2} = \frac{n+2}{2n}\left(\frac{e}{Cc}\right)^{\frac{2n}{n+2}} \\ \overline{H} = \frac{1}{n}\, m\overline{x'^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{u}{C^2 c^2}\right)^{\frac{n}{2}}. \end{cases} \tag{18}$$

Gleichungen dieser Form gelten für alle drei Coordinatenrichtungen, und wenn wir aus je drei zusammengehörigen Gleichungen die Summe bilden, und dabei die ganze lebendige Kraft mit T, das ganze Ergal mit U und die ganze Energie mit E bezeichnen, so erhalten wir:

Digitized by Google

$$(19)\quad \begin{cases} \overline{U}-\overline{T}=\frac{2-n}{2n}\,C^{\frac{2n}{n-2}}\left[\left(\frac{c_1}{i_1}\right)^{\frac{2n}{n-2}}+\left(\frac{c_2}{i_2}\right)^{\frac{2n}{n-2}}+\left(\frac{c_3}{i_3}\right)^{\frac{2n}{n-2}}\right] \\ E=\frac{n+2}{2n}C^{-\frac{2n}{n+2}}\left[\left(\frac{e_1}{c_1}\right)^{\frac{2n}{n+2}}+\left(\frac{e_2}{c_2}\right)^{\frac{2n}{n+2}}+\left(\frac{e_3}{c_3}\right)^{\frac{2n}{n+2}}\right] \\ \overline{U}=\frac{1}{n}C^{-n}\left[\left(\frac{u_1}{c_1{}^2}\right)^{\frac{n}{2}}+\left(\frac{u_2}{c_2{}^2}\right)^{\frac{n}{2}}+\left(\frac{u_3}{c_3{}^2}\right)^{\frac{n}{2}}\right]. \end{cases}$$

§ 5. Als ferneres Beispiel wollen wir einen Fall behandeln, welchen wir weiterhin bei der die Molecularbewegung gasförmiger Körper betreffenden Untersuchung benutzen können.

Es möge nämlich angenommen werden, ein materieller Punkt bewege sich in einem rechtwinklig parallelepipedischen Gefäfse, von dessen Wänden er abgestofsen werde. Die Kraft, welche eine der Wände auf den Punkt ausübt, soll nur von seiner Entfernung von dieser Wand abhängen, und zwar soll sie einer negativen Potenz der Entfernung proportional seyn. Ferner möge vorausgesetzt werden, dafs die Kraft mit zunehmender Entfernung so schnell abnehme, dafs sie nur in der Nähe der Wand merklich sey, dagegen in gröfseren Entfernungen und insbesondere in der Mitte des parallelepipedischen Raumes vernachlässigt werden könne.

Zur Bestimmung der Lage des Punktes seyen rechtwinklige Coordinaten x_1, x_2, x_3 eingeführt, deren Anfangspunkt mit dem Mittelpunkte des Parallelepipedons zusammenfalle, und deren Richtungen den Kanten desselben parallel seyen.

Wenn wir nun eine beliebige der Coordinaten betrachten, welche mit x ohne Index bezeichnet werden möge, und wenn wir den Abstand der beiden auf dieser Coordinatenrichtung senkrechten Wände vom Mittelpunkte mit c bezeichnen, so sind die Entfernungen des beweglichen Punktes von diesen beiden Wänden $c-x$ und $c+x$. Die Kräfte, welche die beiden Wände auf den

Digitized by Google

Punkt ausüben, und von denen die erste nach der negativen und die zweite nach der positiven x-Richtung wirkt, wollen wir durch

$$-m\frac{n\alpha^n}{(c-x)^{n+1}} \quad \text{und} \quad m\frac{n\alpha^n}{(c+x)^{n+1}}$$

darstellen, worin m die Masse des materiellen Punktes, n eine positive Zahl und α eine gegen c sehr kleine Constante bedeutet. Wir erhalten somit für die ganze nach der x-Richtung auf den Punkt wirkende Kraftcomponente X die Gleichung:

$$X = m\left[-\frac{n\alpha^n}{(c-x)^{n+1}} + \frac{n\alpha^n}{(c+x)^{n+1}}\right]. \tag{20}$$

Daraus ergiebt sich für den auf die x-Richtung bezüglichen Theil des Ergals der Ausdruck:

$$m\left[\frac{\alpha^n}{(c-x)^n} + \frac{\alpha^n}{(c+x)^n}\right].$$

Da nach (20) die auf eine Coordinatenrichtung bezügliche Kraftcomponente nur von der betreffenden Coordinate und nicht von den beiden anderen abhängt, so können wir wieder, wie im vorigen Falle, die Bewegung nach jeder Coordinatenrichtung besonders betrachten. Eine fernere Vereinfachung entsteht daraus, dafs wir wegen der Kleinheit des Faktors α^n bei jeder Lage des Punktes nur Eines der beiden an der rechten Seite der Gleichung (20) in der eckigen Klammer stehenden Glieder zu berücksichtigen brauchen, nämlich dasjenige, dessen Nenner kleiner als c^{n+1} ist. Wenn wir uns daher vorläufig darauf beschränken wollen, die Bewegung während eines Zeitraumes zu betrachten, während dessen x nur positive Werthe hat, so können wir für diesen Theil der Bewegung folgende Gleichung anwenden:

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\frac{n\alpha^n}{(c-x)^{n+1}}$$

Digitized by Google

Hieraus ergiebt sich:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = k - \frac{\alpha^n}{(c-x)^n} \tag{21}$$

worin k eine Constante ist, deren Bedeutung daraus ersichtlich ist, dafs mk den auf die x-Richtung bezüglichen Theil der Energie darstellt. Diese Gleichung können wir in folgende Form bringen:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{k - \frac{\alpha^n}{(c-x)^n}}}. \tag{22}$$

Um hieraus weiter die Zeit zu bestimmen, welche der Punkt gebraucht, um von einer Stelle, wo $x = o$ ist, bis zu derjenigen in der Nähe der positiven Gränzebene gelegenen Stelle zu gelangen, wo $\frac{dx}{dt} = o$ ist, und wo er also in seiner Bewegung umkehrt, haben wir diesen Ausdruck des Zeitdifferentiales von $x = o$ bis $x = a$ zu integriren, wenn a denjenigen Werth von x bedeutet, für welchen die Gleichung

$$k - \frac{\alpha^n}{(c-a)^n} = o \tag{23}$$

gilt.

Zur Ausführung der Integration entwickeln wir den Ausdruck an der rechten Seite der Gleichung (22) in eine Reihe, nämlich:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2k}}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{\alpha^n}{k(c-x)^n} + \frac{1.3}{2.4}\frac{\alpha^{2n}}{k^2(c-x)^{2n}} + \ldots\right]$$

Indem wir diesen Ausdruck von $x = o$ bie $x = a$ integriren, und die dadurch erhaltene Zeit, weil sie ein Viertel von derjenigen Zeit ist, welche der Punkt zu einem Hin- und Hergange zwischen den beiden Wänden gebraucht, mit $\frac{1}{4}i$ bezeichnen, so erhalten wir:

Digitized by Google

$$\frac{1}{4}\,i = \frac{1}{\sqrt{2k}}\Big\{a + \frac{1}{2}\,\frac{a^n}{(n-1)\,k(c-a)^{n-1}} - \frac{1}{2}\,\frac{a^n}{(n-1)\,k\,c^{n-1}}$$

$$+ \frac{1.3}{2.4}\,\frac{a^{2n}}{(2n-1)\,k^2\,(c-a)^{2n-1}}$$

$$- \frac{1.3}{2.4}\,\frac{a^{2n}}{(2n-1)\,k^2\,c^{2n-1}} + \cdots\Big\}.$$

Wenn wir hierin die mit dem Minuszeichen behafteten Glieder wegen der Kleinheit des Bruches $\frac{a}{c}$ vernachlässigen, und in den andern Gliedern, gemäfs (23), setzen:

$$c - a = \alpha\,k^{-\frac{1}{n}} \quad \text{und} \quad a = c - \alpha\,k^{-\frac{1}{n}}$$

so kommt:

$$(24) \qquad \frac{1}{4}\,i = \frac{1}{\sqrt{2k}}\Big\{c - \alpha\,k^{-\frac{1}{n}}\Big[1 - \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1.3}{2.4(2n-1)} - \cdots\Big]\Big\}.$$

Multiplicirt man die Gleichungen (21) und (22) unter einander, so erhält man:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt = \frac{dx}{\sqrt{2}}\sqrt{k - \frac{a^n}{(c-x)^n}}.$$

Wenn man diese Gleichung ebenso behandelt, wie (22), und dabei berücksichtigt, dafs man setzen kann:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{4}i}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt = \frac{1}{2}\,\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\,.\,\frac{1}{4}\,i,$$

und dann noch zur Abkürzung den Buchstaben w einführt mit der Bedeutung

$$(25) \qquad w = \frac{1}{2}\,\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2},$$

Digitized by Google

so gelangt man zu folgender Gleichung:

$$(26)\quad \frac{1}{4} w i = \sqrt{\frac{k}{2}} \left\{ c - a k^{-\frac{1}{n}} \left[1 + \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1.1}{2.4(2n-1)} + \frac{1.1.3}{2.4.6(3n-1)} + \ldots \right] \right\}.$$

Da endlich, wenn man den Mittelwerth des auf die x-Richtung bezüglichen Theiles des Ergales mit mh bezeichnet, zu setzen ist:

$$h = k - w,$$

so erhält man aus (24) und (26):

$$(27)\quad \frac{1}{4} h i = \frac{1}{\sqrt{2}}\, \alpha\, k^{\frac{n-2}{2n}} \left[\frac{1}{n-1} + \frac{1}{2(2n-1)} + \frac{1.3}{2.4(3n-1)} + \ldots \right].$$

Zur Vereinfachung der Gleichungen (24), (26) und (27) wollen wir für die in (26) vorkommende Reihe einen einfachen Buchstaben einführen, indem wir setzen:

$$(28)\quad R = 1 + \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1.1}{2.4(2n-1)} + \frac{1.1.3}{2.4.6(3n-1)} + \ldots.$$

Wenn wir diese Gleichung mit $\frac{n-2}{n}$ multipliciren und dann folgende in Reihenform entwickelte Gröfse:

$$\frac{2}{n}\sqrt{1-1} = \frac{2}{n}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1.1}{2.4} - \frac{1.1.3}{2.4.6} - \ldots.\right),$$

welche gleich Null ist, hinzuaddiren, so erhalten wir:

$$\frac{n-2}{n} R = 1 - \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1.3}{2.4(2n-1)} - \frac{1.3.5}{2.4.6(3n-1)} - \ldots.,$$

welches die in (24) vorkommende Reihe ist. Daraus ergiebt sich dann zugleich, dafs die in (27) vorkommende Reihe, welche die Differenz der beiden anderen ist, sich durch

$$R - \frac{n-2}{n} R = \frac{2}{n} R$$

darstellen läfst.

Digitized by Google

Indem wir diese Ausdrücke für die betreffenden Reihen einsetzen, wollen wir für das dann in allen drei Gleichungen vorkommende Produkt αR ein einfaches Zeichen einführen, indem wir setzen:

$$\beta = \alpha R. \tag{29}$$

Die dadurch entstehenden Gleichungen, nachdem sie noch mit 4 multiplicirt sind, lauten:

$$\begin{cases} i = 2\sqrt{\frac{2}{k}}\left(c - \frac{n-2}{n}\beta k^{-\frac{1}{n}}\right) \\ w\,i = 2\sqrt{2k}\left(c - \beta\, k^{-\frac{1}{n}}\right) \\ h\,i = \frac{4}{n}\sqrt{2}\;\beta\, k^{\frac{n-2}{2n}} \end{cases} \tag{30}$$

§ 6. Diese Gleichungen wollen wir nun anwenden, um die Gröfse $h - w$ als Funktion von i, die Gröfse k als Funktion von e und die Gröfse h als Funktion von u darzustellen.

Zu dem Zwecke multipliciren wir zunächst die erste der Gleichungen (30) mit $\frac{1}{2\sqrt{2}}\, c^{-\frac{n+2}{2}}$ und bezeichnen das dann an der linken Seite stehende Produkt der Kürze wegen durch einen einfachen Buchstaben, indem wir setzen:

$$\xi = \frac{i}{2\sqrt{2}}\, c^{-\frac{n+2}{2}} \tag{31}$$

Dann läfst sich die Gleichung in folgender Form schreiben:

$$\xi = (k\,c^n)^{-\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{n-2}{n}\,\beta\,(k\,c^n)^{-\frac{1}{n}}\right]. \tag{32}$$

In dieser Gleichung ist die Gröfse ξ als Funktion der Gröfse kc^n dargestellt, und dabei ist zu bemerken, dafs das zweite Glied innerhalb der eckigen Klammer wegen des Faktors β sehr klein gegen 1 ist. Dieser Umstand macht es leicht, umgekehrt die Gröfse kc^n oder auch die

Digitized by Google

Quadratwurzel derselben als Funktion von ξ darzustellen, indem man eine nach steigenden Potenzen von β geordnete Reihe bildet, in welcher nur wenige Glieder berücksichtigt zu werden brauchen. Dadurch entsteht folgende Gleichung:

$$k^{\frac{1}{2}} c^{\frac{n}{2}} = \xi^{-1}\left[1 - \frac{n-2}{n}\beta\xi^{\frac{2}{n}} - \frac{2(n-2)^2}{n^3}\beta^2\xi^{\frac{4}{n}} + \ldots\right].$$

Wenn man den hieraus für $k^{\frac{1}{2}}$ entstehenden Ausdruck und den nach (31) für i geltenden Ausdruck:

$$2\sqrt{2}\, c^{\frac{n+2}{2}}\xi$$

in die beiden letzten der Gleichungen (30) einsetzt, so erhält man aus ihnen folgende Gleichungen:

$$(33)\quad w = c^{-n}\xi^{-2}\left[1 - 2\frac{n-1}{n}\beta\xi^{\frac{2}{n}} + \left(\frac{n-2}{n}\right)^2\beta^2\xi^{\frac{4}{n}} + \ldots\right]$$

$$(34)\quad h = c^{-n}\xi^{-2}\left[\frac{2}{n}\beta\xi^{\frac{2}{n}} - \frac{2}{n}\left(\frac{n-2}{n}\right)^2\beta^2\xi^{\frac{4}{n}} + \ldots\right],$$

und durch Subtraction der ersten dieser beiden Gleichungen von der letzten erhält man ferner:

$$(35)\quad h - w = c^{-n}\xi^{-2}\left[-1 + 2\beta\xi^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{n-2}{n}\right)^2\beta^2\xi^{\frac{4}{n}} + \ldots\right]$$

Wenn man hierin endlich für ξ wieder seinen in (31) angegebenen Werth einsetzt, so erhält man die Gröfse $k - w$ als Funktion von i dargestellt. Wir wollen aber diese Einsetzung hier nicht wirklich ausführen, sondern, um kurze Formeln zu behalten, das Resultat folgendermaafsen aussprechen: ***Wenn φ eine Funktion bedeutet, deren Form durch die Gleichung***

$$(36)\quad \varphi(\xi) = \xi^{-2}\left[-1 + 2\beta\xi^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{n-2}{n}\right)^2\beta^2\xi^{\frac{4}{n}} + \ldots\right]$$

bestimmt wird, so ist:

Digitized by Google

$$(37) \qquad h - w = c^{-n}\,\varphi\left(\frac{i}{2\sqrt{2}}\,c^{-\frac{n+2}{2}}\right).$$

Zugleich ergiebt sich aus (33), dafs man setzen kann:

$$(38) \quad w = \frac{1}{2}\,c^{-n}\,\xi\,\frac{d\varphi(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{2}\,c^{-n}\,i\,\frac{d\varphi\left(\frac{i}{2\sqrt{2}}\,c^{-\frac{n+2}{2}}\right)}{di}$$

und somit auch:

$$w = \frac{1}{2}\,i\,\frac{d(h-w)}{di}$$

Noch leichter ist es, die Gröfse k als Funktion von c darzustellen. Da nämlich die Bedeutung von e durch die Gleichung

$$e = m\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\,i = 2\,m\,w\,i$$

bestimmt ist, so braucht man nur die zweite der Gleichungen (30) mit $2\,m$ zu multipliciren, um zu erhalten:

$$e = 4\,m\sqrt{2\,k}\left(c - \beta\,k^{-\frac{1}{n}}\right).$$

Wenn man diese Gleichung mit $\frac{1}{m\,4\sqrt{2}}\,c^{\frac{n-2}{2}}$ multiplicirt, und das dann an der linken Seite stehende Produkt durch einen einfachen Buchstaben bezeichnet, indem man setzt:

$$(39) \qquad \eta = \frac{e}{m\,4\sqrt{2}}\,c^{\frac{n-2}{2}}$$

so kann man ihr die Form

$$(40) \qquad \eta = (k\,c^n)^{\frac{1}{2}}\left[1 - \beta\,(k\,c^n)^{-\frac{1}{n}}\right]$$

geben. Hierin ist η als Funktion von $k\,c^n$ dargestellt, und man kann mit dieser Gleichung ähnlich verfahren, wie mit (32), um $k\,c^n$ als Funktion η darzustellen, wodurch man erhält:

Digitized by Google

$$(41)\quad k\,c^n = \eta^2\left(1 + 2\beta\eta^{-\frac{2}{n}} + \frac{3n-4}{n}\beta^2\eta^{-\frac{4}{n}} + \ldots\right)$$

Wir können daher das gesuchte Resultat so ausdrücken: ***Wenn ψ eine Funktion bedeutet, deren Form durch die Gleichung***

$$(42)\quad \psi(\eta) = \eta^2\left(1 + 2\beta\eta^{-\frac{2}{n}} + \frac{3n-4}{n}\beta^2\eta^{-\frac{4}{n}} + \ldots\right)$$

bestimmt wird, so ist:

$$(43)\qquad k = c^{-n}\,\psi\left(\frac{e}{m\,4\sqrt{2}}\,c^{\frac{n-2}{2}}\right).$$

Ferner läfst sich unter Anwendung des gefundenen Werthes von k aus den Gleichungen (30) folgender Werth von w ableiten:

$$(44)\qquad w = \frac{1}{2}\,c^{-n}\,e\,\frac{d\psi\left(\frac{e}{m\,4\sqrt{2}}\,c^{\frac{n-2}{2}}\right)}{de}.$$

Um endlich h als Funktion von u darzustellen, multipliciren wir die beiden ersten der Gleichungen (30) unter einander, wodurch entsteht:

$$w\,i^2 = 8\left(c^2 - 2\,\frac{n-1}{n}\,\beta\,c\,k^{-\frac{1}{n}} + \frac{n-2}{n}\beta^2\,k^{-\frac{2}{n}}\right).$$

Indem wir hierin gemäfs der Bedeutung von u setzen:

$$w\,i^2 = \frac{u}{2\,m},$$

und dann die Gleichung durch $8\,c^2$ dividiren, erhalten wir:

$$\frac{u}{16\,m\,c^2} = 1 - 2\,\frac{n-1}{n}\,\beta(k\,c^n)^{-\frac{1}{n}} + \frac{n-2}{n}\,\beta^2\,(k\,c^n)^{-\frac{2}{n}},$$

welche Gleichung wir auch in folgender Form schreiben können:

$$1 - \frac{1}{4c}\sqrt{\frac{u}{m}} = 1 - \sqrt{1 - 2\,\frac{n-1}{n}\,\beta\,(k\,c^n)^{-\frac{1}{n}} + \frac{n-2}{n}\,\beta^2\,(k\,c^n)^{-\frac{2}{n}}}.$$

Digitized by Google

Für den hier an der linken Seite stehenden Ausdruck wollen wir ein einfaches Zeichen einführen, indem wir setzen:

$$\zeta = 1 - \frac{1}{4c}\sqrt{\frac{u}{m}} \tag{45}$$

so dafs die vorige Gleichung übergeht in:

$$\zeta = 1 - \sqrt{1 - 2\,\frac{n-1}{n}\,\beta\,(k\,c^n)^{-\frac{1}{n}} + \frac{n-2}{n}\,\beta^2\,(k\,c^n)^{-\frac{2}{n}}}. \tag{46}$$

Diese Gleichung, in welcher ζ als Funktion von $k\,c^n$ dargestellt ist, benutzen wir wieder, um umgekehrt $k\,c^n$ als Funktion von ζ darzustellen, wobei zu bemerken ist, dafs ζ wie man leicht aus der vorigen Gleichung ersieht, eine kleine Gröfse von der Ordnung β ist, und dafs daher auch bei einer Reihenentwickelung nach steigenden Potenzen von ζ nur die ersten Glieder berücksichtigt zu werden brauchen. Wir erhalten:

$$k\,c^n = \left(\frac{n-1}{n}\,\frac{\beta}{\zeta}\right)^n \left[1 + \frac{n}{2(n-1)^2}\,\zeta + \ldots\right]. \tag{47}$$

Nachdem dieses erreicht ist, dividiren wir die letzte der Gleichungen (30) durch die erste, wodurch entsteht:

$$h = \frac{2}{n}\,\frac{\beta}{c}\,k^{\frac{n-1}{n}}\left(1 + \frac{n-2}{n}\,\frac{\beta}{c}\,k^{-\frac{1}{n}} + \ldots\right)$$

oder anders geschrieben:

$$h\,c^n = \frac{2}{n}\,\beta\,(k\,c^n)^{\frac{n-1}{n}}\left[1 + \frac{n-2}{n}\,\beta\,(k\,c^n)^{-\frac{1}{n}} + \ldots\right].$$

Indem wir hierin für $k\,c^n$ den in (47) gegebenen Ausdruck einsetzen, erhalten wir:

$$h\,c^n = 2\left(\frac{\beta}{n}\right)^n\left(\frac{n-1}{\zeta}\right)^{n-1}\left[1 + \frac{2n-3}{2(n-1)}\,\zeta + \ldots\right]. \tag{48}$$

Wir können daher das gesuchte Resultat folgendermafsen aussprechen: ***Wenn χ eine Funktion ist, deren Form durch die Gleichung***

Digitized by Google

$$(49)\quad \chi(\zeta) = 2\left(\frac{\beta}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{\zeta}\right)^{n-1}\left[1 + \frac{2n-3}{2(n-1)}\zeta + \dots\right]$$

bestimmt wird, so ist:

$$(50)\qquad h = c^{-n}\,\chi\left(1 - \frac{1}{4c}\sqrt{\frac{u}{m}}\right).$$

Zugleich erhält man unter Anwendung von (47) aus den Gleichungen (30):

$$(51)\qquad w = c^{-n}\,u\,\frac{d\,\chi\left(1 - \frac{1}{4c}\sqrt{\frac{u}{m}}\right)}{du}.$$

Die bisher abgeleiteten Ausdrücke von $h - w$, k und h beziehen sich auf eine einzelne Coordinatenrichtung. Natürlich gelten aber für alle drei Coordinatenrichtungen Gleichungen von ganz übereinstimmender Form, welche man erhält, wenn man in den Gleichungen (37), (43) und (50) die Buchstaben h, w, k, i, e, u und c sämmtlich zuerst mit dem Index 1, darauf mit dem Index 2 und endlich mit dem Index 3 versieht. Wenn man ferner bedenkt, dafs zu setzen ist:

$$\overline{U} = m(h_1 + h_2 + h_3)$$
$$\overline{T} = m(w_1 + w_2 + w_3)$$
$$E = m(k_1 + k_2 + k_3),$$

so erhält man:

$$\overline{U} - \overline{T} = m\left[c_1^{-n}\,\varphi\left(\frac{i_1}{2\sqrt{2}}c_1^{-\frac{n+2}{2}}\right) + c_2^{-n}\,\varphi\left(\frac{i_2}{2\sqrt{2}}c_2^{-\frac{n+2}{2}}\right) + c_3^{-n}\,\varphi\left(\frac{i_3}{2\sqrt{2}}c_3^{-\frac{n+2}{2}}\right)\right]$$

und entsprechende Gleichungen für E und $\overline{U}$. Faſst man zur Abkürzung die drei in jeder Gleichung an der rechten Seite vorkommenden Glieder durch ein Summenzeichen zusammen, so lauten die Gleichungen:

Digitized by Google

$$(52)\quad \begin{cases} \overline{U} - \overline{T} = m \Sigma c^{-n} \varphi\left(\frac{i}{2\sqrt{2}} c^{-\frac{n+2}{2}}\right) \\ E = m \Sigma c^{-n} \psi\left(\frac{e}{m4\sqrt{2}} c^{\frac{n-2}{2}}\right) \\ \overline{U} = m \Sigma c^{-n} \chi\left(1 - \frac{1}{4c} \sqrt{\frac{u}{m}}\right) \end{cases}$$

worin φ, ψ, χ die oben durch die Gleichungen (36), (42) und (49) bestimmten Funktionen sind.

§ 7. In den Gleichungen des vorigen § sind zur Bestimmung von $\overline{U} - \overline{T}$ die Gröfsen i_1, i_2, i_3, zur Bestimmung von E die Gröfsen e_1, e_2, e_3 und zur Bestimmung von $\overline{U}$ die Gröfsen u_1, u_2, u_3 angewandt. Es ist aber für manche Untersuchungen vortheilhaft, die Bestimmung von $\overline{U} - T$, E und $\overline{U}$ durch ein und dasselbe System von Gröfsen auszuführen, wozu besonders die Gröfsen w_1, w_2, w_3 geeignet sind, neben denen dann natürlich, wie in allen früheren Ausdrücken, auch die Constanten c_1, c_2, c_3 vorkommen.

Wenn man die zweite der Gleichungen (30) durch die erste dividirt, so kommt:

$$w = k - \frac{c - \beta k^{-\frac{1}{n}}}{c - \frac{n-2}{n} \beta k^{-\frac{1}{n}}}.$$

Aus dieser Gleichung kann man leicht eine andere ableiten, in welcher k als Funktion von w dargestellt wird, und wenn man zugleich bedenkt, dafs $h = k - w$, so erhält man:

$$(53)\quad \begin{cases} k = w + \frac{2}{n} \frac{\beta}{c} w^{\frac{n-1}{n}} + 2 \frac{n^2-2}{n^2} \frac{\beta^2}{c^2} w^{\frac{n-2}{n}} + \ldots. \\ h = \frac{2}{n} \frac{\beta}{c} w^{\frac{n-1}{n}} + 2 \frac{n^2-2}{n^2} \frac{\beta^2}{c^2} w^{\frac{n-2}{n}} + \ldots. \\ h - w = -w + \frac{2}{n} \frac{\beta}{c} w^{\frac{n-1}{n}} + 2 \frac{n^2-2}{n^2} \frac{\beta^2}{c^2} w^{\frac{n-2}{n}} + \ldots. \end{cases}$$

Digitized by Google

In ähnlicher Weise wollen wir auch die drei zu k, h und $h - w$ gehörigen Grösen e, u und i oder, noch besser, ihre Logarithmen als Funktionen von w ausdrücken. Um zunächst i zu bestimmen, wenden wir die erste der Gleichungen (30) an, und setzen darin für k den in der ersten der Gleichungen (53) gegebenen Ausdruck, wodurch wir erhalten:

$$i = 2\sqrt{2}\,c\,w^{-\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{n-1}{n}\frac{\beta}{c}w^{-\frac{1}{n}} + \frac{3n-4}{2n^3}\frac{\beta^2}{c^2}w^{-\frac{2}{n}} + \ldots\right]$$

Wenn man hieraus die Gleichung für $\log i$ ableitet und ferner berücksichtigt, dafs zu setzen ist:

$$e = 2mwi \text{ und } u = 2mwi^2$$

und demgemäfs:

$$\log e = \log i + \log 2mw \text{ und } \log u = 2\log i + \log 2mw$$

so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
\log i &= \log\left(2\sqrt{2}\,c\,w^{-\frac{1}{2}}\right) - \frac{n-1}{n}\frac{\beta}{c}w^{-\frac{1}{n}} \\
&\quad - \frac{(n^2-2)(n-2)}{2n^3}\frac{\beta^2}{c^2}w^{-\frac{2}{n}} + \ldots \\
\log e &= \log\left(4\sqrt{2}\,m\,c\,w^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{n-1}{n}\frac{\beta}{c}w^{-\frac{1}{n}} \\
&\quad - \frac{(n^2-2)(n-2)}{2n^3}\frac{\beta^2}{c^2}w^{-\frac{2}{n}} + \ldots \\
\log u &= \log(16\,m\,c^2) - 2\,\frac{n-1}{n}\frac{\beta}{c}w^{-\frac{1}{n}} \\
&\quad - \frac{(n^2-2)(n-2)}{n^3}\frac{\beta^2}{c^2}w^{-\frac{2}{n}} + \ldots
\end{aligned}\right\} \quad (54)$$

§ 8. Um nun von den Grösen k, h und $h - w$, von denen wir zunächst h zur Betrachtung auswählen wollen, diejenigen Differentialcoëfficienten zu bilden, um welche es sich in dem Satze vom mittleren Ergal handelt, müssen wir untersuchen, in welcher Beziehung die beiden

Digitized by Google

partiellen Differentialcoëfficienten, welche man erhält, wenn h als Funktion von u und c dargestellt ist, zu denjenigen stehen, welche man erhält, wenn h als Funktion von w und c dargestellt ist. Dazu mögen aber erst einige Bemerkungen über die Bezeichnung vorausgeschickt werden.

In solchen Fällen, wie dieser, wo eine Gröfse als Funktion zweier Veränderlichen dargestellt wird, wo aber die Natur des Gegenstandes es mit sich bringt, dafs man nicht immer dieselben beiden Veränderlichen anwendet, sondern die Veränderlichen zuweilen wechselt, und wo daher partielle Differentialcoëfficienten vorkommen, welche sich nur dadurch von einander unterscheiden, dafs die Gröfse, welche bei der Differentiation als constant vorausgesetzt wurde, in ihnen verschieden ist, ist es bequem, diesen Unterschied in der Formel anzudeuten, damit man ihn nicht immer in Worten anzugeben braucht. Ich habe daher schon in einer früheren Abhandlung [1]) eine Bezeichnungsweise angewandt, welche auch von verschiedenen anderen Autoren bei Behandlung des gleichen Gegenstandes adoptirt ist, nämlich die, dafs ich die Gröfse, welche bei der Differentiation als constant betrachtet ist, als Index hinzufügte. Die äufsere Form aber, in welcher ich dieses that, läfst sich noch vereinfachen, wenn man den Index nicht neben den ganzen Differentialcoëfficienten setzt, (wobei der Letztere in Klammern geschlossen werden mufs, und wobei auch, wenn man den Index nicht noch mit einem Unterscheidungsmerkmal versieht, Verwechselungen mit anderen an dieser Stelle möglicher Weise vorkommenden Indices stattfinden können), sondern ihn vielmehr neben das d im Zähler des Differentialcoëfficienten setzt. In dieser Form wollen wir meine frühere Bezeichnungsweise hier anwenden.

Wenn also z. B. die Gröfse h das eine Mal als Funktion von u und c angesehen und so nach c differentiirt wird (wobei u als constant gilt), und das andere Mal als Funktion von w und c angesehen und so nach c differen-

1) Diese Ann. Bd. 125, S. 368 und Abhandlungensammlung Bd. II, S. 14.

Digitized by Google

tiirt wird (wobei w als constant gilt), so schreiben wir diese beiden Differentialcoëfficienten:

$$\frac{d_w h}{dc} \text{ und } \frac{d_w h}{dc}.$$

Diese Schreibweise stimmt mit derjenigen überein, welche ich in der Abhandlung „über einen neuen mechanischen Satz in Bezug auf stationäre Bewegungen“ [1]) zur Specialisirung von Variationen angewandt habe, indem ich die *maafsgebende* Gröfse, welche bei der Variation als constant betrachtet ist, als Index neben das δ gesetzt habe [2]).

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir die Differentialcoëfficienten bilden, welche verglichen werden sollen. Wir betrachten dazu zunächst h als Funktion von u und c und bilden die Differentialgleichung:

$$dh = \frac{d_c h}{du} du + \frac{d_u h}{dc} dc.$$

Hierin denken wir uns nun u als Funktion von w und c dargestellt. Dann können wir die Gleichung so schreiben:

$$dh = \frac{d_c h}{du}\left(\frac{d_c u}{dw} dw + \frac{d_w u}{dc} dc\right) + \frac{d_w h}{dc} dc$$

$$= \frac{d_c h}{du}\frac{d_c u}{dw} dw + \left(\frac{d_c h}{du}\frac{d_w u}{dc} + \frac{d_w h}{dc}\right) dc.$$

Wenn wir andererseits h als Funktion von w und c betrachten, so können wir schreiben:

1) Sitzungsberichte der Niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde 1873 und diese Ann. Bd. 150, S. 106.

2) Als mein Aufsatz schon druckfertig war, erhielt ich das eben erschienene erste Heft der „Fortschritte der Physik“ für 1870, und ersah daraus, dafs auch Boltzmann die Form des mit dem Index versehenen Differentialcoëfficienten vereinfacht hat, indem er in seinen Berichten (S. 441) eine Differentiation nach x, wobei y als constant betrachtet wird, durch $\frac{d}{dx_y}$ bezeichnet. Obwohl auch diese Schreibweise bequem ist, so glaube ich doch die von mir gewählte beibehalten zu dürfen, weil der Index nicht die im Nenner stehende Veränderliche, sondern die Art der Differentiation specialisiren soll, und daher meines Erachtens besser neben dem die Differentiation andeutenden d des Zählers steht.

Digitized by Google

$$dh = \frac{d_c h}{dw}\, dw + \frac{d_w h}{dc}\, dc.$$

Da nun in dieser und der vorhergehenden Gleichung die Coëfficienten von dw unter sich und ebenso die Coëfficienten von dc unter sich gleich seyn müssen, so erhalten wir:

$$\frac{d_c h}{du}\,\frac{d_c u}{dw} = \frac{d_c h}{dw}$$

$$\frac{d_c h}{du}\,\frac{d_w u}{dc} + \frac{d_w h}{dc} = \frac{d_w h}{dc},$$

oder umgeschrieben:

$$(55)\qquad \begin{cases} \dfrac{d_c h}{du} = \dfrac{\dfrac{d_c h}{dw}}{\dfrac{d_c u}{dw}} \\[2ex] \dfrac{d_w h}{dc} = \dfrac{d_w h}{dc} - \dfrac{d_c h}{du}\,\dfrac{d_w u}{dc} \end{cases}$$

Diesen Gleichungen wollen wir eine etwas andere Gestalt geben, welche für unsere Anwendungen geeigneter ist, indem wir setzen:

$$\frac{d_c h}{du} = \frac{1}{u}\,\frac{d_c h}{\frac{1}{u}\,du} = \frac{1}{u}\,\frac{d_c h}{d\log u}$$

$$\frac{d_c u}{dw} = u\,\frac{d_c \log u}{dw} \text{ und } \frac{d_w u}{dc} = u\,\frac{d_w \log u}{dc}$$

wodurch die Gleichungen übergehen in:

$$(56)\qquad \begin{cases} \dfrac{d_c h}{d\log u} = \dfrac{\dfrac{d_c h}{dw}}{\dfrac{d_c \log u}{dw}} \\[2ex] \dfrac{d_w h}{dc} = \dfrac{d_w h}{dc} - \dfrac{d_c h}{d\log u}\,\dfrac{d_w \log u}{dc}. \end{cases}$$

Wenn man in der ersten der beiden vorigen Gleichungen für h und $\log u$ die in (53) und (54) gegebenen Ausdrücke anwendet, so erhält man, wie es nach dem Satze vom mittleren Ergal auch seyn mufs:

Digitized by Google

$$\frac{d_e h}{d \log u} = w \tag{57}$$

und demgemäfs läfst sich die zweite der beiden vorigen Gleichungen in folgender vereinfachter Form schreiben:

$$\frac{d_w h}{dc} = \frac{d_w h}{dc} - w \frac{d_w \log u}{dc} . \tag{58}$$

In ganz entsprechender Weise erhält man:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d_e k}{d \log e} = 2w \\ \frac{d_e k}{dc} = \frac{d_w k}{dc} - 2w \frac{d_w \log e}{dc} \end{array} \right. \tag{59}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d_e (h-w)}{d \log i} = 2w \\ \frac{d_i (h-w)}{dc} = \frac{d_w (h-w)}{dc} - 2w \frac{d_w \log i}{dc} \end{array} \right. \tag{60}$$

Die unter (53) gegebenen und dann weiter behandelten Gleichungen bezogen sich nur auf eine einzelne Coordinatenrichtung. Man kann aber aus ihnen sofort die entsprechenden Gleichungen für alle drei Coordinatenrichtungen ableiten, welche die Gröfsen $\overline{U}$, E und $\overline{U} - T$ als Funktionen von w_1, w_2, w_3, c_1, c_2, c_3 bestimmen. Um dabei nicht zu lange Formeln zu erhalten, wollen wir zunächst der zweiten der Gleichungen (53) folgende Gestalt geben:

$$h = c^{-n} \left[\frac{2}{n} \beta (w c^n)^{\frac{n-1}{n}} + 2 \frac{n^2-2}{n^3} \beta^3 (w c^n)^{\frac{n-2}{n}} + \ldots \right]$$

und den Sinn dieser Gleichung folgendermaafsen aussprechen: ***Wenn f eine Funktion bedeutet, deren Form durch die Gleichung***

$$f(\sigma) = \frac{2}{n} \beta \sigma^{\frac{n-1}{n}} + 2 \frac{n^2-2}{n^3} \beta^3 \sigma^{\frac{n-2}{n}} + \ldots \tag{61}$$

bestimmt wird, so ist:

$$h = c^{-n} f(w c^n). \tag{62}$$

Diese letztere Gleichung können wir sofort in der Weise erweitern, dafs die Gröfse $\overline{U} = m (h_1 + h_2 + h_3)$ bestimmt wird, nämlich:

$$\overline{U} = m \left[c_1^{-n} f(w_1 c_1^n) + c_2^{-n} f(w_2 c_2^n) + c_3^{-n} f(w_3 c_3^n) \right]$$

Digitized by Google

oder unter Anwendung des Summenzeichens:

$$\overline{U} = m \Sigma c^{-n} f(w c^n). \tag{63}$$

Um aus diesem Ausdrucke von $\overline{U}$ die Ausdrücke der beiden anderen zu bestimmenden Gröfsen abzuleiten, braucht man nur zu setzen:

$$E = \overline{U} + \overline{T} = \overline{U} + m \Sigma w \tag{64}$$

$$\overline{U} - \overline{T} = \overline{U} - m \Sigma w. \tag{65}$$

---

§ 9. Wir wenden uns nun zum zweiten Theile unserer Untersuchung, nämlich zur Anwendung des Satzes vom mittleren Ergal auf die Molecularbewegungen der Gase.

Bei der Betrachtung der Gase gehen wir von der Hypothese aus, dafs die Molecüle sich geradlinig bewegen und nur durch gegenseitiges Zusammenstofsen oder durch Anstofsen an feste Wände ihre Richtungen ändern. Dabei wollen wir vorläufig die Molecüle als materielle Punkte betrachten, d. h. wir wollen von dem Umstande, dafs auch die Bestandtheile eines Molecüles sich in relativer Bewegung zu einander befinden, absehen.

In Bezug auf die mittlere Weglänge der Molecüle zwischen zwei Zusammenstöfsen habe ich schon in einer früheren Untersuchung[1]) gewisse Resultate gefunden, von denen ich einige hier kurz anführen will.

Ich habe dort nach Besprechung der etwas complicirten Wirkung, welche zwei bewegte Molecüle bei ihrer Annäherung auf einander ausüben, gesagt, dafs man für eine angenäherte Betrachtung dieser Vorgänge, bei der es sich nur um die Bestimmung gewisser Mittelwerthe handele, den Begriff der *Wirkungssphäre* eines Molecüls einführen könne, und habe dieselbe definirt als *eine um den Schwerpunkt des Molecüls beschriebene Kugel, bis zu*

1) Ueber die mittlere Länge der Wege, welche bei der Molecularbewegung gasförmiger Körper von den einzelnen Molecülen zurückgelegt werden. Diese Ann. Bd. 105, S. 239; Abhandlungensammlung Bd. II, S. 260; Philos. Magazine 4. Ser. Vol. XVII, p. 81.

Digitized by Google

deren Oberfläche der Schwerpunkt eines anderen Molecüls sich ihm nähern kann, bevor ein Abprallen eintritt.

Denkt man sich, wie es zuweilen der Anschaulichkeit wegen geschieht, die Molecüle als elastische Kugeln, welche beim Zusammentreffen ihrer Oberflächen von einander abprallen, so mufs man sich den Durchmesser einer solchen Kugel so grofs denken, wie den Radius der vorhin definirten Wirkungssphäre.

Den Radius der Wirkungssphäre habe ich mit ϱ bezeichnet. Ferner habe ich die Seite der kleinen Cuben, welche man erhält, wenn man sich die Molecüle in dem Raume, welcher sie einschliefst, cubisch geordnet denkt, mit λ bezeichnet, so dafs λ^3 den Theil des Raumes bedeutet, welcher auf jedes Molecül kommt. Mit Hülfe dieser Zeichen habe ich für den Fall, wo nur Ein Molecül sich bewegte und alle anderen Molecüle fest wären, für die mit l' bezeichnete mittlere Weglänge des bewegten Molecüls folgende Gleichung aufgestellt:

$$l' = \frac{\lambda^3}{\pi \varrho^2}. \tag{66}$$

Wenn auch die anderen Molecüle sich bewegen, so braucht man, um für diesen Fall die mittlere Weglänge zu bestimmen, nur den vorigen Ausdruck in dem Verhältnisse zu verkleinern, in welchem die absolute Geschwindigkeit des betrachteten Molecüls kleiner ist, als seine relative Geschwindigkeit zu den andern Molecülen, wobei man natürlich, wenn die einzelnen vorkommenden Werthe verschieden sind, Mittelwerthe anzuwenden hat. Ich habe beispielsweise den Fall berechnet, wo alle übrigen Molecüle sich eben so schnell bewegen, wie das betrachtete Molecül, und die für diesen Fall mit l bezeichnete mittlere Weglänge durch folgende Gleichung bestimmt:

$$l = \tfrac{3}{4} \frac{\lambda^3}{\pi \varrho^2}. \tag{67}$$

Die Bedeutung dieser Gleichung, welche ich noch in die Form

$$\frac{l}{\varrho} = \frac{\lambda^3}{\tfrac{3}{4} \pi \varrho^3}$$

Digitized by Google

brachte, sprach ich durch folgenden Satz aus[1]): *Die mittlere Weglänge eines Molecüls verhält sich zum Radius der Wirkungssphären, wie der von dem Gase im Ganzen eingenommene Raum zu dem Theile des Raumes, welcher von Wirkungssphären der Molecüle wirklich ausgefüllt wird.*

Stellt man sich die Molecüle als elastische Kugeln vor, welche sich bis zur Berührung ihrer Oberflächen einander nähern können, so mufs man, wie schon gesagt, den Durchmesser einer solchen Kugel so grofs setzen, wie den Radius der oben definirten Wirkungssphäre, woraus man für das Volumen der elastischen Kugel ein Achtel des Volumens der Wirkungssphäre erhält. Dann lautet der vorige Satz: *Die mittlere Weglänge eines Molecüles verhält sich zu einem Achtel seines Durchmessers wie der von dem Gase im Ganzen eingenommene Raum zu dem Theile des Raumes, welcher von den Molecülen wirklich ausgefüllt wird.*

§ 10. An diese schon früher gefundenen Resultate über die Zusammenstöfse der Molecüle wollen wir unsere weiteren Betrachtungen anknüpfen. Dabei wird es aber zweckmäfsig seyn, nicht einfach die Formeln in ihrer frühern Gestalt anzuwenden, sondern den Gegenstand noch einmal in etwas anderer Weise zu betrachten, wodurch wir zu Formeln gelangen werden, welche noch etwas genauer sind und eine für unseren jetzigen Zweck besonders geeignete Gestalt haben.

Es sey ein Raum gegeben, welcher durch eine beliebige unregelmäfsige Oberfläche begränzt sey. In diesem Raume befinde sich ein beweglicher Punkt an einer beliebigen Stelle, so dafs für alle gleich grofsen Theile des Raumes die Wahrscheinlichkeit, den Punkt zu enthalten, gleich grofs sey. Dieser Punkt mache eine unendlich kleine Bewegung nach irgend einer Richtung, so dafs alle Richtungen gleich wahrscheinlich seyen. Wie grofs unter *diesen Umständen die Wahrscheinlichkeit* sey, *bei seiner unendlich kleinen Be-*

1) Diese Ann. Bd. 105, S.

Wir wollen [illegible]
Oberfläche betr[illegible]
scheinlichkeit ist, [illegible]
der Oberfläche [illegible]

Wenn dl die [illegible] die
der Punkt sich [illegible]
ruhend und [illegible]
entgegengesetzten [illegible]
durch beschreibt [illegible] sich
prismatischen [illegible] ndern
Punkt gerade [illegible] sich
Wahrscheinlichkeit [illegible] dieser
das Flächenelement [illegible] nach

Für alle [illegible] eit seine
Flächenelement [illegible] tzen, daſs
geht, so daſs [illegible] Punkt ausübt,
kleine Raum [illegible] die Aenderung
die Wahrscheinlichkeit [illegible] rklich kurzer
kleinen Raum [illegible] Geschwindigkeit,
dagegen, [illegible] den Abweichung,
nach Innen [illegible]
Raum [illegible] das Wegelement dl
Wahrscheinlichkeit [illegible] und sagen: ***die Wahr-***
Theorie [illegible] ***und der unendlich kleinen***
[illegible] ***dargestellt durch***:

[illegible]

[illegible] für die durchschnittlich während
[illegible] nende Anzahl von Stöſsen, welche
[illegible] wollen, die Gleichung:

$$P' = \frac{Sv}{4W},$$

[illegible] länge l' erhalten wir, indem wir
[illegible] Gleichung:

$$[illegible]$$

Digitized by Google

negativ wird, ist die Wahrscheinlichkeit gleich Null, und für solche Bewegungsrichtungen, bei denen der Ausdruck positiv wird, ist die Wahrscheinlichkeit gleich

$$\frac{\cos\vartheta\, ds\, dl}{W}.$$

Um nun die mittlere Wahrscheinlichkeit für alle möglichen Bewegungsrichtungen zu berechnen, müssen wir noch das auf die Winkel bezügliche Wahrscheinlichkeitsgesetz berücksichtigen. Die Wahrscheinlichkeit, dafs der Winkel, den die Bewegungsrichtung mit der Normale bildet, zwischen einem gegebenen Werthe ϑ und dem unendlich wenig verschiedenen Werth $\vartheta + d\vartheta$ liege, wird dargestellt durch das Verhältnifs des Flächeninhaltes einer Kugelzone mit dem Polarwinkel ϑ und der Breite $d\vartheta$ zur ganzen Kugelfläche, also durch den Bruch

$$\frac{2\pi \sin\vartheta\, d\vartheta}{4\pi} = \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{2}.$$

Mit diesem Bruche haben wir den vorigen Bruch zu multipliciren, und dann für alle Werthe von ϑ, für welche $\cos\vartheta$ positiv ist, also von o bis $\frac{\pi}{2}$ zu integriren. Die Wahrscheinlichkeit, dafs der Punkt, wenn er sich nach beliebiger Richtung um die Strecke dl bewegt, dabei das Flächenelement ds treffe, wird also dargestellt durch

$$\int_{\vartheta=o}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\vartheta\, ds\, dl}{W} \cdot \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{2} = \frac{ds\, dl}{2W}\int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\, \cos\vartheta\, d\vartheta = \frac{ds\, dl}{4W}.$$

Dieselbe Wahrscheinlichkeit, welche für Ein Flächenelement gilt, gilt auch für jedes andere eben so grofse Flächenelement. Es ergiebt sich daher ohne Weiteres für irgend ein zur Betrachtung ausgewähltes endliches Stück s der Oberfläche, oder auch für die ganze Oberfläche, welche wir mit S bezeichnen wollen, folgender Satz: ***Wenn in einem von der Fläche S begränzten Raume W ein Punkt sich von beliebiger Stelle aus nach beliebiger Richtung um die unendlich kleine Strecke dl bewegt, so wird die Wahr-***

Digitized by Google

scheinlichkeit, dass er dabei einen gewissen Theil s der Oberfläche treffe, dargestellt durch

$$\frac{s}{4W}\,dl$$

und die Wahrscheinlichkeit, dafs er dabei überhaupt die Oberfläche treffe, dargestellt durch

$$\frac{S}{4W}\,dl.$$

Wir wollen nun annehmen, der Punkt bewege sich nicht blos um die unendlich kleine Strecke dl, sondern habe eine gewisse Geschwindigkeit v, mit welcher er sich fortbewege, bis er die Oberfläche treffe und von dieser nach den Elasticitätsgesetzen abpralle, worauf er nach anderer Richtung mit derselben Geschwindigkeit seine Bewegung fortsetze. Dabei wollen wir voraussetzen, dafs die Kraft, welche die Oberfläche auf den Punkt ausübt, nur in unmittelbarer Nähe wirke, so dafs die Aenderung der Bewegungsrichtung beim Stofse in unmerklich kurzer Zeit vor sich gehe, und demnach die Geschwindigkeit, trotz der während der Stofszeit stattfindenden Abweichung, als constant betrachtet werden dürfe.

Dann können wir im vorigen Satze das Wegelement dl durch das Produkt vdt ersetzen, und sagen: *die Wahrscheinlichkeit, dafs der Punkt während der unendlich kleinen Zeit dt die Oberfläche treffe, wird dargestellt durch:*

$$\frac{Sv}{4W}\,dt.$$

Daraus ergiebt sich für die durchschnittlich während der Zeiteinheit stattfindende Anzahl von Stöfsen, welche wir mit P' bezeichnen wollen, die Gleichung:

$$P' = \frac{Sv}{4W}, \tag{68}$$

und für die mittlere Weglänge l' erhalten wir, indem wir v durch P' dividiren, die Gleichung:

$$l' = \frac{4W}{S}. \tag{69}$$

Digitized by Google

§ 11. Nach Aufstellung dieser Sätze wenden wir uns zur Betrachtung der Molecüle. Anstatt aber gleich alle Molecüle als beweglich anzunehmen, denken wir uns einen Raum, in welchem sich sehr viele Molecüle in festen Stellungen befinden, die zwar nicht regelmäfsig geordnet, aber doch in soweit gleichmäfsig vertheilt sind, dafs gleich grofse mefsbare Raumabschnitte gleich viele Molecüle enthalten. Zwischen diesen festen Molecülen soll ein einzelnes Molecül sich bewegen, welches bald hier, bald dort gegen ein festes stöfst, und von ihm abprallt. Es handelt sich darum, die Anzahl der Anstöfse während der Zeiteinheit zu finden, woraus sich dann auch die mittlere Weglänge ergiebt.

Statt des beweglichen Molecüles kann man auch einen blofsen beweglichen Punkt betrachten, wenn man sich zugleich um die Schwerpunkte der festen Molecüle die oben definirten Wirkungssphären beschrieben denkt, und annimmt, dafs der bewegliche Punkt, so oft er die Oberfläche einer Wirkungssphäre trifft, von ihr abprallt. Dadurch erhält man wieder den im vorigen § besprochenen Fall, indem die Oberfläche jeder Wirkungssphäre einen Theil der Oberfläche bildet, welche den für die Bewegung des Punktes freien Raum begränzt. Wenn der Raum, in welchem sich die festen Molecüle befinden, äufserlich von einer festen Hülle umgränzt ist, von welcher der Punkt, wenn er sie trifft, auch abprallt, so bilden die Oberflächen der Wirkungssphären und die äufsere Umgränzungsfläche zusammen die ganze Oberfläche, welche den für die Bewegung freien Raum begränzt.

Wir wollen zunächst annehmen, der in der angegebenen Weise mit feststehenden Molecülen versehene Raum sey unendlich ausgedehnt, so dafs der bewegliche Punkt nur gegen die Oberflächen der Wirkungssphären der Molecüle, und nicht gegen eine feste Hülle stofse. Die Menge der vorhandenen feststehenden Molecüle mögen durch die Angabe bestimmt werden, dafs in einem Volumen V ihre Anzahl N sey. Die Wirkungssphären dieser N Molecüle

Digitized by Google

nehmen zusammen den Raum $N\frac{4}{3}\pi\varrho^3$ ein, so dafs der für die Bewegung des Punktes frei bleibende Theil des Volumens V durch die Differenz $V - N\frac{4}{3}\pi\varrho^3$ dargestellt wird. Ferner bilden die Oberflächen der Wirkungssp ären der N Molecüle zusammen eine Fläche von der Gröfse $N4\pi\varrho^2$. Diese beiden Ausdrücke $V - N\frac{4}{3}\pi\varrho^3$ und $N4\pi\varrho^2$ haben wir in den Gleichungen (68) und (69) an die Stellen von W und S zu setzen, wodurch wir erhalten:

$$P = \frac{N4\pi\varrho^2 v}{4(V - N\frac{4}{3}\pi\varrho^3)} = \frac{N\pi\varrho^2 v}{V - N\frac{4}{3}\pi\varrho^3} \tag{70}$$

$$l' = \frac{V - N\frac{4}{3}\pi\varrho^3}{N\pi\varrho^2}. \tag{71}$$

Um diesen Ausdruck von l' mit dem in (66) befindlichen, früher von mir aufgestellten Ausdrucke

$$l' = \frac{\lambda^3}{\pi\varrho^2}$$

zu vergleichen, multipliciren wir im Letzteren Zähler und Nenner mit N und setzen dann, der Bedeutung von λ entsprechend, $N\lambda^3 = V$, wodurch entsteht:

$$l' = \frac{V}{N\pi\varrho^2}.$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem in (71) gegebenen neuen Ausdrucke nur dadurch, dafs er als Zähler das ganze Volumen V hat, während der neue nur den für die Bewegung freien Theil dieses Volumens als Zähler hat. Letzteres ist genauer, der Unterschied ist aber so gering, dafs er gewöhnlich vernachlässigt werden kann, weil es eben eine charakteristische Eigenthümlichkeit der Gase ist, dafs nur ein sehr kleiner Theil des von einem Gase im Ganzen eingenommenen Raumes von den Wirkungssphären wirklich ausgefüllt wird. Wenn insbesondere von einem ***vollkommenen*** Gase die Rede ist, so liegt es schon in diesem Begriffe, dafs der von den Wirkungssphären ausgefüllte Raum gegen den ganzen Raum zu vernachlässigen ist. Indessen hat es nach dem Vorstehenden auch keine Schwierigkeit, diesen kleinen Unterschied in

Digitized by Google

den Formeln mit zu berücksichtigen, und auch in dem oben erwähnten, früher von mir aufgestellten Satze braucht man dazu nur statt der Worte: „der von dem Gase im Ganzen eingenommene Raum“ zu setzen: „der von den Wirkungssphären der Molecüle frei gelassene Theil des Raumes.“

Wenn der mit feststehenden Molecülen versehene Raum nur die Gröfse V hat und von einer festen Hülle umgränzt ist, von welcher der Punkt beim Anstofsen ebenfalls abprallt, und wenn man die Anzahl dieser Stöfse auch mit in Betracht ziehen will, so bedarf es dazu nur einer geringen Modification der Formeln. Sey s die Gröfse der äufseren Umgränzungsfläche, so hat man für S statt $N4\pi\varrho^2$ die Summe $N4\varrho\pi^2 + s$ zu setzen, wodurch man erhält:

$$P' = \frac{(N4\pi\varrho^2 + s)v}{4(V - N\frac{4}{3}\pi\varrho^3)} \tag{72}$$

$$l' = 4\frac{V - N\frac{4}{3}\pi\varrho^3}{N4\pi\varrho^2 + s} . \tag{73}$$

Die Fläche s ist aber bei Gasen, die nicht sehr stark verdünnt sind, gegen $N4\pi\varrho^2$ so klein, dafs auch dieser Unterschied in den meisten Fällen vernachlässigt werden kann.

Im Vorigen haben wir nur Ein Molecül als beweglich und alle anderen als feststehend angenommen. In der Wirklichkeit bewegen sich aber alle Molecüle, und es fragt sich, wie man in diesem Falle die Anzahl der Stöfse, welche ein Molecül während der Zeiteinheit erleidet, und seine mittlere Weglänge bestimmen kann.

Denken wir uns wieder zuerst den mit bewegten Molecülen erfüllten Raum als unendlich ausgedehnt, so dafs das betrachtete Molecül nur gegen andere Molecüle und nicht gegen eine feste Hülle stöfst, so brauchen wir, um die Anzahl der Stöfse, welche es erleidet, zu bestimmen, nur in der Gleichung (70) an die Stelle der absoluten Geschwindigkeit des betrachteten Molecüls seine mittlere relative Geschwindigkeit zu allen anderen Molecülen, welche wir mit $\overline{r}$ bezeichnen wollen, zu setzen. Wir erhalten da-

Digitized by Google

durch für die gesuchte Anzahl von Stöfsen, welche in diesem Falle P heifsen möge, die Gleichung:

$$P = \frac{N\pi\varrho^2\overline{r}}{V - N\frac{4}{3}\pi\varrho^3}. \tag{74}$$

Um ferner die mittlere Weglänge zu erhalten, müssen wir die Geschwindigkeit des betrachteten Molecüls durch P dividiren; da aber in diesem Falle seine Geschwindigkeit nicht unveränderlich bleibt, sondern im Allgemeinen bei jedem Stofse einen anderen Werth annimmt, so müssen wir seine mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}$ anwenden. Daraus ergiebt sich, wenn die mittlere Weglänge in diesem Falle l genannt wird, die Gleichung:

$$l = \frac{V - N\frac{4}{3}\pi\varrho^3}{N\pi\varrho^2} \cdot \frac{\overline{v}}{\overline{r}}. \tag{75}$$

Der Werth des hierin vorkommenden Bruches $\frac{\overline{v}}{\overline{r}}$ hängt von dem Gesetze ab, welches man in Bezug auf die Geschwindigkeiten der Molecüle annimmt.

Wenn der Raum, in welchem die Bewegung der Molecüle stattfindet, begränzt und von einer festen Hülle umgeben ist, und wenn man die Stöfse des betrachteten Molecüls gegen die Hülle, trotz ihrer verhältnifsmäfsig geringen Anzahl mit in Betracht ziehen will, so ist noch der Umstand zu berücksichtigen, dafs das betrachtete Molecül zu der festen Hülle nicht dieselbe relative Geschwindigkeit hat, wie zu den anderen Molecülen. Die mittlere relative Geschwindigkeit des Molecüls zur festen Hülle ist einfach gleich seiner mittleren absoluten Geschwindigkeit, also gleich $\overline{v}$. Demnach gehen die Gleichungen (72) und (73) für den Fall der Bewegung aller Molecüle über in

$$P = \frac{N4\pi\varrho^2\overline{r} + s\overline{v}}{4(V - N\frac{4}{3}\pi\varrho^3)} \tag{76}$$

$$l = \frac{4(V - N\frac{4}{3}\pi\varrho^3)\overline{v}}{N4\pi\varrho^2\overline{r} + s\overline{v}}. \tag{77}$$

§ 12. Wir müssen uns nun die Frage stellen, ob und in

Digitized by Google

welcher Weise auf die vorstehend besprochenen Molecularbewegungen der Satz vom mittleren Ergal angewandt werden kann.

Dieser Satz ist anwendbar, wenn die Veränderlichen, welche die Lagen der Punkte bestimmen, sich periodisch ändern, oder wenn sich wenigstens für die einzelnen Veränderlichen Zeitintervalle angeben lassen, welche, wenn sie bei der Bildung der Variationen in gleicher Weise, wie die Periodendauer periodischer Veränderungen benutzt werden, zu Variationen führen, die der in dem Satze vom mittleren Ergal vorkommenden Bedingungsgleichung genügen.

Betrachtet man von diesem Gesichtspunkte aus die unregelmäfsigen Molecularbewegungen, so erkennt man sofort, dafs eine Periodicität der Veränderlichen, welche die Lagen der Molecüle bestimmen, nicht vorhanden ist. Auch die Feststellung der vorher erwähnten Zeitintervalle scheint bei der Betrachtung der wirklich stattfindenden Bewegung erhebliche Schwierigkeiten darzubieten. Ich will mich daher für jetzt damit begnügen, eine andere Behandlungsart anzugeben, welche zwar weniger direkt ist, aber doch zu einem zuverlässigen Resultate führt. Sie beruht darauf, dafs die wirklich stattfindende Bewegung durch eine andere ersetzt wird, bei welcher alle für unsere Untersuchung wesentlichen Gröfsen dieselben Werthe haben, wie bei jener, und welche der für die Anwendbarkeit des Satzes vom mittleren Ergal erforderlichen Bedingung genügt.

Der leichteren Anschauung wegen wollen wir nicht gleich die durch einander fliegenden und sich gegenseitig stofsenden Molecüle behandeln, sondern von einem einfacheren Falle ausgehen. Es sey ein unendlich ausgedehnter Raum gegeben, welcher in der schon im vorigen § besprochenen Weise mit feststehenden Molecülen versehen sey, zwischen denen sehr viele materielle Punkte umherfliegen, welche sich gegenseitig in ihren Bewegungen nicht

Digitized by Google

beeinflussen, aber von den Wirkungssphären der Molecüle, so oft sie sie treffen, abprallen.

Die Kraft, welche ein Punkt erleidet, und welche das Abprallen bewirkt, denken wir uns als ausgehend von den Oberflächen der Wirkungssphären, und nehmen an, dafs sie nur in unmittelbarer Nähe dieser Oberflächen merklich werde, dann aber bei noch weiterer Annäherung sehr schnell wachse. In diesem Falle können wir, so lange der Punkt sich von allen Wirkungssphären in merklicher Entfernung befindet, seine lebendige Kraft als constant betrachten und seinen Antheil am Ergal, welchen wir kurz, da die Bewegungen der einzelnen Punkte von einander unabhängig sind, sein Ergal nennen wollen, gleich Null setzen. Wenn aber der Punkt dicht an die Oberfläche einer Wirkungssphäre kommt, so nimmt der auf die Normalrichtung der Fläche bezügliche Theil seiner lebendigen Kraft sehr schnell ab bis Null, und dann, nachdem die normale Componente seiner Bewegung sich umgekehrt hat, eben so schnell wieder zu bis zu dem ursprünglichen Werthe. Gleichzeitig nimmt sein Ergal von Null aus um eben so viel zu, wie die lebendige Kraft abnimmt, und dann wieder ab bis Null. Hieraus folgt, dafs das *mittlere* Ergal jedes Punktes im Verhältnisse zu seiner mittleren lebendigen Kraft sehr klein seyn mufs, weil das Ergal nur während sehr kurzer Zeiten angebbare Werthe hat, und dafs ferner, bei gegebener lebendiger Kraft, das mittlere Ergal eines Punktes der Anzahl der Stöfse, welche er während der Zeiteinheit erleidet, proportional seyn mufs.

Für die Anzahl der Stöfse eines Punktes haben wir die Gleichung (70), nämlich:

$$P' = \frac{N 4\pi\varrho^2 v}{4(V - N\frac{1}{3}\pi\varrho^3)}.$$

Bezeichnen wir nun die Anzahl der beweglichen Punkte, welche sich gleichzeitig in einem Volumen von der Gröfse V befinden, mit N', und nehmen vorläufig an, dafs sie sich alle mit gleicher Geschwindigkeit v bewegen, so wird die

Digitized by Google

gesammte Anzahl von Stöfsen, welche innerhalb des Volumens V während einer Zeiteinheit stattfinden, dargestellt durch das Product:

$$N'P' = N' \frac{N 4\pi\varrho^2 v}{4(V - N\frac{4}{3}\pi\varrho^3)}.$$

Dieselbe Anzahl von Stöfsen gilt aber auch für einen anderen Fall. Es sey ein Gefäfs gegeben, in welchem ein beweglicher Punkt nur von den Wänden abprallt. In diesem Gefäfse denke man sich N' materielle Punkte, welche sich mit der gemeinsamen Geschwindigkeit v nach allen möglichen Richtungen bewegen. Nennt man den Rauminhalt des Gefäfses W und seine Oberfläche S, so hat man für die durchschnittliche Anzahl der Stöfse der einzelnen Punkte während der Zeiteinheit die Gleichung (68), nämlich:

$$P' = \frac{Sv}{4W},$$

und demgemäfs wird die gesammte Anzahl der in dem Gefäfse während der Zeiteinheit stattfindenden Stöfse dargestellt durch das Produkt:

$$N'P' = N' \frac{Sv}{4W}.$$

Man braucht also, um für diesen Fall dieselbe Anzahl von Stöfsen zu erhalten, wie für den vorigen, nur das Gefäfs so zu wählen, dafs W und S den Gröfsen $V - N\frac{4}{3}\pi\varrho^3$ und $N 4\pi\varrho^2$ gleich oder auch nur proportional sind.

Dabei besitzen die Stöfse gegen die Wandfläche des Gefäfses in Bezug auf ihre Richtungen dieselbe Mannigfaltigkeit, wie die Stöfse gegen die Oberflächen der Wirkungssphären. Nimmt man endlich noch an, dafs auch die Kraft, welche die Wandfläche des Gefäfses auf die Punkte ausübt, durch dieselbe Funktion der Entfernung dargestellt werde, wie die Kraft, welche die Oberfläche der Wirkungssphäre eines Molecüles auf die Punkte ausübt, so findet auch die Zu- und Abnahme des Ergales bei den Stöfsen gegen die Wände ebenso statt, wie bei den Stöfsen

Digitized by Google

gegen die Wirkungssphären der Molecüle. Man muſs also in beiden Fällen dasselbe mittlere Ergal erhalten.

Statt anzunehmen, daſs alle Punkte, welche sich zwischen den feststehenden Molecülen bewegen, gleiche Geschwindigkeiten haben, kann man auch annehmen, daſs ihre Geschwindigkeiten nach irgend einem Gesetze verschieden seyen, welches Gesetz man mathematisch dadurch ausdrücken kann, daſs man sagt: wenn einer der Punkte willkürlich herausgegriffen wird, so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs seine Geschwindigkeit zwischen einem gegebenen Werthe v und dem unendlich wenig verschiedenen Werthe $v + dv$ liege, gleich $f(v)dv$, worin f eine gegebene Funktion bedeutet. In diesem Falle muſs man auch den in dem Gefäſse befindlichen Punkten Geschwindigkeiten zuschreiben, welche demselben Gesetze entsprechen. Dann erhält man wieder für die Punkte im Gefäſse dieselbe mittlere lebendige Kraft und dasselbe mittlere Ergal, wie für die Punkte, welche sich zwischen den feststehenden Molecülen bewegen.

Da die obigen Bedingungen, welchen der Rauminhalt und die Oberfläche des Gefäſses genügen müssen, seine Gestalt noch nicht bestimmen, so kann man die Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipedons wählen. Wenn man dann die Lagen der Punkte durch rechtwinkelige Coordinaten bestimmt, welche den Kanten des Parallelepipedons parallel sind, so hat man in diesen Coordinaten Veränderliche, welche sich periodisch ändern.

Demnach sind wir dahin gelangt, *die sehr complicirte Bewegung der Punkte zwischen den feststehenden Molecülen durch eine andere Bewegung zu ersetzen, welche dasselbe mittlere Ergal und dieselbe mittlere lebendige Kraft hat, wie jene, und dabei durch periodische Veränderungen der Coordinaten dargestellt wird.*

§ 13. Wir gehen nun weiter, und betrachten einen ebenfalls unendlich ausgedehnten Raum, welcher mit Molecülen erfüllt ist, die alle in Bewegung sind, und dabei gegen einander stoſsen.

Digitized by Google

Schon oben ist darauf hingewiesen, daſs man die Anzahl der Stöſse, welche ein einzelnes Molecül unter diesen Umständen erleidet, erhalten kann, wenn man dem betrachteten Molecüle seine mittlere relative Geschwindigkeit zu allen anderen Molecülen als eigene Geschwindigkeit zuschreibt, und dann annimmt, es bewege sich unter feststehenden Molecülen. Daraus ist für diese Anzahl die Gleichung (74), nämlich

$$P = \frac{N\pi\varrho^2\bar{r}}{V - N\frac{4}{3}\pi\varrho^3},$$

abgeleitet, worin N die Anzahl der Molecüle bedeutet, welche gleichzeitig in einem Volumen V befindlich sind.[1]) Um hieraus weiter diejenige Anzahl von Stöſsen abzuleiten, welche in dem Volumen V während der Zeiteinheit im Ganzen stattfinden, muſs man die vorige Formel auf alle N Molecüle anwenden. Dabei ist aber noch zu bedenken, daſs jeder Stoſs nicht blos Ein Molecül, sondern zwei Molecüle betrifft, also unter den Stöſsen, welche alle einzelnen Molecüle erleiden, zweimal vorkommt. Wir dürfen also, um die Anzahl der stattfindenden Stöſse auszudrücken, nicht einfach die vorige Formel mit N multipliciren, sondern müssen das Product noch durch 2 dividiren, und erhalten somit:

$$\frac{NP}{2} = \frac{N^2\pi\varrho^2\bar{r}}{2(V - N\frac{4}{3}\pi\varrho^3)}.$$

Dieselbe Anzahl von Stöſsen erhält man, wenn man sich denkt, daſs in einem Gefäſse, dessen Rauminhalt $V - N\frac{4}{3}\pi\varrho^3$ und dessen Oberfläche $N4\pi\varrho^2$ ist, $\frac{1}{2}N$ Punkte befindlich seyen, welche sich nach allen möglichen Rich-

1) Streng genommen muſs man, wenn sich N Molecüle in einem zur Betrachtung ausgewählten Volumen V befinden, sagen, jedes dieser N Molecüle könne gegen $N-1$ andere stoſsen, und muſs daher in der obigen Formel $N-1$ an die Stelle von N setzen. Wenn aber V ein Volumen ist, welches eine wägbare Quantität, z. B. eine Gewichtseinheit des Gases enthält, so ist N eine so ungeheuer groſse Zahl, daſs man ohne Bedenken 1 dagegen vernachlässigen und in den Formeln N statt $N-1$ schreiben kann.

Digitized by Google

tungen mit Geschwindigkeiten bewegen, deren Mittelwerth $\bar{r}$ ist, und, ohne gegenseitig auf einander einzuwirken, von den Gefäfswänden abprallen.

Was ferner die Stärke der Stöfse anbetrifft, so hängt diese von den Winkeln des Zusammentreffens und von den Geschwindigkeiten ab. Die Verschiedenen möglichen Winkel kommen bei den Stöfsen der Molecüle unter einander in derselben Weise vor, wie bei den Stöfsen der Punkte gegen die Gefäfswände, und wir können daher von ihnen absehen. In Bezug auf die Geschwindigkeiten ist zunächst zu bemerken, dafs bei zwei Molecülen, welche gegen einander stofsen, die Stärke des Stofses dieselbe ist, als wenn das eine Molecül feststände, und das andere die relative Geschwindigkeit r der beiden Molecülen als eigene Geschwindigkeit hätte. Daher wird auch ein materieller Punkt von derselben Masse, wie das Molecül, wenn er mit der Geschwindigkeit r eine feste Wand trifft, einen Stofs von derselben Stärke erleiden.

Die relativen Geschwindigkeiten der verschiedenen vorkommenden Combinationen der Molecüle zu je zweien sind natürlich verschieden, und ihr Verhalten kann wieder dadurch mathematisch ausgedrückt werden, dafs man sagt: wenn von allen jenen Combinationen eine willkürlich herausgegriffen wird, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs die relative Geschwindigkeit der beiden zu der Combination gehörigen Molecüle zwischen einem Werthe r und dem unendlich wenig davon verschiedenen Werthe $r + dr$ liege, gleich $F(r)dr$, worin F eine Funktion bedeutet, die von dem Gesetze abhängt, welches für die Geschwindigkeit der einzelnen Molecüle gilt. Indem wir diese Funktion als gegeben annehmen, schreiben wir auch den $\frac{1}{2}N$ in dem Gefäfse befindlichen Punkten solche Geschwindigkeiten zu, dafs, wenn einer der Punkte willkürlich herausgegriffen wird, dann die Wahrscheinlichkeit, dafs seine Geschwindigkeit zwischen r und $r + dr$ liege, gleich $F(r)dr$ ist.

In diesem Falle ist nicht nur die Gesammtzahl der Stöfse, welche die Punkte in dem Gefäfse erleiden, gleich

Digitized by Google

der Gesammtzahl der Stöfse, welche unter den Molecülen des Volumens V stattfinden, sondern es kommen auch von jeder Stärke eben so viele Stöfse in dem Gefäfse vor, wie unter den Molecülen. Demnach haben die $\frac{1}{2}N$ in dem Gefäfse befindlichen Punkte dasselbe mittlere Ergal, wie die N in dem Volumen V befindlichen Molecüle.

Aufserdem läfst sich nachweisen, dafs auch die lebendige Kraft der $\frac{1}{2}N$ materiellen Punkte und der N Molecüle gleich ist. Ich habe in einer vor Kurzem veröffentlichten Abhandlung[1]) gezeigt, dafs für irgend ein in Bewegung befindliches System von Massenpunkten m_1, m_2, m_3 etc. folgende Gleichung gilt:

$$\frac{1}{M}\Sigma m_\nu m_\mu r^2 = \Sigma m v^2 - M v_c^2 , \tag{78}$$

worin m_ν und m_μ irgend zwei der gegebenen Massen sind, und die Summe an der linken Seite sich auf alle Combinationen der gegebenen Massen zu je zweien bezieht, während die Summe an der rechten Seite sich einfach auf alle Massen beziehen soll. Unter M ist die Summe aller Massen und unter v_c die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des ganzen Massensystemes verstanden. Wenn wir diese Gleichung auf die N gleichzeitig in dem Volumen V befindlichen Molecüle, anwenden, so haben wir $v_c^2 = o$ zu setzen und alle Massen als unter einander gleich anzunehmen. Aus letzterem Umstande folgt, dafs zu setzen ist:

$$M = Nm$$

und, wenn $\overline{v^2}$ das arithmetische Mittel aller vorkommenden Werthe von v^2 bedeutet:

$$\Sigma m v^2 = Nm\overline{v^2} .$$

Ferner kann man das Produkt $m_\nu m_\mu$ durch m^2 ersetzen, und, da die Anzahl der Combinationen von N Massen zu je zweien gleich $\frac{1}{2}N(N-1)$ ist, wofür man wegen des grofsen Werthes von N auch $\frac{1}{2}N^2$ schreiben kann, so kann

1) Ueber verschiedene Formen des Virials. Diese Ann. Jubelband S. 411.

Digitized by Google

man, wenn $\overline{r^2}$ das arithmetische Mittel aller vorkommenden Werthe von r^2 bedeutet, setzen:

$$\Sigma m_\nu m_\mu r^2 = \frac{1}{2} N^2 m^2 \overline{r^2}.$$

Wenn man diese Werthe in die Gleichung (78) einsetzt und zugleich an beiden Seiten durch 2 dividirt, so erhält man:

$$\frac{1}{2} N \frac{m}{2} \overline{r^2} = N \frac{m}{2} \overline{v^2}.$$

Hierin ist die Gleichheit der lebendigen Kräfte ausgedrückt, denn das Produkt $N\frac{m}{2}\overline{v^2}$ ist die lebendige Kraft der N Molecüle, und das Produkt $\frac{1}{2} N \frac{m}{2} \overline{r^2}$ kann als die lebendige Kraft der $\frac{1}{2}N$ materiellen Punkte angesehen werden, welche auch die Massen m haben, und bei denen der Mittelwerth von r^2 derselbe ist, wie bei den Combinationen von je zwei Molecülen.

Wir sind somit auch hier zu dem gleichen Resultate gelangt, wie bei der im vorigen § betrachteten Bewegung, nämlich, *dafs die $\frac{1}{2}N$ materiellen Punkte, welche sich in der angegebenen Weise in dem Gefäfse bewegen, dasselbe mittlere Ergal und dieselbe mittlere lebendige Kraft haben, wie die N durch einander fliegenden und gegen einander stofsenden Molecüle in dem Volumen V, und dafs man daher, soweit es sich um diese Gröfsen handelt, die eine Bewegung durch die andere ersetzen kann.*

Was die Gestalt des Gefäfses anbetrifft, so wählen wir sie wieder rechtwinklig parallelepipedisch, wodurch die Periodicität der Veränderungen der Coordinaten erreicht wird. Da nun aber der Ausdruck $N4\pi\varrho^2$, welchem die Oberfläche des Gefäfses gleich seyn mufs, eine für den Rauminhalt $V = N\frac{4}{3}\pi\varrho^3$ sehr grofse Oboerfläche darstellt, so müssen wir bei dem Parallelepipedon wenigstens Eine Seite als sehr klein annehmen. Diese Seite heifse a. Das Verhältnifs der beiden andern Seiten zu einander können wir beliebig wählen, und wir wollen sie daher als unter einander gleich annehmen, und beide mit b bezeichnen.

Digitized by Google

Dann ist der Rauminhalt des Parallelepipedons ab^2 und seine Oberfläche $2b^2 + 4ab$, und indem wir diese Gröfsen gleich den beiden obengenannten setzen, erhalten wir zur Bestimmung von a und b die Gleichungen:

$$(79) \qquad \begin{cases} ab^2 = V - N\frac{4}{3}\pi\varrho^3 \\ 2b^2 + 4ab = N4\pi\varrho^2. \end{cases}$$

Zur Abkürzung wollen wir in diesen Gleichungen für die gesammte Oberfläche aller Wirkungssphären das oben angewandte Zeichen S benutzen und zugleich das gesammte Volumen aller Wirkungssphären mit ε bezeichnen, indem wir setzen:

$$(80) \qquad \begin{cases} S = N4\pi\varrho^2 \\ \varepsilon = N\frac{4}{3}\pi\varrho^3 \end{cases}$$

Dann lauten die Gleichungen:

$$(81) \qquad \begin{cases} ab^2 = V - \varepsilon \\ 2b^2 + 4ab = S. \end{cases}$$

§ 14. Wir können nun unsere weiteren Untersuchungen auf den Fall beschränken, wo sich in einem rechtwinklig parallelepipedischen Gefäfse sehr viele materielle Punkte bewegen, welche sich gegenseitig nicht beeinflussen, sondern nur von den Gefäfswänden Kräfte erleiden, die das Abprallen verursachen.

Die Kraft, welche eine Gefäfswand auf einen Punkt ausübt, soll senkrecht zur Wand sein und durch eine Funktion des Abstandes dargestellt werden. Wenn wir daher rechtwinklige, den Kanten des Parallelepipedons parallele Coordinaten einführen, deren Anfangspunkt irgendwo im Innern des Parallelepipedons liegt, und eine der Coordinaten mit x bezeichnen, und wenn ferner von den beiden Wänden, welche auf dieser Coordinatenrichtung senkrecht sind, die nach der positiven Seite gelegene den Abstand c, und die nach der negativen Seite gelegene den Abstand c' vom Anfangspunkte der Coordinaten hat, so dafs $c - x$ und $c' + x$ die Abstände des beweglichen

Digitized by Google

Punktes von den beiden Wänden sind, so können wir die Kraft, welche der Punkt nach der x-Richtung erleidet, durch einen Ausdruck von der Form

$$F'(c - x) - F'(c' + x)$$

darstellen, worin F' eine Function bedeutet, von der wir annehmen wollen, dafs sie für alle gröfseren Werthe des Argumentes sehr nahe gleich Null sey, und nur für sehr kleine Werthe des Argumentes von merkbarer Gröfse werde, dann aber bei noch weiterer Abnahme des Argumentes sehr schnell wachse. Bezeichnen wir noch das Integral der Funktion F' mit F, so wird der auf die x-Richtung bezügliche Theil des Ergals für den betrachteten Punkt ausgedrückt durch:

$$F(c - x) + F(c' + x).$$

Die Bewegungen der materiellen Punkte sollen nach allen möglichen Richtungen stattfinden, und zwar so dafs alle möglichen Richtungen in gleicher Weise vertreten sind.

Die Geschwindigkeiten der verschiedenen Punkte sollen verschieden seyn, und das Gesetz, welches in dieser Beziehung herrscht, wollen wir jetzt in folgender Weise ausdrücken. Wir wählen dazu die weiter oben betrachtete Gröfse $\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ aus, und da dieselbe im Verlaufe der Bewegung zwar während des gröfsten Theiles der Zeit constant, aber während der kleinen zu den Stöfsen gebrauchten Zeittheile veränderlich ist, so nehmen wir ihren Mittelwerth, welchen wir, wie früher, mit w bezeichnen wollen. Dieses w hat für verschiedene Punkte verschiedene Werthe, und es möge daher, indem das arithmetische Mittel aus allen vorkommenden Werthen von w mit $\mathfrak{w}$ bezeichnet wird, gesetzt werden:

$$w = \mathfrak{w}\, z^2, \tag{82}$$

worin z eine Gröfse ist, welche für die verschiedenen Punkte zwischen o und ∞ verschieden seyn kann. Auf diese Gröfse wollen wir das Gesetz beziehen, indem wir die Wahrscheinlichkeit, dafs sie für einen willkürlich her-

Digitized by Google

ausgegriffenen Punkt zwischen irgend einem Werthe z und dem unendlich wenig davon verschiedenen Werthe $z + dz$ liege, durch $f(z)\,dz$ darstellen, wobei wir unter f eine gegebene Funktion verstehen.

Wenn die Anzahl der vorhandenen Punkte den Annahmen des vorigen § entsprechend mit $\frac{1}{2}N$ bezeichnet wird, so kann man das Gesetz auch so ausdrücken: die Anzahl der Punkte, für welche jene Gröfse zwischen z und $z + dz$ liegt, ist gleich $\frac{1}{2}N f(z)\,dz$.

Wenn man den vorstehenden Ausdruck von $z = o$ bis $z = \infty$ integrirt, so mufs man die ganze Anzahl $\frac{1}{2}N$ erhalten, woraus folgt, dafs die Funktion f der Gleichung

$$\int_o^\infty f(z)\,dz = 1 \tag{83}$$

genügen mufs.

Will man für irgend eine, vorläufig allgemein mit q bezeichnete Gröfse, welche von w abhängt, und sich daher, wenn w gegeben ist, als Funktion von z betrachten läfst, das arithmetische Mittel aus allen vorkommenden Werthen bestimmen, so hat man die Anzahl $\frac{1}{2}N f(z)\,dz$ mit q zu multipliciren, dann den Ausdruck von $z = o$ bis $z = \infty$ zu integriren, und endlich dieses Integral durch die ganze Anzahl $\frac{1}{2}N$ zu dividiren. Der Mittelwerth von q hat somit, da $\frac{1}{2}N$ sich fortlebt, als Ausdruck:

$$\int_o^\infty q\, f(z)\,dz\,.$$

Wendet man dieses speciell auf die Gröfse w selbst an, für welche man wz^2 schreiben kann, und bedenkt, dafs der so bestimmte Mittelwerth gleich w seyn mufs, so erhält man eine zweite Bedingungsgleichung, welcher die Funktion f genügen mufs, nämlich:

$$\int_o^\infty z^2 f(z)\,dz = 1\,. \tag{84}$$

Digitized by Google

Was nun die Form der Funktion f anbetrifft, so hat Maxwell bekanntlich in seiner ausgezeichneten Abhandlung „Illustrations of the Dynamical Theory Gases“ [1]) aus den Regeln der Wahrscheinlichkeit ein höchst beachtenswerthes Gesetz für die Geschwindigkeiten der Molecüle abgeleitet. Danach wird für ein willkürlich herausgegriffenes Molecül die Wahrscheinlichkeit, dafs die auf die x-Richtung bezügliche Geschwindigkeitscomponente zwischen einem Werthe x' und dem unendlich wenig davon verschiedenen Werthe $x' + dx'$ liege, durch die Formel

$$\frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x'^2}{a^2}} dx'$$

dargestellt, worin e die Basis der natürlichen Logarithmen und a eine von der Lebhaftigkeit der Bewegung abhängige Constante ist, während x' alle Werthe $-\infty$ bis $+\infty$ haben kann. Ein Ausdruck von derselben Form gilt dann auch für die relativen Geschwindigkeiten der verschiedenen Combinationen der Molecüle zu je zweien. Wenn wir dieses Gesetz auf die oben eingeführte Gröfse z anwenden, so lautet es: die Wahrscheinlichkeit, dafs die mit z bezeichnete Gröfse zwischen den Werthen z und $z + dz$ liege, wird durch die Formel

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

dargestellt, worin z alle Werthe von o bis ∞ haben kann. Demnach erhält man bei Annahme dieses Gesetzes zur Bestimmung der Funktion f die Gleichung:

$$(fz) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}. \tag{85}$$

Wir wollen nun für einen einzelnen der bewegten Punkte, deren Bewegungen von einander unabhängig sind, die den Satz vom mittleren Ergal ausdrückende Gleichung bilden, und zwar wollen wir uns dabei an die Form (IIIc) halten, welche, wenn wir unter U vorläufig das Ergal

1) Philosophical Magazine, 4. ser., Vol. XIX, p. 19.

Digitized by Google

eines einzelnen Punktes verstehen, auf diesen Fall anwendbar ist und lautet:

$$\delta \bar{U} = \tfrac{1}{2} \Sigma \overline{pq'} \delta \log u + \Sigma \frac{\overline{dU}}{dc} \delta c .$$

Hierin bezieht sich für unseren gegenwärtigen Fall die erste Summe an der rechten Seite auf die drei Coordinatenrichtungen und die zweite Summe auf die sechs Grenzebenen des Parallelepipedons.

Nun sind aber in unserem Falle nicht blos die Bewegungen der verschiedenen Punkte von einander unabhängig, sondern es lassen sich auch für jeden Punkt die Bewegungscomponenten nach den verschiedenen Coordinatenrichtungen von einander unabhängig bestimmen. Demnach können wir in Bezug auf eine einzelne Coordinatenrichtung, welche wir wieder die x-Richtung nennen wollen, eine der vorigen entsprechende Gleichung bilden. Darin ist dann zu setzen:

$$\tfrac{1}{2} \overline{pq'} = \frac{m}{2} \overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = mw$$

und die Gröfse u hat die Bedeutung:

$$u = m \overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} i^2 . \tag{86}$$

Ferner kommen von den sechs Grenzebenen nur die beiden in Betracht, welche auf der x-Richtung senkrecht sind. Endlich wollen wir den Mittelwerth des auf die x-Richtung bezüglichen Theiles des Ergals, wie schon früher, mit mh bezeichnen, und daneben noch die Zeichen g und g' einführen, deren Bedeutung durch die Gleichungen

$$mg = \overline{\frac{dU}{dc}}; \quad mg' = \overline{\frac{dU}{dc'}} \tag{87}$$

bestimmt werden. Bei Anwendung dieser Zeichen läfst sich m aus allen Gliedern fortheben und die betreffende Gleichung lautet:

$$\delta h = w \delta \log u + g \delta c + g' \delta c', \tag{88}$$

oder, nachdem noch w durch $\mathfrak{w} z^2$ ersetzt ist:

$$\delta h = \mathfrak{w} z^2 \delta \log u + g \delta c + g' \delta c'. \tag{89}$$

Digitized by Google

Diese Gleichung, in welcher für die Gröfse z irgend ein bestimmter Werth angenommen ist, kann unter Vernachlässigung von unendlich kleinen Differenzen auf alle Punkte angewandt werden, bei welchen diese Gröfse zwischen den Werthen z und $z + dz$ liegt, und deren Anzahl $\frac{1}{2}Nf(z)dz$ ist, wobei wir voraussetzen, dafs die Funktion f bei der abweichenden Bewegung dieselbe Form habe, wie bei der ursprünglichen Bewegung. Die auf diese Punkte bezogene Gleichung möge nun mit $f(z)dz$ multiplicirt und dann von $z = o$ bis $z = \infty$ integrirt werden. Dabei ist zu bemerken, dafs die Gröfse z, welche bei der abweichenden Bewegung dieselbe unendliche Reihe von Werthen hat, wie bei der ursprünglichen Bewegung, bei der durch das Zeichen δ angedeuteten Variation als constant anzusehen ist, und dafs daher die Factoren z^2 und $f(z)dz$ nach Belieben vor oder hinter das Variationszeichen gesetzt, und ebenso das Integrationszeichen und das Variationszeichen gegen einander verstellt werden können. Die neue Gleichung kann daher so geschrieben werden:

$$(90) \qquad \delta\int_o^\infty h f(z)dz = \mathfrak{w}\delta\int_o^\infty \log u \,.\, z^2 f(z)dz + \int_o^\infty g f(z)dz \,.\, \delta c + \int_o^\infty g' f(z)dz \,.\, \delta c' .$$

Die Integrale

$$\int_o^\infty h f(z)dz, \int_o^\infty g f(z)dz \text{ und } \int_o^\infty g' f(z)dz$$

bedeuten dem Obigen nach die arithmetischen Mittel aus allen vorkommenden Werthen von h, g und g', welche Mittel wir mit $\overline{h}$, $\overline{g}$ und $\overline{g'}$ bezeichnen wollen. Zur einfacheren Bezeichnung des vierten Integrales wollen wir den deutschen Buchstaben u einführen, dessen Bedeutung wir durch die Gleichung

$$(91) \qquad \log \mathfrak{u} = \int_o^\infty \log u \,.\, z^2 f(z)dz$$

Digitized by Google

bestimmen. Dann lautet die vorige Gleichung:

$$\delta\overline{h} = \mathfrak{w}\,\delta\log u + \overline{g}\,\delta c + \overline{g'}\delta c'. \tag{92}$$

Eine Gleichung dieser Form können wir für jede der drei Coordinatenrichtungen bilden. Wir setzen dabei zur Unterscheidung die Indices 1, 2 und 3 an die Zeichen aller in der Gleichung vorkommenden Gröfsen, mit Ausnahme von $\mathfrak{w}$, dem wir für die drei Coordinatenrichtungen einen gemeinsamen Werth zuschreiben. Wenn wir die drei so entstandenen Gleichungen addiren und die Summe mit $\frac{1}{2}Nm$ multipliciren, so erhalten wir:

$$\frac{1}{2}Nm\,\delta(\overline{h_1} + \overline{h_2} + \overline{h_3}) = \frac{1}{2}Nm\,\mathfrak{w}\,\delta\log(u_1u_2u_3) + \frac{1}{2}Nm(\overline{g_1}\delta c_1 + \overline{g'_1}\delta c'_1 + \overline{g_2}\delta c_2 + \overline{g'_2}\delta c'_2 + \overline{g_3}\delta c_3 + \overline{g'_3}\delta c'_3). \tag{93}$$

Nun ist aber $\frac{1}{2}Nm(\overline{h_1} + \overline{h_2} + \overline{h_3})$ nichts anderes, als das mittlere Ergal des ganzen Systemes von Punkten. Wenden wir jetzt für das auf eine bestimmte Zeit bezügliche Ergal des ganzen Systemes den Buchstaben U an, so müfsten wir eigentlich das *mittlere* Ergal durch $\overline{U}$ bezeichnen, da aber bei einer sehr grofsen Anzahl von Punkten, welche in ihren Bewegungen verschiedene Phasen haben, der Werth des gesammten Ergals immer sehr nahe gleich seinem Mittelwerthe ist, so können wir den waagrechten Strich über dem U fortlassen. Das Produkt $\frac{1}{2}Nm\mathfrak{w}$ ist ein Drittel der gesammten mittleren lebendigen Kraft, und wir bezeichnen es daher durch $\frac{1}{3}T$, indem wir auch hier den waagrechten Strich über dem T fortlassen. Was endlich die Gröfsen g_1, g'_1, g_2 etc. anbetrifft, so gelten bei der jetzigen Bedeutung von U, abermals unter Fortlassung des waagrechten Striches über den Differentialcoëfficienten von U, folgende Gleichungen:

$$\frac{1}{2}Nm\overline{g_1} = \frac{dU}{dc_1};\ \frac{1}{2}Nm\overline{g'_1} = \frac{dU}{dc'_1};\ \frac{1}{2}Nm\overline{g_2} = \frac{dU}{dc_2}\ \text{etc.}$$

Wenn wir diese Werthe in die Gleichung (93) einsetzen, und zugleich die Glieder mit den Variationen δc_1, $\delta c'_1$, δc_2 etc. unter ein Summenzeichen zusammenfassen, so erhalten wir:

Digitized by Google

(94) $$\delta U = \tfrac{1}{3} T \delta \log(u_1 u_2 u_3) + \Sigma \frac{dU}{dc} \delta c .$$

§ 15. In der vorstehenden Gleichung wollen wir zunächst die Gröfse $u_1 u_2 u_3$ einer näheren Betrachtung unterwerfen.

Nach Gleichung (91) ist:

$$\log u = \int_c^\infty \log u \,.\, z^2 f(z)\, dz .$$

Hierin hat u die in (86) gegebene Bedeutung, nämlich:

$$u = m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 i^2 .$$

Da nun $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ für den gröfsten Theil der Zeit constant ist, und nur während der kurzen Stofszeiten abweichende Werthe hat, so ist $i\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$ angenähert gleich der auf die x-Richtung bezüglichen Projection des von dem Punkte während der Zeit i zurückgelegten Weges, und da ferner der Punkt während dieser Zeit zwischen den beiden auf der x-Richtung senkrechten Wänden, deren Abstand von einander $c + c'$ ist, einmal hin und her läuft, so ist $i\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$ angenähert gleich $2(c + c')$, und somit u angenähert gleich $4m(c + c')^2$. Dieses gilt für alle Punkte, trotz der Ungleichheit von z, und wenn man darauf in der oben angeführten, für log u geltenden Formel Rücksicht nimmt, und ferner bedenkt, dafs

$$\int_0^\infty z^2 f(z)\, dz = 1$$

so erkennt man, dafs log u nahe gleich log $4m(c + c')^2$ seyn mufs. Das letztere Resultat wollen wir noch in eine für das Folgende bequemere Form bringen, indem wir sagen: $\sqrt{\frac{u}{4m}}$ ist nahe gleich $c + c'$.

Dieses für eine beliebige Coordinatenrichtung gefundene Resultat können wir natürlich auch für die drei Coordi-

Digitized by Google

natenrichtungen einzeln ausdrücken, indem wir zur Unterscheidung die Indices 1, 2 und 3 anwenden. Den durch Addition der drei Logarithmen entstehenden Logarithmus wollen wir durch ein vereinfachtes Zeichen darstellen, indem wir setzen:

$$\log \mathfrak{U} = \tfrac{1}{2} \log \frac{\mathfrak{u}_1 \mathfrak{u}_2 \mathfrak{u}_3}{(4m)^3}$$

oder:

$$\mathfrak{U} = \sqrt{\frac{\mathfrak{u}_1 \mathfrak{u}_2 \mathfrak{u}_3}{(4m)^3}} \,. \tag{95}$$

Die hierdurch bestimmte Gröfse $\mathfrak{U}$ ist dem Obigen nach angenähert gleich dem Produkte $(c_1 + c'_1)(c_2 + c'_2)(c_3 + c'_3)$ oder gleich dem Rauminhalte des Gefäfses, und da der Letztere nach (79) und (81) von dem Volumen V des betrachteten Gasquantums, welches durch die in dem Gefäfse befindlichen materiellen Punkte vertreten wird, nur um die kleine Gröfse $N\frac{4}{3}\pi\varrho^3$ oder ε verschieden ist, so können wir auch sagen: $\mathfrak{U}$ ***ist nur wenig verschieden von*** V.

Die eben ausgeführte angenäherte Bestimmung von $\mathfrak{U}$ hat nur den Zweck, von der Bedeutung der nachstehenden Gleichungen eine bequeme Vorstellung zu geben. Die genaue Bestimmung dieser Gröfse läfst sich ebenfalls ausführen, wenn man neben der Gleichung (95) noch die Gleichungen (91) und (86) in Betracht zieht, und sie auf die weiter oben besprochene Bewegung der materiellen Punkte in dem rechtwinklig parallelepipedischen Gefäfse von den durch die Gleichungen (81) bestimmten Dimensionen anwendet.

In Folge der Gleichung (95) können wir nun setzen:

$$\log(\mathfrak{u}_1 \mathfrak{u}_2 \mathfrak{u}_3) = 2 \log \mathfrak{U} + 3 \log(4m).$$

Der letzte Lagarithmus an der rechten Seite ist constant, so dafs seine Variation gleich Null ist, und wir erhalten daher:

$$\delta \log(\mathfrak{u}_1 \mathfrak{u}_2 \mathfrak{u}_3) = 2 \delta \log \mathfrak{U},$$

wodurch die Gleichung (94) übergeht in:

$$\delta U = \tfrac{2}{3} T \delta \log \mathfrak{U} + \Sigma \frac{dU}{dc} \delta c \,. \tag{96}$$

Digitized by Google

An diese Gleichung können wir sofort noch zwei andere anschliefsen, welche die Gröfsen E und $U-T$ bestimmen. Dazu brauchen wir nur die Variation δT an beiden Seiten im einen Falle zu addiren, im anderen zu subtrahiren. Dabei wollen wir an der rechten Seite setzen

$$\delta T = T\delta \log T = T\delta \log \frac{T}{Nm},$$

und wollen dann zur Vereinfachung die Buchstaben $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{Z}$ einführen, mit den Bedeutungen:

$$(97) \qquad \begin{cases} \mathfrak{E} = \mathfrak{U}\left(\frac{T}{Nm}\right)^{\frac{3}{2}} \\ \mathfrak{Z} = \mathfrak{U}\left(\frac{Nm}{T}\right)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

Dann lauten die durch jene Addition und Subtraction aus (96) hervorgehenden Gleichungen:

$$(98) \qquad \delta E = \tfrac{3}{2} T\delta \log \mathfrak{E} + \Sigma \frac{dU}{dc}\delta c$$

$$(99) \qquad \delta(U-T) = \tfrac{3}{2} T\delta \log \mathfrak{Z} + \Sigma \frac{dU}{dc}\delta c.$$

Wir müssen nun endlich noch die in den Gleichungen (96), (98) und (99) vorkommende Summe $\Sigma \frac{dU}{dc}\delta c$ näher betrachten, um ihre Bedeutung zu erkennen.

Das Summenzeichen bezieht sich auf die sechs Gröfsen $c_1, c_1, c_2, c_2, c_3, c_3$, deren jede die Lage einer der sechs das Parallelepipedon begrenzenden Wände bestimmt, und nur in dem Theile des Ergals vorkommt, welcher sich auf die von dieser Wand ausgeübte Kraft bezieht. Indem wir die drei Coordinaten eines Punktes jetzt x_1, x_2 und x_3 nennen, wollen wir zunächst die Wand betrachten, welche auf der x_1-Richtung senkrecht ist und nach der positiven Seite liegt, und welche vom Anfangspunkte der Coordinaten den Abstand c_1 hat. Die von dieser Wand auf den Punkt ausgeübte, nach der x_1-Richtung gehende Kraft wird unserer früheren Bezeichnung gemäfs durch $F(c_1-x_1)$ dargestellt, und der auf diese Kraft bezügliche Theil des Ergals ist $F(c_1-x_1)$. Demgemäfs können wir diejenige

Digitized by Google

Kraft, welche umgekehrt der Punkt auf die Wand ausübt, durch $-F'(c_1 - x_1)$ oder $-\frac{dF(c_1 - x_1)}{dc_1}$ darstellen und, da sie im Verlaufe der Zeit veränderlich ist, für ihren Mittelwerth das Zeichen $-\overline{\frac{dF(c_1 - x_1)}{dc_1}}$ anwenden.

Denken wir uns diesen auf Einen Punkt bezüglichen Ausdruck für alle in dem Gefäfse befindlichen Punkte gebildet, und alle so entstandenen Ausdrücke addirt, so erhalten wir die Gesammtkraft, welche alle Punkte auf die Wand ausüben, oder den Druck, welchen die Wand von den Punkten erleidet. Die Summe aller jener Ausdrücke ist aber nichts anderes als $-\frac{dU}{dc_1}$, und das Produkt $-\frac{dU}{dc_1}\delta c_1$ stellt daher die äufsere Arbeit dar, welche bei der Verschiebung der Wand um die Strecke δc_1 geleistet wird.

Dasselbe, was von Einer Wand gesagt wurde, gilt auch von den übrigen fünf Wänden, und wir erhalten daher folgendes Resultat. *Der Ausdruck* $-\Sigma\frac{dU}{dc}\delta c$ *stellt die äufsere Arbeit dar, welche bei der Volumenänderung des Gefäfses geleistet wird.* Dabei wird aber vorausgesetzt, dafs die Wände während ihrer Verschiebung denselben Druck erleiden, wie während ihres Stillstehens, oder, wie wir es in anderen Worten ausdrücken können, dafs die Volumenänderung *in umkehrbarer Weise* stattfindet.

Die sechs Glieder der Summe $\Sigma\frac{dU}{dc}\delta c$ lassen sich sofort auf drei zurückführen, indem für je zwei einander gegenüberstehende Wände die Differentialcoëfficienten $\frac{dU}{dc}$ und $\frac{dU}{dc'}$ gleich sind, und man daher setzen kann:

$$\frac{dU}{dc}\delta c + \frac{dU}{dc'}\delta c' = \frac{dU}{dc}\delta(c + c').$$

Hierin ist die Summe $c + c'$ die Entfernung der beiden auf der betrachteten Coordinatenrichtung senkrechten Gränzebenen des Parallelepipedons von einander, oder die

Digitized by Google

der betrachteten Coordinatenrichtung parallele Seite des Parallelepipedons. Indem man dieses auf die drei Coordinatenrichtungen anwendet, erhält man drei Glieder mit den Variationen der drei Seiten des Parallelepipedons als Factoren. Da nun dasjenige Parallelepipedon, um welches es sich in unseren Betrachtungen handelt, die drei Seiten a, b, b hat, welche durch die Gleichungen (81) bestimmt sind, und da diese Gleichungen aufser a und b nur noch V als veränderliche Gröfse enthalten, so lassen sich die Variationen der Seiten durch Ausdrücke darstellen, in denen nur die eine Variation δV vorkommt. Nach Einsetzung dieser Ausdrücke kann man die drei Glieder in eines zusammenziehen, und wenn man den dabei erhaltenen Factor von δV mit $-p$ bezeichnet, so entsteht die Gleichung:

$$\Sigma \frac{dU}{dc}\delta c = -p\delta V, \tag{100}$$

worin p eine Gröfse darstellt, die mit grofser Annäherung gleich dem in dem Gase herrschenden Drucke gesetzt werden kann. Durch Anwendung dieser Gleichung läfst sich die Form der Gleichungen (96), (98) und (99) noch vereinfachen.

§ 16. Man kann die im vorigen § gewonnenen Gleichungen leicht so umgestalten, dafs ihre Uebereinstimmung mit den Gleichungen, welche den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie ausdrücken, noch deutlicher hervortritt.

Die Gleichung (96) kann man so schreiben:

$$\delta U - \Sigma \frac{dU}{dc}\delta c = \tfrac{2}{3} T\delta \log \mathfrak{U}.$$

Hierin stellt δU die Zunahme des Ergals und somit die innere Arbeit, und $-\Sigma \frac{dU}{dc}\delta c$ die äufsere Arbeit dar. Die linke Seite der Gleichung drückt daher die ganze Arbeit aus, welche bei dem Uebergange aus dem einen Zustande des Systems in den anderen geleistet ist. Bezeichnen wir diese Arbeit mit δL, so lautet die Gleichung:

$$\delta L = \tfrac{2}{3} T\delta \log \mathfrak{U}. \tag{101}$$

Digitized by Google

Wenn wir ebenso in der Gleichung (98) das letzte Glied der rechten Seite auf die linke Seite bringen, so kommt hier, aufser den vorher besprochenen Arbeitsgröfsen, noch die in δE enthaltene Gröfse δT vor, welche die Zunahme der lebendigen Kraft darstellt, und in den Gleichungen der Wärmetheorie die Zunahme der im Körper vorhandenen Wärme bedeutet. Da nun die Zunahme der vorhandenen Wärme und die geleistete Arbeit, zu welcher auch Wärme verbraucht werden mufste, zusammen gleich der ganzen mitgetheilten Wärme ist, welche wir mit δQ bezeichnen wollen, so erhalten wir:

$$\delta Q = \tfrac{2}{3} T \delta \log \mathfrak{E}. \tag{102}$$

Diese Gleichungen sind mit denjenigen, welche ich in meiner früheren Abhandlung[1]) abgeleitet habe, im Einklange, bis auf Einen Punkt, welcher zu denen gehört, in welchen meine Gleichungen mit den schon vorher von Boltzmann[2]) aufgestellten übereinstimmten. Ich habe auf diesen Punkt schon bei einer früheren Gelegenheit hingedeutet. In einem Artikel, in welchem ich die zwischen Boltzmann's und meiner Behandlung des Gegenstandes bestehenden Unterschiede auseinandersetzte[3]), fügte ich noch bei der Correctur folgende Anmerkung hinzu. „Nachdem dieser Artikel schon zum Drucke abgesandt war, habe ich im weiteren Verlaufe meiner Untersuchungen gefunden, dafs die fraglichen Ausdrücke, um allgemein gültig zu sein, noch einer Aenderung bedürfen, welche sie von den Boltzmann'schen noch verschiedener machen wird." Diese Aenderung nun ist es, durch welche meine neuen Gleichungen sich von den früheren unterscheiden.

Die zur Bestimmung von δL früher von mir aufgestellte

1) Sitzungsberichte der Niederrhein. Ges. für Natur- und Heilkunde 1870, und Pogg. Ann. Bd. 142.

2) Sitzungsberichte der Wiener Academie Bd. 53, 1866.

3) Pogg. Ann. Bd. 144, S. 265.

Digitized by Google

Gleichung[1]) läfst sich durch einige leichte Umformungen in folgende Gestalt bringen:

$$\delta L = 2T\delta \log \Re,$$

worin $\Re$ eine Gröfse bedeutet, welche sehr nahe proportional der mittleren Weglänge der Molecüle ist. Nun ist, wie wir weiter oben gesehen haben, die mittlere Weglänge eine Gröfse, welche dem Volumen eines gegebenen Gasquantums nahe proportional ist, und es ist daher auch $\Re$ eine dem Volumen angenähert proportionale Gröfse. Demnach kann man die Variation $\delta \log \Re$ und die in (101) vorkommende Variation $\delta \log \mathfrak{U}$ als unter einander übereinstimmend betrachten. Die Factoren dieser Variationen stimmen aber nicht überein, indem $\delta \log \Re$ den Factor $2T$ und $\delta \log \mathfrak{U}$ den Factor $\frac{2}{3}T$ hat.

Bestimmt man unter Anwendung der gewöhnlichen Gasgesetze die bei einer Zustandsänderung geleistete Arbeit, so findet man, dafs der Factor $\frac{2}{3}T$ der richtige ist, und dafs somit jene frühere Gleichung, während sie im Uebrigen die richtige Form hat, doch in diesem Punkte der Wirklichkeit nicht entspricht.

Ich mufs gestehen, dafs diese Abweichung der bisherigen Formeln von der Wirklichkeit, auf die ich erst später aufmerksam wurde, mir grofse Schwierigkeiten gemacht hat. Ich war dadurch genöthigt, die ganze mechanische Behandlung des Gegenstandes von Neuem zu beginnen, und in verallgemeinerter Weise auszuführen. Dabei überzeugte ich mich, dafs meine früheren Gleichungen für Bewegungen von Punkten in geschlossenen Bahnen allerdings ausreichen, dafs aber zu derjenigen Erweiterung der Gleichungen, durch welche sie geeignet werden, auf ein System von Punkten angewandt zu werden, die sich nicht in geschlossenen Bahnen bewegen, neue, bisher in der Mechanik nicht angestellte Betrachtungen erforderlich seyen.

1) Sitzungsber. der Niederrhein. Ges. 1870, S. 187 und Pogg. Ann. Bd. 142, S. 458.

Digitized by Google

Ich gelangte durch diese Untersuchung zu dem Satze vom mittleren Ergal, den ich, weil er mir von allgemeiner mechanischer Wichtigkeit zu seyn schien, in einer besonderen Abhandlung publicirte, und den ich in der vorliegenden Abhandlung auf die Molecularbewegungen der Gase wenigstens in der Weise angewandt habe, dafs ich diese Bewegungen durch andere ersetzt habe, welche dasselbe mittlere Ergal und dieselbe mittlere lebendige Kraft besitzen, und bei welchen sich die den Bedingungen des Satzes genügenden Veränderlichen und Zeitintervalle leicht angeben lassen. Ich glaube, dafs das Resultat dieser Anwendung besonders geeignet ist, zu zeigen, wie nothwendig es ist, den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie, wenn man ihn auf mechanische Principien zurückführen will, von diesem Gesichtspunkte aus zu betrachten.

§ 17. Die Molecularbewegungen der Gase werden häufig in der Weise behandelt, dafs man sich die Molecüle einfach als elastische Kugeln vorstellt, welche sonst keine Kräfte auf einander ausüben, als dafs sie sich, nachdem ihre Oberflächen in Berührung gekommen sind, bei noch weiterer Annäherung mit sehr schnell wachsender Kraft abstofsen. Diese Vorstellung ist selbst für den Fall, wo man von den relativen Bewegungen der Bestandtheile eines Molecüles absehen und nur die Bewegungen der Schwerpunkte der Molecüle in Betracht ziehen will, unvollkommen, weil die Molecüle, wie man aus gewissen Erscheinungen schliefsen mufs, nicht blos eine abstofsende Kraft auf eineinder ausüben, sondern sich in etwas gröfseren Entfernungen auch anziehen. Indessen kann diese Vorstellung doch dazu dienen, die Art der Bewegung einigermaafsen anschaulich zu machen und einige characteristische Eigenschaften der Gase zu erklären. Es wird daher nicht ohne Interesse seyn, wenn wir zum Schlusse für einen solchen Fall, *wo zwischen den Molecülen nur eine abstofsende Kraft existirt, welche erst bei einer gewissen Annäherung merklich wird, dann aber bei noch weiterer*

Digitized by Google

Annäherung sehr schnell wächst, die Gleichungen etwas vollständiger entwickeln.

Indem wir dabei zunächst wieder die wirklichen Bewegungen der Molecüle innerhalb eines gewissen Volumens V durch Bewegungen von materiellen Punkten in einem rechtwinklig parallelepipedischen Gefäfse ersetzen, und Coordinaten anwenden, welche den Seiten des Parallelepipedons parallel sind und ihren Anfangspunkt im Mittelpunkte desselben haben, drücken wir die Kräfte, welche die auf der x-Achse senkrechten Wände auf einen Punkt ausüben, nicht allgemein durch $F(c-x)$ und $-F(c+x)$ aus, sondern, wie in § 5, durch:

$$-m\frac{n\alpha^n}{(c-x)^{n+1}} \text{ und } m\frac{n\alpha^n}{(c+x)^{n+1}}.$$

Dann können wir alle in den §§ 6, 7 und 8 entwickelten Formeln benutzen, und können sie sogar noch vereinfachen, indem wir die Gröfse α, welche wir dort als so klein annahmen, dafs die Kraft in der Mitte des Gefäfses nicht mehr merklich ist, jetzt als so klein annehmen, dafs die Kraft nur in unmittelbarer Nähe der Wand merklich ist, und indem wir daher bei den Reihenentwickelungen nur die Glieder erster Ordnung in Bezug auf α berücksichtigen.

Von den in jenen §§ aufgestellten Gleichungen wollen wir die unter (53) und (54) für h und $\log u$ gegebenen zur weiteren Behandlung auswählen, wobei wir sie aber in der Weise abkürzen wollen, dafs wir die Glieder, welche eine höhere als die erste Potenz der Gröfse β, welche mit α von gleicher Ordnung ist, als Factor enthalten, fortlassen. In dieser Form lauten sie:

$$h = \frac{2\beta}{nc} w^{\frac{n-1}{n}}$$

$$\log u = \log(16mc^2) - 2\frac{n-1}{n}\frac{\beta}{c} w^{-\frac{1}{n}}.$$

Diese Gleichungen haben wir früher nur für einen einzelnen beweglichen materiellen Punkt aufgestellt. Jetzt

Digitized by Google

wollen wir aus ihnen Gleichungen ableiten, welche für das ganze zu betrachtende System von Punkten gelten.

Dazu führen wir in der ersteren für w das Product $\mathfrak{w} z^2$ ein, und multipliciren sie mit $f(z)dz$, wodurch wir erhalten:

$$hf(z)dz = \frac{2}{n}\frac{\beta}{c}(\mathfrak{w} z^2)^{\frac{n-1}{n}} f(z)dz .$$

Indem wir diese Gleichung von $z = o$ bis $z = \infty$ integriren, erhalten wir an der linken Seite das arithmetische Mittel aller vorkommenden Werthe von h, welches wir, wie früher, mit $\overline{h}$ bezeichnen wollen, wodurch kommt:

$$\overline{h} = \frac{2}{n}\frac{\beta}{c}\mathfrak{w}^{\frac{n-1}{n}} \int_0^\infty z^{2\frac{n-1}{n}} f(z)dz . \tag{103}$$

In der zweiten der obigen Gleichungen führen wir ebenfalls für w das Product $\mathfrak{w} z^2$ ein, multipliciren sie aber mit $z^2 f(z)dz$, wodurch entsteht:

$$\log u \,.\, z^2 f(z)dz = \log(16mc^2) \,.\, z^2 f(z)dz - 2\frac{n-1}{n}\frac{\beta}{c}(\mathfrak{w} z^2)^{-\frac{1}{n}} z^2 f(z)dz .$$

Indem wir diese Gleichung von $z = o$ bis $z = \infty$ integriren, erhalten wir an der linken Seite nach (91) log u, und an der rechten Seite haben wir nach (84) zu setzen:

$$\int_0^\infty z^2 f(z)dz = 1 ,$$

so dafs die Gleichung übergeht in:

$$\log u = \log(16mc^2) - 2\frac{n-1}{n}\frac{\beta}{c}\mathfrak{w}^{-\frac{1}{n}} \int_0^\infty z^{2\frac{n-1}{n}} f(z)dz . \tag{104}$$

Um auch das in den Gleichungen (103) und (104) noch vorkommende Integral zu berechnen, müfste man über die Function f, welche das Verhalten der Geschwindigkeiten der verschiedenen Punkte bestimmt, eine specielle Annahme machen. Unter Zugrundelegung des Maxwellschen Gesetzes, nach welchem für $f(z)$ der in (85) ge-

Digitized by Google

gebene Ausdruck $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}$ zu setzen wäre, würde man erhalten:

$$\int_0^\infty z^{2\frac{n-1}{n}} f(z)\,dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty z^{2\frac{n-1}{n}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz\,,$$

wodurch man zu einer Gammafunction gelangen würde, nämlich:

$$(105) \qquad \int_0^\infty z^{2\frac{n-1}{n}} f(z)\,dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, 2^{\frac{n-1}{n}}\, \Gamma\frac{3n-2}{2n}\,.$$

Für die folgenden Entwickelungen ist es aber nicht nöthig, den Werth dieses Integrals zu kennen, sondern wir können uns damit begnügen, ein abgekürztes Zeichen für dasselbe einzuführen, und zu dem Zwecke wollen wir setzen:

$$(106) \qquad Z = \int_0^\infty z^{2\frac{n-1}{n}} f(z)\,dz.$$

Dann gehen die beiden Gleichungen über in:

$$(107) \qquad \begin{cases} \bar{h} = \frac{2}{n}\, Z \frac{\beta}{c}\, \mathfrak{w}^{\frac{n-1}{n}} \\ \log \mathfrak{u} = \log(16\, m\, c^2) - 2\frac{n-1}{n}\, Z \frac{\beta}{c}\, \mathfrak{w}^{-\frac{1}{n}}\,. \end{cases}$$

Diese Gleichungen wollen wir nun auf die drei Coordinatenrichtungen einzeln anwenden, und von den drei Gleichungen, welche dadurch aus jeder von ihnen entstehen, die Summe bilden, also:

$$(108) \qquad \begin{cases} \bar{h}_1 + \bar{h}_2 + \bar{h}_3 = \frac{2}{n}\, Z\beta\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}\right)\mathfrak{w}^{\frac{n-1}{n}} \\ \log(\mathfrak{u}_1 \mathfrak{u}_2 \mathfrak{u}_3) = \log\left[(16m)^3\, c_1{}^2 c_2{}^2 c_3{}^2\right] \\ \qquad\qquad - 2\frac{n-1}{n}\, Z\beta\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}\right)\mathfrak{w}^{-\frac{1}{n}}\,. \end{cases}$$

Die erste dieser beiden Gleichungen multipliciren wir mit $\frac{1}{2}Nm$. Dann stellt die linke Seite das ganze Ergal U dar, und wir erhalten:

Digitized by Google

$$U = Nm^{\frac{Z}{n}} \beta \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}\right) w^{\frac{n-1}{n}} . \tag{109}$$

Die zweite Gleichung multipliciren wir mit $\frac{1}{2}$ und ziehen darauf von beiden Seiten $\frac{1}{2}\log(4m)^3$ ab. Dann stellt die linke Seite gemäfs (95) die Gröfse $\log \mathfrak{U}$ dar, und es kommt somit:

$$\log \mathfrak{U} = \log(2^3 c_1 c_2 c_3) - \frac{n-1}{n} Z \beta \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}\right) w^{-\frac{1}{n}} . \tag{110}$$

Indem wir diese Gleichungen auf das specielle Parallelepipedon mit den Seiten a, b, b beziehen, haben wir die Gröfsen c_1, c_2, c_3 durch $\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}b$ zu ersetzen und dann die Gleichungen (81) in Anwendung zu bringen, wodurch wir erhalten:

$$2^3 c_1 c_2 c_3 = a b^2 = V - \varepsilon$$

$$\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} = \frac{2}{a} + \frac{4}{b} = \frac{S}{V-\varepsilon} ,$$

so dafs die vorigen Gleichungen lauten:

$$\begin{cases} U = Nm^{\frac{Z}{n}} \beta \frac{S}{V-\varepsilon} w^{\frac{n-1}{n}} \\ \log \mathfrak{U} = \log(V-\varepsilon) - \frac{n-1}{n} Z \beta \frac{S}{V-\varepsilon} w^{-\frac{1}{n}} . \end{cases} \tag{111}$$

Bezeichnen wir, wie früher, die gesammte lebendige Kraft des Systemes mit T, so ist

$$T = \tfrac{1}{2} N 3 m w \text{ und daher } w = \frac{2}{3}\frac{T}{Nm} ,$$

wodurch die Gleichungen übergehen in:

$$\begin{cases} U = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n-1}{n}} \frac{Z}{n} \beta \frac{S}{V-\varepsilon} T \left(\frac{T}{Nm}\right)^{-\frac{1}{n}} \\ \log \mathfrak{U} = \log(V-\varepsilon) - \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{n-1}{n} Z \beta \frac{S}{V-\varepsilon} \left(\frac{T}{Nm}\right)^{-\frac{1}{n}} . \end{cases} \tag{112}$$

Wenn man unter V speciell *dasjenige Volumen versteht, welches eine Gewichtseinheit des Gases enthält*, so dafs die Massen der in ihm enthaltenen Molecüle zusammen eine Masseneinheit bilden, so hat man $Nm = 1$ zu setzen. Für diesen Fall wollen wir zur Vereinfachung noch das Zeichen γ einführen, dessen Bedeutung durch die Gleichung

Digitized by Google

113) $$\gamma = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n-1}{n}} \frac{Z}{n} S\beta$$

oder auch gemäfs (29) durch

(113a) $$\gamma = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n-1}{n}} \frac{Z}{n} S R \alpha$$

bestimmt wird, woraus ersichtlich ist, dafs γ eine kleine constante Gröfse darstellt. Dann lauten die Gleichungen:

(114) $$\begin{cases} U = \frac{\gamma}{V-\varepsilon} T^{\frac{n-1}{n}} \\ \log \mathfrak{U} = \log (V-\varepsilon) - \frac{3}{2}(n-1) \frac{\gamma}{V-\varepsilon} T^{-\frac{1}{n}}. \end{cases}$$

Aus dieser Gleichung für U ergeben sich auch sofort diejenigen für E und $U - T$, und ebenso lassen sich aus der Gleichung für $\log \mathfrak{U}$, unter Berücksichtigung von (97), worin auch $Nm = 1$ zu setzen ist, diejenigen für $\log \mathfrak{E}$ und $\log \mathfrak{Z}$ ableiten, nämlich:

(115) $$\begin{cases} E = T\left(1 + \frac{\gamma}{V-\varepsilon} T^{-\frac{1}{n}}\right) \\ \log \mathfrak{E} = \log\left[(V-\varepsilon) T^{\frac{3}{2}}\right] - \frac{3}{2}(n-1) \frac{\gamma}{V-\varepsilon} T^{-\frac{1}{n}} \end{cases}$$

(116) $$\begin{cases} U - T = -T\left(1 - \frac{\gamma}{V-\varepsilon} T^{-\frac{1}{n}}\right) \\ \log \mathfrak{Z} = \log \frac{V-\varepsilon}{T^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2}(n-1) \frac{\gamma}{V-\varepsilon} T^{-\frac{1}{n}}. \end{cases}$$

Es sind somit die sechs zu bestimmenden Gröfsen in einfacher Weise als Funktionen von T und V dargestellt, und man wird sich leicht davon überzeugen, dafs diese Funktionen die unter einander übereinstimmenden Differentialcoëfficienten

Digitized by Google

$$\frac{d_V U}{d \log \mathfrak{U}} = \frac{d_V E}{d \log \mathfrak{E}} = \frac{d_V (U - T)}{d \log \mathfrak{Z}} = \frac{2}{3} T$$

geben. Dabei möge aber noch einmal daran erinnert werden, dafs die Gleichungen des letzten § nur in dem Falle auf die Molecularbewegungen der Gase anzuwenden sind, wenn man von der gegenseitigen Anziehung der Molecüle absehen will, was natürlich den Werth des Ergals ändert, und selbst auf sein Vorzeichen Einfluſs haben kann.

III. *Ueber das Verhalten der Amalgame und der geschmolzenen Legirungen gegen den galvanischen Strom, und über die Natur der bei der Amalgamation der Metalle auftretenden elektrischen Ströme; von Eugen Obach.*

Ueber das Verhalten der Amalgame und der geschmolzenen Legirungen gegen den galvanischen Strom.

Unter die sogenannten metallischen Leiter des galvanischen Stromes, d. h. unter diejenige Klasse von Körpern, welche den galvanischen Strom zu leiten vermögen, ohne hierbei durch denselben in ihre chemischen Bestandtheile zerlegt zu werden, rechnet man beinahe allgemein auch die Amalgame und sowohl die festen, als auch die geschmolzenen Legirungen.

Man ist hierzu um so mehr berechtigt, als die umfangreichen Arbeiten der HHrn. Matthieſsen und Vogt ergeben haben, dafs die Leitungsfähigkeit der zahlreichen, von ihnen untersuchten Legirungen mit der Temperatur abnimmt, eine Eigenthümlichkeit, welche mit ganz vereinzelten Ausnahmen, die durch besondere Nebenumstände begründet sind, den metallischen Leitern allein zukommt, während die elektrolytisch leitenden Körper eine Ver-

Digitized by Google

gröſserung ihrer Leitungsfähigkeit mit steigender Temperatur zeigen.

Dem entgegen steht jedoch das Ergebniſs einer Reihe von Versuchen, welche Gerardin[1]) über die Einwirkung des galvanischen Stromes auf flüssige Amalgame und Legirungen angestellt hat und aus welchen hervorgeht, daſs diese Körper durch den Strom eine elektrolytische Zerlegung erleiden. So soll z. B. nach Gerardin geschmolzenes Klempnerloth (eine Legirung aus Zinn und Blei), welches der Einwirkung des Stromes ausgesetzt wird, nach dem Erkalten am positiven Pole spröde und brüchig, an dem negativen Pole dagegen weich und hämmerbar seyn. Ebenso soll Natriumamalgam nach Einwirkung des Stromes nur noch am negativen Pole Wasser zersetzen. Die bei gewöhnlicher Temperatur flüssige Legirung aus Kalium und Natrium soll durch den Strom an beiden Elektroden fest werden. Kleine Mengen irgend eines Metalles, welche in Quecksilber gelöst werden, so z. B. Gold oder Wismuth, sollen stets zu der negativen Elektrode übergeführt werden.

In der auszugsweisen Mittheilung der Gerardin'schen Versuche, die Pelouze an der angeführten Stelle in den *Comptes rendus* giebt, ist leider keinerlei Mittheilung gemacht über die Art und Weise, wie die Versuche angestellt wurden und über die Stromstärken, mit denen Hr. Gerardin operirt hat. Da Hr. Gerardin seine Beobachtung nicht weiter verfolgt zu haben scheint, und besonders, da seine Angaben die voraussichtlich sehr interessanten quantitativen Verhältnisse dieser Vorgänge nicht berühren, so z. B. die Beziehung zwischen der Gesammtstromstärke, welche die Legirung durchfliefst, zu ihrem elektrolytisch wirksamen Theil, ferner das Verhältniſs zwischen Leitungsfähigkeit und Elektrolysirbarkeit bei verschiedenen Legirungen u. dergl., so habe ich auf Anregung des Hrn. Prof. Wiedemann in dessen physikalisch-che-

1) Gerardin, *Compt. rend. T. LIII, p.* 727, 1861 und Wiedemann, Galvanismus Bd. I, S. 486.

Digitized by Google

mischem Laboratorium eine Reihe von Versuchen über das Verhalten der Amalgame und geschmolzenen Legirungen gegen den galvanischen Strom angestellt, welche nachstehende Resultate [1]) ergaben.

I. Versuche über die Elektrolyse von Amalgamen.

Zu diesen Versuchen wurde Natriumamalgam verwendet. Dieses Amalgam wurde gewählt, sowohl weil Hr. Gerardin sich bei seinen Versuchen besonders damit beschäftigt hat, als auch weil die analytische Untersuchung des Versuchsergebnisses bei diesem Amalgame auf sehr einfache und genaue Weise ausführbar ist.

Das Amalgam wurde auf die gewöhnliche Weise dargestellt, indem in das, in einer Reibschale befindliche trockene Quecksilber so lange Natrium eingetragen wurde, bis das Ganze zu einer festen Masse erstarrte, welche rasch gepulvert und in einem gut verstöpselten Glase zu weiterer Verwendung aufbewahrt wurde.

Da sich das Natriumamalgam sehr leicht an der Luft oxydirt, so wurde bei den vorliegenden Versuchen stets in einer Wasserstoffatmosphäre gearbeitet. Es wurde deshalb dem Apparate, in welchem bei den folgenden Versuchen 1 und 2 die Einwirkung des Stromes auf das Amalgam stattfand, die in Fig. 1, Taf. III, gezeichnete Einrichtung gegeben.

Zwei kleine Glascylinder *A* und *A'* sind auf einem gemeinschaftlichen Grundbrette befestigt. Sie sind mit einander durch eine ⌒-förmig gebogene Glasröhre *H* in Verbindung gesetzt. An diese Röhre ist bei *h* ein Glashahn *G* angeschmolzen. Jedes der beiden Gefäfse *A* und *A'* ist durch einen vierfach durchbohrten Kautschukstöpsel *s* und *s'* verschlossen, durch welchen aufser dem einen, bis nahe auf den Boden der beiden Cylinder reichenden Schenkel *b* und *b'* des Rohres *H* noch ein rechtwinklig gebogenes

1) Dieselben wurden der Hauptsache nach schon im März dieses Jahres in den in Genf erscheinenden „*Archives des sciences physiques et naturelles*“ mitgetheilt.

Digitized by Google

Gasleitungsrohr *g* und *g'* ein nach unten verjüngtes Glasrohr *a* und *a'* und die aus dickem Eisendrahte bestehende Elektrode *e* und *e'* gesteckt waren.

Bei Beginn des Versuches wurden die beiden sorgfältig getrockneten Cylinder *A* und *A'* etwa bis zur Hälfte mit reinem warmem Quecksilber gefüllt. Der Heber *H* wurde hierauf ebenfalls durch Aufsaugen des Quecksilbers vermittelst einer mit *G* verbundenen Luftpumpe völlig blasenfrei angefüllt und der Hahn geschlossen. Nachdem nun die in dem oberen Theile von *A* und *A'* befindliche Luft durch Wasserstoff ersetzt worden war, welcher durch die auf *a* und *a'* aufgesetzten Knieröhren *p* und *p'* in der Richtung der Pfeile durch den Apparat geleitet wurde, wurden durch die Trichter *a* und *a' gleiche* abgewogene Mengen gepulvertes Natriumamalgam in das Quecksilber eines jeden Gefäſses eingeworfen.

Nach erfolgter Lösung des Amalgames in dem Quecksilber, und nachdem dasselbe in dem Heber bis etwa zu den beiden unteren Biegungen vorgedrungen war, was sich leicht aus der eintretenden Trübung des Quecksilbers zu erkennen gab, wurden die beiden Elektroden mit den Polen der galvanischen Batterie in Verbindung gebracht.

Wo es nicht besonders angegeben ist, war die Batterie stets aus kräftigen Bunsen'schen Elementen zusammengesetzt. Nach Unterbrechung des Stromes wurde der Hahn *G* geöffnet, so daſs der Inhalt des Hebers zu gleichen Theilen in die beiden Gefäſse herabfiel. Hatte der Strom in der That eine Ueberführung von Natrium zu einer der beiden Elektroden bewirkt, so muſsten sich nach Beendigung des Versuches *verschiedene* Mengen dieses Metalles in den beiden Glascylindern vorfinden. Zur Prüfung dieser Verhältnisse wurde der Inhalt eines jeden Gefäſses gesondert in ein kleines Digerirkölbchen Fig. 2, Taf. III gebracht, das hierauf mit ausgekochtem Wasser angefüllt wurde. Dasselbe wurde rasch mit einem Stöpsel verschlossen, durch den ein dünnes, in das Rohr eines Glastrichters eingekittetes Glasrohr gesteckt war. In den

Digitized by Google

Glastrichter wurde ebenfalls Wasser gegossen und darin ein graduirter Glascylinder über die Rohrmündung gestülpt.

Die Wasserstoffentwickelung wurde durch Zusatz von etwas Essigsäure zu dem Sperrwasser des Trichters beschleunigt, und durch mehrmaliges starkes Kochen zu Ende geführt. Durch letzteres konnten schliefslich auch die kleinen Gasblasen, welche sich unter dem Korke angesammelt hatten, in den Mefscylinder getrieben werden. Das Volumen des entwickelten Wasserstoffgases giebt ein Maafs für die in der betreffenden Quecksilbermasse vorhandene Natriummenge. Die zwei zu vergleichenden Wasserstoffvolumina wurden stets unter gleichem Drucke und bei gleicher Temperatur gemessen.

Es entsprechen somit gleichen Wasserstoffmengen gleiche Gewichte Natrium.

1. Versuch.

In jedes Gefäfs wurde 1 Grm. Natrium-Amalgam eingetragen und der Strom von 6 Elementen $2\frac{1}{2}$ Stunden hindurchgeleitet.

Es ergaben sich folgende Wasserstoffvolumina:

a) an der positiven Elektrode H = 10,4 CC.
b) an der negativen Elektrode H = 10,0 CC.

Differenz = + 0,4 CC.

2. Versuch.

In dem Quecksilber eines jeden der beiden Gefäfse wurden 2,5 Grm. Natrium-Amalgam gelöst und der Strom von 6 Elementen 4 Stunden durchgesandt, es ergab sich:

a) an der positiven Elektrode H = 26,25 CC.
b) an der negativen Elektrode H = 26,25 CC.

Differenz = ± 0,00 CC.

Analoge Resultate ergaben andere auf gleiche Weise ausgeführte Versuche.

3. Versuch.

Bei diesem Versuche waren zwei V-förmig gebogene Glasröhren durch ein circa 4 Ctm. langes Stück schwar-

Digitized by Google

zen Kautschukschlauch so mit einander verbunden, dafs sie zusammen ein W-Rohr bildeten. Letzteres wurde mit trockenem Quecksilber gefüllt, in welchem so viel festes Natriumamalgam gelöst wurde, dafs dasselbe noch eben flüssig blieb. Die beiden Enden des Rohres waren durch Korke luftdicht geschlossen, welche direct auf dem Amalgame ruhten, und durch welche die, ebenfalls aus dicken Eisendrähten bestehenden, Elektroden gesteckt waren.

Um das Amalgam in dem Quecksilber des Rohres möglichst gleichmäfsig zu vertheilen, wurde letzteres etwa während 14 Tagen in den verschiedensten Lagen aufgestellt und von Zeit zu Zeit geschüttelt.

Nachdem der Strom von 12 passend gruppirten Elementen[1]) 2 Stunden durch den Inhalt der so vorgerichteten Röhre geleitet worden war, wurde derselbe dadurch unterbrochen, dafs durch einen auf die Mitte des Kautschukrohres aufgesetzten Quetschhahn das Amalgam in zwei möglichst gleiche Theile getheilt wurde. Jede dieser Hälften wurde wie die Gefäfsinhalte der zwei vorhergehenden Versuche behandelt.

Bei diesem Versuche können die sich ergebenden Wasserstoffquanta im Allgemeinen nicht gleich ausfallen, da es nicht möglich ist, den Rohrinhalt auf die angegebene Weise in zwei genau gleiche Theile zu theilen; dagegen müssen für den Fall, dafs keine Ueberführung von Natrium erfolgt ist, die auf gleiche Gewichtsmengen rückbleibendes Quecksilber berechneten Gasmengen einander gleich seyn.

Das Resultat der Versuche war folgendes:

a) Positive Elektrode.	b) Negative Elektrode.
H = 74 CC.	H = 72 CC.
auf 111,25 Gr. Quecksilber.	auf 107,79 Gr. Quecksilber.

1) Es sey hier bemerkt, dafs bei allen Versuchen aus dem bekannten Widerstande der verwendeten Elemente, und dem in jedem einzelnen Falle gemessenen Widerstande des Schliefsungskreises diejenige Combination der Elemente berechnet wurde, welche bei gegebener Anzahl derselben das Maximum der Stromstärke lieferte.

Digitized by Google

Auf 100 Gr. rückbleibendes Quecksilber berechnet, ergaben sich somit:

a) an der positiven Elektrode H = 66,5 CC.
b) an der negativen Elektrode H = 66,7 CC.
Differenz = — 0,2 CC.

II. Versuche über die Elektrolyse von Legirungen.

Legirung aus Kalium und Natrium.

Diese nach der Vorschrift von Rudolph Wagner[1]) durch Zusammenschmelzen von vier Gewichtstheilen Kalium und 2,5 Gewichtstheilen Natrium unter Steinöl dargestellte Legirung ist bekanntlich bei gewöhnlicher Temperatur flüssig wie Quecksilber.

Sie wurde unter Steinöl in ein W-Rohr gegossen, in dessen Schenkel zwei dicke Kupferdrähte als Elektroden eingesenkt wurden.

Die Einwirkung des Stromes auf diese Legirung erfolgte stets bei gewöhnlicher Temperatur zwischen 14 und 24° C.

Das Resultat war folgendes:

Mochte man:

1. den Strom eines Daniell'schen Elementes 15 Stunden, oder
2. den Strom von 2 kräftigen Bunsen'schen Elementen 5 Stunden, oder
3. den Strom von 6 Bunsen'schen Elementen ½ Stunde oder endlich
4. den Strom von 12 Bunsen'schen Elementen zwei Stunden hindurchleiten,

die Legirung blieb ebenso flüssig, wie vorher. In diesem letzteren Falle war der Strom so stark, dafs er, was sich an einer eingeschalteten Tangentenboussole entnehmen liefs, während seiner zweistündigen Einwirkungsdauer 29 Gr. Kupfer niederzuschlagen vermocht hätte.

1) Wagner, Journ. für prakt. Chem. Bd. LV, S. 489.

Digitized by Google

Zinnbleilegirungen.

Die zu diesen Versuchen verwendeten Zinnbleilegirungen waren nach zwei verschiedenen Verhältnissen zusammengesetzt. Die eine Legirung entsprach der Formel Sn Pb, dieselbe steht in ihrer Zusammensetzung dem sogen. „starken Schnelllothe“ nahe. Die zweite bestand aus 3 Aequivalenten Zinn und 1 Aequivalent Blei, hatte also die Formel Sn_3 Pb, sie ist von ähnlicher Zusammensetzung wie das sogenannte „schwache Schnellloth“.

Die Legirung Sn_3 Pb schmilzt bei etwa 189° C. und hat bei 187° einen *einzigen* Erstarrungspunkt. Durch diese letzt' genannte Eigenschaft zeichnet sich diese Legirung von allen anderen Bleizinnlegirungen aus und kann aus diesem Grunde mit mehr Recht als die übrigen als eine bestimmte chemische Verbindung gelten. Dies war auch der Grund, warum gerade diese Legirung vorzugsweise zu diesen Versuchen verwendet wurde.

Die angewandten Metalle waren die reinsten im Handel zu erhaltenden, sie waren jedoch nicht chemisch rein, sondern enthielten noch ungefähr 0,2 Proc. fremde Bestandtheile.

Bei den Analysen wurde das Zinn als Zinnoxyd, das Blei als schwefelsaures Salz bestimmt. Da sich die Zinnbleilegirungen beim Schmelzen an der Luft sehr leicht oxydiren, so war es zur Erlangung zuverlässiger Resultate unumgänglich nöthig, das geschmolzene Metallgemisch vor Luftzutritt zu schützen.

5. Versuch.

Gleiche Aequivalente Zinn und Blei wurden in einer V-Röhre über einer breiten Gaslampe zum Schmelzen gebracht. Die beiden Schenkel des Rohres waren durch Korke verschlossen, durch welche die aus Eisendraht bestehenden Elektroden gesteckt waren, und welche aufserdem noch eine feine Bohrung besafsen um, die Ausdehnung der Luft zu gestatten. Durch diese Korke war

Digitized by Google

zwar der Luftzutritt und demzufolge die Oxydation nicht ganz gehindert, aber doch bedeutend vermindert.

Die beiden Elektroden wurden nach erfolgter Schmelzung mit den Polen zweier Bunsen'scher Elemente verbunden. Der Strom derselben wurde etwa $\frac{1}{2}$ Stunde durch das Metallgemisch geleitet und derselbe erst nach völligem Erstarren der Legirung unterbrochen.

Nach dem Erkalten wurde die Röhre zerschlagen und die den Elektroden zunächst liegenden Theile der Legirung der Analyse unterworfen, wobei sich nachstehendes Resultat herausstellte:

a) an der positiven Elektrode Sn = 37,3 Proc.
b) an der negativen Elektrode Sn = 36,3 Proc.
Differenz = + 1,0.

Die der positiven Elektrode anliegenden Theile der Legirung waren etwas härter als die an der negativen befindlichen.

6. Versuch.

Die beiden Metalle wurden gleichfalls nach der Formel Sn Pb in einem eisernen Schmelzlöffel zusammengeschmolzen und hierauf in eine W-förmig gebogene Glasröhre gegossen. Letztere war in einem Sandbade etwa 10 bis 15° über den Schmelzpunkt der Legirung erhitzt und wurde während der Dauer des Versuches auf dieser Temperatur erhalten. Zur Verhinderung der Oxydation wurde ein continuirlicher Strom trockenes Wasserstoffgas über die Oberfläche der Legirung geleitet. Die Elektroden, welche wie beim vorigen Versuche aus Eisendraht bestanden, wurden etwa während $\frac{3}{4}$ Stunden mit den Polen einer 6-elementigen Batterie verbunden. Die Unterbrechung des Stromes erfolgte wiederum erst nach dem Erstarren der Legirung. Nach dem Erkalten wurde die Röhre zerschlagen und der Metallkern in der Mitte zersägt. Jede Hälfte wurde für sich unter Wasserstoff in einem Porzellantiegel unter beständigem Umrühren zusammengeschmolzen

Digitized by Google

und ein Theil derselben zur Analyse verwandt, welche folgendes Resultat ergab:

	a) an der positiven Elektrode.	b) an der negativen Elektrode.	Diff.
Sn	37,81 Proc.	39,02 Proc.	— 1,21
Pb	61,46 Proc.	60,38 Proc.	+ 1,08
	99,27	99,40	

Zwischen den beiden Theilen der Legirung konnte kein Unterschied in Bezug auf Härte oder Hämmerbarkeit wahrgenommen werden.

7. Versuch.

Zinn und Blei wurden nach der Formel Sn_3Pb in einer Thonpfeife unter einer Decke von Colophonium zusammengeschmolzen und die flüssige Legirung durch das Pfeifenrohr in eine W-Röhre gegossen, welche in einem Oelbade auf 210° erhitzt war. Hierbei war sorgfältig darauf zu achten, dafs kein Colophonium in das Innere der Röhre gelangte, da sonst entweder dieses selbst, oder gasförmige Zersetzungsproducte desselben in die mittlere Biegung des Rohres emporstiegen und daselbst eine Trennung des Metalles bewirkten. War dieser Umstand eingetreten, so gelang es nicht mehr, den Metallfaden während der Dauer des Versuches zusammenhängend zu erhalten.

Der Strom von 6 Bunsen'schen Elementen wurde $2\frac{1}{2}$ Stunden durch das Metallgemisch geleitet.

Während der Dauer des Versuches war die Oxydation durch eine Schicht geschmolzenes Colophonium verhindert.

Nach Schlufs des Versuches wurden die beiden Hälften jede für sich unter Colophonium umgeschmolzen und hierauf analysirt.

Es ergab sich:

	a) an der positiven Elektrode.	b) an der negativen Elektrode.	Diff.
Sn	64,03 Proc.	65,72 Proc.	— 1,69
Pb	35,34 Proc.	33,89 Proc.	+ 1,45
	99,37	99,61	

Digitized by Google

Ein Unterschied in der Härte der beiden Theile war nicht mit Sicherheit constatirbar.

8. Versuch.

Die Legirung $Sn_3 Pb$ wurde wie beim vorigen Versuche dargestellt und in 4 W-Röhren gegossen, die in einem und demselben Oelbade auf 220° C. erhitzt und während der Dauer des Versuches auf dieser Temperatur erhalten wurden. Die 4 Röhren hatten alle dieselbe Länge, dagegen war der Durchmesser von zweien derselben doppelt so grofs als derjenige der beiden anderen. Sie waren durch starke Eisendrähte so mit einander verbunden, dafs der Strom einer aus 12 Elementen aufgebauten Batterie dieselben nach einander durchfloſs. Der Durchgang des Stromes dauerte 2 Stunden.

Nach dem Erkalten wurde jeder der 4 Metallkerne in der Mitte zerschnitten, jeder Theil für sich unter Colophonium umgeschmolzen und hierauf analysirt.

Die Analysen ergaben:

Röhrenpaar *A*.

Jede der beiden Röhren enthielt 70 Gr. Legirung.

1. Röhre.

	a) an der positiven Elektrode.	b) an der negativen Elektrode.	Diff.
Sn	63,66 Proc.	63,60 Proc.	+ 0,06
Pb	35,29 Proc.	35,62 Proc.	— 0,33
	98,95	99,22	

2. Röhre.

	a) an der positiven Elektrode.	b) an der negativen Elektrode.	Diff.
Sn	63,28 Prco.	64,24 Proc.	— 0,96
Pb	36,46 Proc.	35,24 Proc.	+ 1,22
	99,74	99,48	

Röhrenpaar *B*.

Jede Röhre enthielt 35 Gr. Legirung.

Digitized by Google

3. Röhre.

	a) an der positiven Elektrode.	b) an der negativen Elektrode.	Diff.
Sn	63,58 Proc.	64,60 Proc.	— 1,02
Pb	35,91 Proc.	34,86 Proc.	+ 1,05
	99,49	99,46	

4. Röhre.

	a) an der positiven Elektrode.	b) an der negativen Elektrode.	Diff.
Sn	63,79 Proc.	63,73 Proc.	+ 0,06
Pb	35,82 Proc.	34,89 Proc.	+ 0,93
	99,61	98,62	

Bei keiner der 4 Röhren war die geringste Differenz zwischen den beiden Theilen der Legirung in Bezug auf Härte oder Hämmerbarkeit zu bemerken.

Sollte dem Strome in der That eine elektrolytische Wirkung zukommen, so mufste nothwendig die Menge des nach einer bestimmten Richtung transportirten Metalles bei allen 4 Röhren dieselbe seyn; der *procentische* Zuwachs an diesem Metalle mufste somit bei dem weiteren Rohrpaare (*A*) nur halb so grofs ausfallen, als bei dem engeren (*B*), er mufste dagegen bei Röhren von gleichem Durchmesser derselbe seyn.

Demnach läfst dieser Versuch mit Sicherheit erkennen, dafs die Differenzen in der Zusammensetzung der beiden Hälften einer und derselben Röhre, welche die Analysen bisher stets zeigten, in zufälligen Umständen ihren Grund haben.

9. Versuch.

Drei kleine circa 15 Ctm. lange und 3^{mm} weite W-Röhren wurden mit der Legirung Sn_3Pb gefüllt, und dieselbe durch eine Colophoniumdecke vor Oxydation geschützt.

Die Elektroden bestanden aus dünnen Stäbchen von Gaskohle. Die kleinen Dimensionen der jetzt verwendeten Elektrolysenröhren boten, gegenüber den bisher verwende-

Digitized by Google

ten, einen doppelten Vortheil dar. Einmal konnte in diesem Falle die ganze Menge der Legirung, welche der Einwirkung des Stromes ausgesetzt war, der Analyse unterworfen werden, wodurch man von etwaigen zufälligen Ungleichheiten in ihrer Zusammensetzung unabhängig war, dann mufste bei den geringen Mengen der dem Versuche unterworfenen Legirung für den Fall, dafs der Strom bei gleicher Stärke und Wirkungsdauer wie bisher, auch die gleiche Metallmenge transportiren sollte, die Aenderung in der Zusammensetzung der an den beiden Polen befindlichen Legirung weit beträchtlicher ausfallen, als bei den früheren Versuchen.

Die 3 Röhren wurden alle in demselben Oelbade auf 240° C. erhitzt, jedoch waren nur 2 derselben in den Kreis einer 12elementigen Batterie eingeschaltet, deren Strom 2 Stunden durch die Legirung geleitet wurde. Die dritte, aufserhalb des Stromkreises bleibende Röhre, diente dazu, zu untersuchen, ob nicht schon bei lange andauerndem Schmelzen an und für sich Ungleichheiten in der Zusammensetzung der Legirung eintreten.

Als Resultat ergaben die Analysen folgende Zahlen:

1. Röhre.

Dieselbe blieb aufserhalb des Stromkreises und enthielt 6,330 Gr. Legirung.

	1. Hälfte.	2. Hälfte.	Diff.
Sn	64,73 Proc.	64,37 Proc.	0,36
Pb	34,75 Proc.	35,00 Proc.	0,25
	99,48	99,37	

2. Röhre.

Sie war wie die folgende von dem Strome durchflossen, sie enthielt 5,650 Gr. Legirung.

	a) an der positiven Elektrode.	b) an der negativen Elektrode.	Diff.
Sn	64,54 Proc.	64,79 Proc.	— 0,25
Pb	34,44 Proc.	34,63 Proc.	— 0,19
	98,98	99,42	

Digitized by Google

3. Röhre.

Enthielt 7,088 Gr. Legirung.

	a) an der positiven Elektrode.	b) an der negativen Elektrode.	Diff.
Sn	66,00 Proc.	64,53 Proc.	+ 1,47
Pb	33,27 Proc.	35,08 Proc.	— 1,81
	99,27	99,61	

Zu dieser Analyse ist zu bemerken, dafs der etwas höhere Zinngehalt, welcher an der positiven Elektrode gefunden wurde, leicht daher rühren kann, dafs bei der Bestimmung des Zinnes als SnO_2 dem letzteren noch etwas salpetersaures Blei beigemengt war, da bei diesen grofsen Mengen Substanz (über 7 Gr.), welche zu der Analyse verwendet werden mufsten, die Niederschläge sich sehr schwierig vollständig auswaschen liefsen.

In der Härte und Hämmerbarkeit konnte bei keiner der 4 Röhren eine Verschiedenheit wahrgenommen werden.

10. Versuch.

Die beiden Metalle wurden nach der Formel $Sn_3 Pb$ unter Colop.onium zusammengeschmolzen und hierauf in die Elektrolysenröhren gegossen. Diese bestanden wie Fig. 3, Taf. III zeigt, aus engen, W-förmig gebogenen Glasröhren *aca'* von circa 120^{mm} Länge und 3^{mm} lichter Weite, an deren Enden weitere Rohrstücke *ab* und *a'b'* angeschmolzen waren, deren jedes mit einem seitlich angeblasenen Gasleitungsrohre *g* und *g'* versehen war und aufserdem bei *o* und *o'* eine feine Oeffnung besafs. Auf die bei *l* und *l'* etwas erweiterten Röhren waren Korke aufgesetzt und durch dieselben die aus etwa 6^{mm} dicken cylindrischen Kohlenstäben bestehenden Elektroden *e* und *e'* gesteckt, so dafs dieselben bis nahe an die Ansatzstellen *a* und *a'* der engen W-Röhre herabreichten. Auf diese Weise blieb nur ein enger ringförmiger Raum zwischen Kohle und Glaswand übrig, der zu seiner Ausfüllung nur wenig Legirung bedurfte, so dafs auch hier wiederum der ganze Rohrinhalt der Analyse unterworfen werden konnte.

Digitized by Google

Durch die beiden Gasleitungsröhren *g* und *g'* wurde ein beständiger Strom trockene Kohlensäure über die Oberfläche der geschmolzenen Legirung geleitet, welche durch die Oeffnungen *o* und *o'* entweichen konnte.

Die Kohlenelektroden hatten vor den bei den früheren Versuchen benutzten Metallelektroden den grofsen Vorzug, dafs sie sich nach Beendigung des Versuches aus der geschmolzenen Legirung herausnehmen liefsen, ohne dafs die geringste Menge derselben daran haften blieb. Die gewählte Form der Elektrolysenröhre gestattete die Anwendung stärkerer Kohlenstäbe als beim letzten Versuche, die in Folge dessen besser leitend und weniger leicht zerbrechlich waren, ohne dafs man jedoch genöthigt gewesen wäre gröfsere Mengen Legirung zur Füllung der Röhre zu verwenden.

Der Kohlensäure wurde als Schutzmittel gegen Oxydation vor dem bisher gebrauchten Colophonium deshalb der Vorzug gegeben, weil sich gezeigt hatte, dafs die Kohlenelektroden sich nach und nach mit dem geschmolzenen Colophonium vollsaugen, wodurch sie schlechter leitend werden und ihr Contact mit dem geschmolzenen Metalle ein mangelhafter wird.

Zwei so vorgerichtete Röhren, die im Oelbade auf 200° C. erhitzt waren, wurden in den Schliefsungskreis einer aus 12 Zellen bestehenden Batterie während zwei Stunden eingeschaltet. Die nach dem Erkalten ausgeführte Analyse ergab für die

1. Röhre

enthaltend 12,169 Gr. Sn_3Pb.

	a) an der positiven Elektrode.	b) an der negativen Elektrode.	Diff.
Sn	64,98 Proc.	65,09 Proc.	— 0,11
Pb	34,30 Proc.	34,35 Proc.	— 0,05
	99,28	99,44	

Digitized by Google

2. Röhre

enthaltend 12,359 Gr. Sn_3Pb.

	a) an der positiven Elektrode.	b) an der negativen Elektrode.	Diff.
Sn	64,48 Proc.	65,14 Proc.	— 0,66
Pb	35,12 Proc.	34,42 Proc.	+ 0,70
	99,60	99,56	

Bei keiner der beiden Röhren unterschieden sich die beiden Theile der Legirung in ihrer Härte und Hämmerbarkeit.

Aus einer gleichzeitig in den Schliefsungskreis eingeschalteten Tangentenboussole ergab sich, dafs der Strom während seiner zweistündigen Wirkungsdauer 29 Gr. Kupfer niederzuschlagen vermocht hätte.

Um schliefslich kein Mittel unversucht zu lassen, eine etwa stattgehabte, wenn auch noch so geringe elektrolytische Wirkung des Stromes auf die Legirungen zu entdecken, wurde zuletzt noch die für diesen Zweck empfindlichste Probe angestellt und untersucht, ob sich nach dem Durchleiten des Stromes durch die geschmolzene Legirung etwa eine Polarisation der Elektroden kundgeben würde.

Zu dem Ende wurde eine, wie im letzten Versuche beschrieben vorbereitete W-Röhre, die mit der Legirung Sn_3Pb gefüllt war, in einem Oelbade auf 240° C. erhitzt und während der Dauer des Versuches genau auf dieser Temperatur erhalten. Es waren besondere Vorkehrungen getroffen, um einseitige Erhitzungen oder Abkühlungen der einzelnen Theile des Stromkreises möglichst zu vermeiden, da die hierdurch entstehenden Thermoströme sehr störend auf die Beobachtungen einwirken.

Als die beiden Kohlenelektroden der W-Röhre mit einem empfindlichen Spiegelgalvanometer in Verbindung gesetzt wurden, zeigte sich das Vorhandensein eines nur sehr schwachen Thermostromes an, welcher eine Ablenkung von 2^{mm} verursachte.

Digitized by Google

Nachdem sich durch zeitweise Beobachtung dieses Thermostromes herausgestellt hatte, dafs derselbe constant blieb, die Temperaturverhältnisse somit stationär geworden waren, wurden die Elektroden mit den Polen von 6 Bunsen'schen Elementen verbunden. Während der Dauer von $3\frac{1}{2}$ Stunden wurde von halber Stunde zu halber Stunde die Verbindung der Elektroden mit der Batterie auf einige Augenblicke gelöst und dieselben mit dem Galvanometer verbunden. Es ergab sich in allen Fällen der gleiche Ausschlag von 2^{mm} wie vor Durchgang des Stromes, woraus mit Sicherheit hervorgeht, dafs kein Polarisationsstrom vorhanden war.

Fassen wir die Resultate, zu welchen diese Untersuchungen geführt haben, noch einmal kurz zusammen, so geht aus denselben innerhalb der Gränzen der angewendeten Hülfsmittel folgendes hervor:

1) *Der galvanische Strom bringt weder in den Amalgamen, noch in den geschmolzenen Legirungen eine elektrolytische Trennung der Bestandtheile hervor.*
2) *Natriumamalgam zersetzt, nachdem es vom Strome durchflossen war, an beiden Polen Wasser wie zuvor.*
3) *Die Wirkung des Stromes ändert weder die Härte und Hämmerbarkeit der Zinnbleilegirungen, noch den flüssigen Zustand der Kaliumnatriumlegirung. Sie bringt in der chemischen Zusammensetzung der Legirung in der Nähe der Elektroden keinerlei Aenderungen hervor, welche die Versuchs- und Analysenfehler überschreiten.*

Während es also bisher noch nicht gelungen ist nachzuweisen, dafs bei dem Durchgange des Stromes durch die verhältnifsmäfsig schlecht leitenden Elektrolyte, wie z. B. Wasser, Salzlösungen usw., ein Theil desselben metallisch, d. h. ohne eine Zersetzung zu bewirken die Elektrolyte durchfliefst, läfst sich umgekehrt bei den gut leitenden Legirungen, bei denen man vermuthen könnte

Digitized by Google

dafs neben der metallischen Leitung des gröfsten Theiles des Stromes, doch noch ein kleiner Antheil desselben die Legirungen elektrolytisch zersetzen könnte, eine solche Zersetzung ebenfalls nicht nachweisen.

Da die Resultate, zu welchen die vorliegenden Untersuchungen geführt haben, in allen Punkten denjenigen entgegengesetzt sind, welche Hr. Gerardin erhalten hat, und die zu Anfang dieser Abhandlung mitgetheilt sind, so erlaube ich mir zum Schlusse noch einige Beobachtungen zu erwähnen, welche im Verlaufe dieser Untersuchungen gemacht worden sind, und aus welchen ohne eingehendere Prüfung Resultate abgeleitet werden könnten, ähnlich denjenigen, welche Hr. Gerardin erhalten hat.

Bei Gelegenheit der Bestimmung des in dem Quecksilber gelösten Natriums aus dem Volumen des entwickelten Wasserstoffgases wurde mehrere Male ein eigenthümlicher Unterschied zwischen den von beiden Elektroden stammenden Amalgamtheilen beobachtet. Während nämlich bei dem einen Theile die Wasserstoffentwickelung schon ziemlich weit fortgeschritten war, war dieselbe bei dem anderen oft kaum merkbar eingetreten, so dafs es auf den ersten Blick den Anschein hatte, als ob in dem einen Quecksilber keine oder doch nur geringe Mengen Natrium noch vorhanden seyen. Dafs dies jedoch nicht der Fall war, ging daraus hervor, dafs sich nach Beendigung der Reaction aus beiden Amalgampartien genau gleiche Mengen Wasserstoffgas entwickelten.

Diese Erscheinung hatte mit der Wirkung des Stromes durchaus nichts zu thun, was daraus hervorgeht, dafs bald der Amalgamtheil der positiven, bald derjenige der negativen Elektrode die trägere Wasserstoffentwickelung zeigte. Sie erklärt sich wohl daraus, dafs sich die Oberfläche des Amalgames mit einer Gasschichte überzieht, welche die Berührung des Wassers mit dem Amalgame mehr oder weniger aufhebt, was natürlich eine Verringerung der Wasserstoffentbindung zur Folge haben mufs.

Digitized by Google

Eine weitere hier zu erwähnende Beobachtung ist folgende:

Bei den 3 ersten Versuchen, welche über die Elektrolyse des Natriumamalgames vorgenommen wurden, ergab sich übereinstimmend, dafs durch das Amalgam der negativen Elektrode beträchtlich mehr Wasserstoff entbunden wurde, als durch das der positiven, so dafs also ersteres zweifellos natriumreicher als letzteres seyn mufste. Auf den ersten Blick könnte dies als ein Beweis dafür gelten, dafs in der That eine Ueberführung von Natrium zum negativen Pole stattgefunden habe.

Dafs jedoch eine solche elektrolytische Wirkung nicht vorliegen konnte, ging daraus hervor, dafs die Differenzen in den Wasserstoffquanten untereinander bei den drei Versuchen bedeutende Abweichungen zeigten, obgleich diese Versuche alle unter sonst gleichen äufseren Umständen ausgeführt wurden. Es lag vielmehr die Vermuthung nahe, dafs man es mit irgend einem constant begangenen Versuchsfehler zu thun habe.

Bei diesen drei Versuchen wurde das feste Amalgam in Quecksilber gelöst, welches in einem gut verstöpselten Digerirkölbchen enthalten war. Die so erhaltene Lösung wurde zu gleichen Theilen in die beiden, durch einen mit Quecksilber gefüllten Heber verbundenen Elektrolysengefäfse gegossen.

Durch Zufall wurde bei allen drei Versuchen das positive Gefäfs stets vor dem negativen mit der Amalgamlösung gefüllt. Da sich nun bei genauerer Untersuchung herausstellte, dafs das zuerst aus dem Kölbchen Ausgegossene stets ärmer an Natrium war, als das Nachfolgende, so war hiermit das Räthsel gelöst.

Auch bei den Zinnbleilegirungen wurde in einem Falle ein den Gerardin'schen Beobachtungen ähnliches Resultat erhalten, nämlich bei dem sub No. 5 mitgetheilten Versuche. Bei demselben gab sich in der That ein kleiner Härteunterschied zwischen den an den beiden Elektroden befindlichen Theilen der Legirung zu erkennen.

Digitized by Google

Ein Vergleich dieses Versuches mit den übrigen, über Zinnbleilegirungen mitgetheilten, zeigt jedoch, dafs gerade er unter allen am rohesten ausgeführt wurde. Durch das Erhitzen der Elektrolysenröhre über freiem Feuer ist es nicht möglich, alle Stellen derselben auf gleicher Temperatur zu halten und besonders bei dem allmähligen Erkalten der Legirung über der nach und nach kleiner gedrehten Gaslampe, waren Ungleichheiten in den Abkühlungsverhältnissen unvermeidlich.

Dafs der beobachtete Härteunterschied in der That durch physikalische und nicht durch chemische Ursachen herbeigeführt war, geht aus den bei Versuch 5 mitgetheilten Analysen hervor, welche in dem Zinngehalte der beiden Legirungstheile eine so kleine Differenz aufweisen dafs dieselbe zu der Erklärung des beobachteten Härteunterschiedes nicht ausreicht.

Amalgamation von Blei unter der Einwirkung des galvanischen Stromes.

Dieser Versuch wurde im Anschlufs an die soeben mitgetheilten Experimente unternommen, um zu untersuchen, ob der galvanische Strom auf den Amalgamationsprocefs der Metalle von merkbarem Einflusse ist oder nicht.

Zu dem Ende wurde eine weite U-förmig gebogene Glasröhre etwa zu $\frac{3}{4}$ mit Quecksilber gefüllt. Jeder Schenkel der Röhre war durch einen Kork verschlossen, durch welchen ein cylindrischer Bleistab gesteckt war. Die beiden Bleistäbe, welche aus einem und demselben Gusse und von gleichen Dimensionen waren, tauchten gleich tief in das Quecksilber ein. Sie wurden mit den beiden Polen einer aus 6 Elementen bestehenden Batterie 4 Stunden lang in Verbindung gesetzt. Jede halbe Stunde wurden die beiden Bleielektroden untersucht, dieselben zeigten sich stets vollkommen gleich angegriffen und die Amalgamirung war bei beiden gleich weit über die Oberfläche des Quecksilbers fortgeschritten, woraus hervorgeht, ***dafs der galvanische Strom auf den Amalgamationsprocefs der Metalle ohne Einfluſs ist.***

Digitized by Google

Ueber die Natur der bei der Amalgamation der Metalle auftretenden elektrischen Ströme.

Nach einer Beobachtung, welche Ludwig Moser[1]) vor mehr als 30 Jahren gemacht hat, und die, soviel mir bekannt, seitdem nicht wiederholt worden ist, entstehen bei der Amalgamation der Metalle elektrische Ströme.

Diese Ströme verdanken nach der Ansicht ihres Entdeckers der chemischen Vereinigung des Metalles mit dem Quecksilber ihre Entstehung und sind demselben ein Beweis dafür, dafs auch bei der chemischen Verbindung zweier einfacher Körper Elektricität in Freiheit gesetzt wird.

Die Amalgamationsströme würden somit, insofern ihr chemischer Ursprung mit Sicherheit nachgewiesen wäre, einen Hauptstützpunkt für die von Becquerel aufgestellte chemische Theorie der Elektricitätserregung gegenüber der von Matteucci vertheidigten abgeben.

Nach Becquerel ist bekanntlich jeder chemische Vorgang von der Entstehung eines elektrischen Stromes begleitet, während nach der Ansicht Matteucci's bei einem chemischen Vorgange nur dann Elektricitätsentwickelung eintreten kann, wenn ein durch den Strom zerlegbarer Körper zugegen ist.

Eine Wiederholung der Moser'schen Versuche ist jedoch mit Recht von Wiedemann für wünschenswerth erklärt worden[2]); indem er darauf aufmerksam macht, dafs die Temperaturänderungen, von welchen die Amalgamationsprocesse stets begleitet sind, sehr leicht Veranlassung zur Entstehung von Thermoströmen zwischen dem sich amalgamirenden Metalle und dem Quecksilber geben können.

Zur Entscheidung der Frage, ob die Amalgamations-

1) Moser, Dove's Repertor. Bd. II, S. 117, 1838, und Wiedemann, Galvanismus Bd. I, S. 790; vergl. ferner einen Brief von Dulk an Poggendorff, Pogg. Ann. XLII, S. 91, 1837.

2) Wiedemann a. a. O.

Digitized by Google

ströme chemischen oder thermischen Ursprunges sind, habe ich dieselben einer eingehenderen experimentellen Untersuchung unterworfen, welche in dem chemisch-physikalischen Laboratorium des Hrn. Prof. Wiedemann zu Leipzig begonnen und in dem Laboratorium von Siemens und Halske in Berlin, mit gütiger Erlaubnifs des Hrn. Dr. Werner Siemens beendet wurde.

Da die Intensität der Amalgamationsströme, wie dies schon von Moser angegeben wird, eine äufserst geringe ist, so sind zu ihrer Beobachtung die empfindlichsten uns zu Gebote stehenden Instrumente erforderlich. Bei den vorliegenden Versuchen wurde ein sehr empfindliches Siemens'sches Spiegelgalvanometer benutzt. Der in dem cylindrischen Hohlraume einer stark dämpfenden Kupferkugel aufgehängte Glockenmagnet desselben war durch einen in der Nähe fest aufgestellten Magnetstab bis zu ziemlich hohem Grade astasirt. Seine Schwingungen waren vollkommen aperiodisch, so dafs sich die Messungen äufserst bequem vornehmen liefsen.

Die beiden Drahtrollen des Galvanometers waren so mit einander verbunden, dafs sie dem Strome einen möglichst geringen Widerstand, nämlich 3,04 S. E. darboten, da sich durch besondere Versuche diese Verbindungsweise als die geeignetste herausgestellt hatte. Die Entfernung der Scala von dem Galvanometerspiegel betrug etwa acht Meter.

Um zu ermitteln, ob der vermuthete Zusammenhang zwischen den Amalgamationsströmen und den bei der Amalgamation auftretenden Temperaturänderungen sich thatsächlich nachweisen läfst, wurde zugleich mit dem zu amalgamirenden Metalle ein aus Neusilber und Eisendraht bestehendes Thermoelement so in das Quecksilber getaucht, dafs dessen eine durch Firnifs isolirte Löthstelle federnd gegen den Metallstab angedrückt wurde, während die andere Löthstelle auf constanter Temperatur erhalten blieb.

Durch dieses Thermoelement konnten jederzeit die

Digitized by Google

Temperaturänderungen in der Nachbarschaft der sich amalgamirenden Metalle controlirt werden.

Einer Temperaturdifferenz der beiden Löthstellen des Thermoelementes von 3,0° C. entsprach eine Ablenkung von 136,5 Scalentheilen, hieraus ergiebt sich für 1mm Ablenkung eine Temperaturdifferenz von 0,02° C. Da halbe Scalentheile noch mit Sicherheit abgelesen werden konnten, so waren noch Aenderungen in der Temperatur der einen Löthstelle nachweisbar, welche nur 0,01° C. betrugen. Es ist bekannt, dafs die verschiedenen Metalle bei ihrer Auflösung in Quecksilber theils eine Erhöhung, theils eine Erniedrigung der Temperatur hervorbringen. Dies rührt daher, dafs der, bei der Amalgamation resultirende Wärmeeffect von zwei, zu gleicher Zeit, aber in entgegengesetztem Sinne wirkenden Wärmevorgängen abhängt, von denen, je nach der Natur des Metalles der eine oder der andere vorherrscht.

Diese beiden Wärmewirkungen sind einerseits eine Wärmeproduction, herrührend von der chemischen Vereinigung des Metalles mit dem Quecksilber und andererseits ein Wärmeverbrauch, der durch die Ueberführung des Metalles von dem festen in den flüssigen Aggregatzustand bedingt ist. So lösen sich z. B. Zink, Zinn und Blei unter Temperaturerniedrigung in Quecksilber, während Cadmium, Thallium, Kalium und Natrium bei ihrer Lösung eine Erhöhung der Temperatur hervorrufen.

Bei den vorliegenden Versuchen wurden Vertreter dieser beiden Gruppen untersucht.

Wenn die Amalgamationsströme in der That in thermischen Vorgängen ihren Grund haben, so läfst sich die Richtung derselben im Voraus in jedem speciellen Falle angeben, insofern der Sinn der Temperaturänderung, welche das betreffende Metall bei seiner Lösung in Quecksilber hervorbringt, und die Stellung desselben in der thermoelektrischen Spannungsreihe gegen Quecksilber bekannt sind.

Ein einziger einwurfsfrei angestellter Versuch, bei wel-

Digitized by Google

chem der beobachtete Amalgamationsstrom diese verlangte Richtung nicht hat, würde den unumstöfslichen Beweis liefern, dafs derselbe seinen Ursprung nicht in thermischen Wirkungen haben kann.

Damit jedoch die beobachtete Stromesrichtung selbst für den Fall, dafs die Amalgamationsströme thatsächlich nichts anderes als Thermoströme sind, mit der erforderten übereinstimme, ist folgender Umstand zu berücksichtigen.

Die Temperaturänderungen, welche in Folge des Amalgamationsprocesses in dem Quecksilber entstehen, dürfen sich nicht bis zu derjenigen Stelle erstrecken, an welcher der aus einem nicht amalgamirbaren Metalle bestehende Draht eintaucht, welcher dazu dient, das Quecksilber mit dem Galvanometer in Verbindung zu setzen.

Wäre dies der Fall, so würde an diesem Punkte ebenfalls ein Thermostrom entstehen, dessen Richtung und Stärke von der Natur des eingetauchten Metalldrahtes abhängt. Dieser Thermostrom könnte also unter Umständen dem Amalgamationsstrom entgegengesetzt gerichtet seyn, und denselben an Intensität übertreffen, wodurch dem bei der Amalgamation auftretende Strome scheinbar eine entgegengesetzte Richtung zukommen würde.

Aus diesem Grunde wurde bei den vorliegenden Versuchen die Amalgamation stets in dem einen Schenkel eines U-förmig gebogenen Glasrohres vorgenommen, in dessen anderem Schenkel das aus Platindraht bestehende Ende des Galvanometerdrahtes eingesenkt wurde.

Durch zahlreiche Vorversuche war ich ferner zu der Ueberzeugung gekommen, dafs es zur Erlangung zuverlässiger und übereinstimmender Resultate erforderlich ist, mit besonderer Sorgfalt darauf zu achten, dafs zwischen dem zu amalgamirenden Metalle und dem Quecksilber von Hause aus nicht der geringste Temperaturunterschied besteht, und dafs auch während der Dauer des Versuches an keiner Stelle des Schliefsungskreises eine, wenn auch noch so kleine zufällige Aenderung in der Temperatur eintreten kann.

Digitized by Google

Demzufolge wurde die Amalgamation in einem Apparate vorgenommen, welcher die in Fig. 4, Taf. III dargestellte Einrichtung besafs und der den gestellten Bedingungen in zufriedenstellender Weise genügte.

Ein Glascylinder *B* von 20 Ctm. Höhe und 14 Ctm. Durchmesser war an seinem einen Ende durch einen wasserdicht aufgekitteten Boden *C* aus Zinkblech geschlossen, in welchem drei mit kurzen Rohransätzen versehene Oeffnungen angebracht waren. In zwei dieser Oeffnungen waren die beiden Mündungen einer U-förmig gebogenen Glasröhre *acb* eingekittet, die aus einem weiteren Theile *ac* von 3,5 Ctm. Durchmesser und 8,5 Ctm. Länge und einem engeren *cb* von 7^{mm} Durchmesser bestand. In die dritte Oeffnung war eine, etwa 1 Ctm. weite Glasröhre *d* eingesetzt, welche bis an den oberen Rand von *B* heraufreichte, und die dazu bestimmt war, die Einführung eines Thermometers zwischen die beiden Schenkel *a* und *b* des U-Rohres zu ermöglichen. Das Gefäfs *B* war so auf einen gläsernen Standcylinder *A* aufgesetzt, dafs die Röhre *acb* in der Mitte derselben hing. Das Glasgefäfs *A*, welches lose mit Baumwolle ausgefüllt und durch ein Gewicht *g* beschwert war, stand seinerseits in einem geräumigen, mit Wasser gefüllten Glascylinder *G*, welcher durch einen passend ausgedrehten Deckel *D* bedeckt war.

In dem gefäfsartig erweiterten Theile *a* des U-Rohres wurde das zu untersuchende Metall mit dem Quecksilber in Berührung gebracht. Die nähere Einrichtung dieses Apparattheiles geht aus der, in Fig. 5, Taf. III, in gröfserem Maafsstabe ausgeführten Zeichnung hervor. Das Gefäfs *a* war durch einen Kautschukstöpsel *S* geschlossen, durch dessen Mitte der zu amalgamirende Metallstab *m* gesteckt wurde, an dessen oberem Ende 0 ein durch Guttapercha isolirter Kupferdraht 1 eingeschraubt war. Der Stab *m* war bis etwa 2 Cent. von seinem unteren Ende von einem Glasrohre umgeben und auf denselben ein kleiner Kork *k* aufgeschoben, durch welchen die beiden Drähte *u* und *v* des bereits erwähnten Thermoelementes geführt waren,

Digitized by Google

dessen Löthstelle bei *l* gegen das Metall ausgedrückt wurde.

Die Drähte *u* und *v* waren bei *s* und *t* mit den von Guttapercha umgebenen Leitungsdrähten 2 und 3 verlöthet.

Die Löthstellen *o*, *s* und *t* waren ebenfalls durch Guttapercha isolirt. Der Kork *k* paſste auf ein kleines fingerhutartiges Gefäſs *n*, welches an dem unteren gebogenen Ende eines dünnen Glasstabes *g* festgeschmolzen war, der in einem etwa 20 Cent. langen Glasrohre *p* auf und ab geschoben werden konnte. Durch diese Vorrichtung war man im Stande, das zu amalgamirende Metall, ehe es mit dem Quecksilber in Berührung gebracht wurde, ganz mit demselben zu umgeben, wodurch die gewünschte Temperaturgleichheit beider Metalle erzielt werden konnte.

Damit die durch die Amalgamation bedingten Aenderungen in der Temperatur der zu dem Versuche verwendeten Quecksilbermasse möglichst groſs, und in Folge dessen die resultirenden Thermoströme möglichst stark ausfallen, war in das Gefäſs *a* ein mit einer weiten Bohrung versehener Kork fest eingesteckt. Derselbe erwies sich zur Erreichung des vorgesetzten Zweckes in doppelter Weise vortheilhaft, erstens dadurch, daſs er als schlechter Wärmeleiter den Wärmeaustausch des Quecksilbers mit der Umgebung erschwerte und zweitens durch Verringerung der Quecksilbermasse, deren Temperatur zu ändern ist. Aus demselben Grunde war auch die U-Röhre *a c b* nicht direct in Wasser, sondern in einen von Wasser umgebenen Luftraum *A* eingetaucht.

Der Schenkel *b* endlich war ebenfalls durch einen Kork geschlossen (Fig. 4), durch welchen ein in eine Glasröhre eingeschmolzener Platindraht gesteckt war, dessen unteres Ende spiralförmig aufgerollt, dessen oberes dagegen bei *w* mit einem Kupferdrahte 4 verlöthet war. Draht und Löthstelle waren durch Guttapercha isolirt.

Bei den Versuchen selbst wurde zunächst die Röhre *a c b* so weit mit Quecksilber gefüllt, daſs dasselbe etwas

Digitized by Google

über den oberen Rand des kleinen Gefäfses *n* reichte, hierauf wurde der Apparat zusammengestellt, wie es Fig. 4 veranschaulicht, und in die beiden Gefäfse *B* und *G* Wasser gegossen, welches durch vorsichtiges Zugiefsen von wärmerem resp. kälterem Wasser genau auf die Temperatur der umgebenden Luft gebracht wurde. Die Lufttemperatur wurde durch respectives Oeffnen und Schliefsen eines vom Apparate entfernt befindlichen Fensters des Experimentirzimmers möglichst constant erhalten.

Nachdem die im Innern des Gefäfses *A* befindlichen Apparattheile, also namentlich das in *a c b* befindliche Quecksilber ebenfalls genau die Temperatur des umgebenden Wassers respective diejenige des in *B* befindlichen Wassers angenommen hatte[1]), wobei also das Thermoelement *u v* keinen Strom lieferte, wurde die Glaskappe *n*, welche bisher den Zutritt des Quecksilbers zu dem Metalle verhindert hatte, durch den Glasstab *g* (Fig. 4 und Fig. 5) nach unten geschoben, und hierdurch die Amalgamation eingeleitet.

Um den Amalgamations-Strom und den Strom des Thermoelementes rasch hintereinander beobachten zu können, waren die Drähte 1, 4 und 2, 3 so mit einer Quecksilberwippe verbunden, dafs das Umlegen eines Bügels genügte, um nach Belieben entweder das sich amalgamirende Metall *m* und den in den Schenkel *b* eingesenkten Platindraht, oder die Enden *u* und *v* des Thermoelementes mit dem Galvanometer in Verbindung setzen zu können.

Die zu den Versuchen dienenden Metalle waren Zink, Kadmium und Zinn; dieselben waren chemisch rein und in Form von 0,5^{mm} dicken, 12 Cent. langen, cylindrischen Stäben gegossen.

Die Intensität des Amalgamations-Stromes, sowie diejenige des von dem Thermoelement gelieferten Stromes

1) Zur Controlirung der Temperaturen in den 3 Gefäfsen *A*, *B* und *G* dienten 3 in zehntel Grade getheilte empfindliche Thermometer T_1 T_2 T_3. Fig. 4.

Digitized by Google

wurde während der 1—2stündigen Versuchsdauer von 5 zu 5 Minuten (in einigen Fällen während der ersten 10 Minuten auch von 2 zu 2 Minuten) gemessen.

Die Ergebnisse dieser Messungen für die 3 genannten Metalle sind auf Tafel III, Fig. 7—10 graphisch dargestellt.

Die ausgezogenen Curven geben ein Bild von dem Verlaufe des Amalgamations-Stromes bei den 3 verschiedenen Metallen, die gestrichelten Linien zeigen den Verlauf des Stromes des Thermoelementes, somit den Verlauf der in der Nähe des Metalles eintretenden Temperaturänderungen. Die Abscissen sind die von Beginn der Amalgamation an verflossenen Zeiten in Minuten, die Ordinaten die in den betreffenden Zeitaugenblicken beobachteten Intensitäten der beiden Ströme. Bei Betrachtung der Curven springt zunächst der analoge Verlauf der zusammengehörigen Curven in die Augen, woraus zur Evidenz hervorgeht, dafs die Intensitätsänderungen des Amalgamations-Stromes mit den Temperaturänderungen parallel gehen.

Ferner zeigt sich, dafs nur in einem Falle, und zwar beim Kadmium der Verlauf des zugehörigen Curvenpaares ein nahezu stetiger ist, während bei den Curven der beiden anderen Metalle, so besonders bei den dem Zink zugehörigen sprungweise Aenderungen eintreten. Dieser Unterschied im Verlaufe des Amalgamationsprocesses zwischen Kadmium einer- und Zink und Zinn andererseits, der sich hier geltend macht, rührt wohl daher, dafs das Kadmium sich viel leichter und rascher in Quecksilber löst, als die beiden andern Metalle. Dem entsprechend zeigte sich auch, als der Apparat auseinander genommen wurde, dafs der in das Quecksilber tauchende Theil beim Kadmium beinahe völlig verschwunden war, während beim Zink und Zinn noch die Hälfte bis $\frac{2}{3}$ desselben ungelöst zurückgeblieben waren. Nach Beendigung eines jeden Versuches wurde das Gefäfs *a* mit der Hand erwärmt und die Richtung des zwischen dem betreffenden Metalle und dem Quecksilber, respective dem Amalgam entstehenden Thermo-

Digitized by Google

stromes festgestellt, wobei sich in allen Fällen eine Uebereinstimmung mit den hierüber schon existirenden Angaben herausstellte.

In der nachstehenden Tabelle sind die Richtungen zusammengestellt, welche die beobachteten Amalgamations-Ströme bei jedem der 3 Metalle zeigten. Ferner ist in derselben die Art der Temperaturänderung angegeben, welche bei der Amalgamation eintrat und die durch das Thermoelement bestimmt wurde.

Endlich sind in einer besonderen Rubrik noch die Richtungen zusammengestellt, welche der Amalgamations-Strom zeigen müfste, wenn er seine Entstehung den vorhandenen Temperaturänderungen verdanken würde.

Untersuchtes Metall.	Zugehörige Curve auf Taf. III.	Beobachtete Temperaturänderung.	*Abgeleitete* Richtung des Thermostromes.	*Beobachtete* Richtung des Amalgamations-Stromes.
Zink No. I.	Fig. 7	Abkühlung	Zn negat., Hg posit.	Zn negat., Hg posit.
Zink No. II.	Fig. 8	Abkühlung	Zn negat., Hg posit.	Zn negat., Hg posit.
Cadmium	Fig. 9	Erwärmung	Cd posit., Hg negat.	Cd posit., Hg negat.
Zinn	Fig. 10	Abkühlung	Sn negat., Hg posit.	Sn negat., Hg posit.

Aus der Tabelle ist ersichtlich, dafs bei allen 3 untersuchten Metallen die Richtung des Amalgamations-Stromes die gleiche ist, wie wenn derselbe thermischen Ursprunges wäre. Nimmt man noch hiezu die aus den Curven sich ergebende Uebereinstimmung des Verlaufes seiner Intensität mit den in jedem einzelnen Momente herrschenden Temperaturverhältnissen, so folgt daraus mit

Digitized by Google

einem hohen Grade von Wahrscheinlichkeit, dafs die Amalgamations-Ströme in der That nichts anderes als Thermoströme sind.

Diese Wahrscheinlichkeit wird jedoch zur Gewifsheit durch das Resultat des folgenden Experimentes. In dem einen Schenkel *A* (Fig. 6) eines ⌴förmig gebogenen und mit Quecksilber gefüllten Glasrohres *A C B* ist ein Zinkstab Zn und ein Eisendraht Fe′ eingesenkt, der dem ersteren möglichst nahe gebracht ist. In das in dem Schenkel *B* befindliche Quecksilber taucht ebenfalls ein Eisendraht Fe″. Wenn wir den Zinkstab und einen der beiden Eisendrähte mit den Enden eines empfindlichen Galvanometers verbinden, so zeigt dasselbe, während die Lösung des Zinkes in dem Quecksilber erfolgt, wie wir wissen, einen Strom an. Nehmen wir für einen Augenblick mit Moser an, dieser Strom verdanke lediglich der chemischen Action des Quecksilbers auf das Zink seine Entstehung, so ist klar, dafs die Richtung desselben einzig und allein von der Natur des sich lösenden Metalles abhängig seyn kann; es müfste also in diesem Falle die Richtung und Intensität des Amalgamations-Stromes *dieselbe* seyn, gleichgiltig, ob das Galvanometer zwischen Zn und Fe′ oder zwischen Zn und Fe″ eingeschaltet ist.

Ganz anders verhält es sich dagegen, wenn der beobachtete Strom ein Thermostrom ist. Der in unmittelbarer Nähe von Zn eintauchende Eisendraht ist nur durch eine sehr dünne Schichte Quecksilber von demselben getrennt, die an allen Stellen nahezu dieselbe niedrigere Temperatur besitzen wird, welche das Quecksilber an der Berührungsstelle des sich amalgamirenden Zinkes angenommen hat. Wenn demzufolge das Galvanometer in den Schliefsungskreis Zn Fe′ eingeschaltet wird, so zeigt dasselbe einen Thermostrom an, der durch Erkältung der Berührungsstelle Zink (Quecksilber) Eisen hervorgerufen wird, und in Folge dessen die Richtung vom Eisen durch die Contactstelle zum Zink besitzt. Werden dagegen die Galvanometerdrähte mit Zn und Fe″ verbunden, und zwar

Digitized by Google

zu einer Zeit, in welcher das in dem Schenkel *B* befindliche Quecksilber noch nicht von der in *A* eingetretenen Temperaturänderung in Mitleidenschaft gezogen worden ist, so ist die einzige in dem Schliefsungskreise thätige elektromotorische Kraft der an der erkälteten Contactstelle Zink Quecksilber auftretende Thermostrom, und dieser hat die Richtung vom Quecksilber durch die Berührungsstelle zum Zink, ist also, wie man sieht, dem vorigen *entgegengesetzt.*

In dem ersten Falle erscheint also das Zink negativ und das Eisen (Fe′) positiv, im zweiten dagegen ist das Zink positiv, das Eisen (Fe″) (in Wirklichkeit das Quecksilber) negativ.

Bei einem nach den eben angeführten Prinzipien unter Beachtung der früher erwähnten Vorsichtsmaafsregeln ausgeführten Experimente ergab sich in der That das erwartete Resultat. Die Ströme, welche zwischen dem Zink und dem einen oder dem andern der beiden verschieden situirten Eisendrähte beobachtet wurden, hatten *entgegengesetzte* Richtung, und waren von *verschiedener* Stärke.

Es geht also hieraus hervor, dafs die Amalgamations-Ströme in der That nichts anderes als Thermoströme sind.

Bei dem eben erwähnten Versuche wurde zum ersten Male die schon von Moser beobachtete Umkehrung der Richtung des Amalgamations-Stromes bemerkt, und zwar bei dem zwischen dem Zink und dem entfernten Eisendrahte Fe″ auftretenden Strome. Die Intensität desselben nahm von Beginn des Versuches ab, wurde Null und schlug hierauf in die entgegengesetzte Richtung um. Diese Umkehrung der Stromesrichtung beruht, wie eine eingehendere Betrachtung der vorliegenden Verhältnisse leicht zeigt, einfach darauf, dafs die Temperaturerniedrigung von dem Zink aus durch das Quecksilber allmählich bis zu der Stelle fortschreitet, an welcher der Eisendraht (Fe″) eingetaucht ist.

Bei Moser, der in ein mit Quecksilber gefülltes Gefäfs neben einander eine Platinplatte und das zu amalga-

Digitized by Google

mirende Metall einsenkte, können ganz leicht ähnliche Umstände zur Erzeugung der Umkehr des Stromes mitgewirkt haben.

Dafs die während der Dauer des Versuches erfolgende Bereicherung des Quecksilbers an dem sich lösenden Metall nicht die Ursache der Stromesumkehrung ist, wie dies Moser zu vermuthen scheint, habe ich durch einen besonderen Versuch nachgewiesen, bei welchem ich in dem früher beschriebenen Apparate an Stelle des reinen Quecksilbers sehr stark mit Zink verunreinigtes anwandte und einen Zinkstab einsenkte. Die Stromesrichtung war dieselbe wie beim reinen Quecksilber; nur war die Intensität des Stromes sowohl, als die Temperaturerniedrigung beträchtlich geringer, wie dies nicht anders zu erwarten war. Bei einem weiteren Versuche wurden an Stelle der beiden Eisendrähte Fe' und Fe'' (Fig. 6) zwei Neusilberdrähte angewandt.

In diesem Falle hatten die beiden Ströme, die einmal zwischen dem Zink und dem benachbarten, sodann zwischen Zink und dem entfernt stehenden Neusilberdrahte beobachtet wurden, *dieselbe* Richtung, aber wiederum *verschiedene* Stärke. Eine Umkehrung der Stromesrichtung konnte in diesem Falle nicht bemerkt werden.

Soweit sich aus den vorliegenden Versuchen ersehen läfst, *sind also die bei der Amalgamation der Metalle auftretenden elektrischen Ströme Thermoströme, welche den durch die Amalgamation bedingten Temperaturänderungen ihre Entstehung verdanken.*

Mit Freude ergreife ich die Gelegenheit, an dieser Stelle meinem verehrten Lehrer, Hrn. Hofrath Professor Dr. Wiedemann für die gütige Unterstützung in Rath und That, welche er mir bei Ausführung dieser Arbeit zu Theil werden liefs, meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

Ebenso sage ich Hrn. Dr. Werner Siemens für die freundliche Ueberlassung der feinen Meſsinstrumente,

Digitized by Google

welche mir bei den Untersuchungen über Amalgamations-Ströme die wesentlichsten Dienste leisteten, meinen besten Dank.

Berlin, den 27. Juli 1875.

IV. *Anwendung des mechanischen Wärmeaequivalents auf Molecularkräfte, Moleculargröfse und Moleculardistanz;*

von J. Weinberg,
Staatsrath, Inspector des Moskauer Lehrbezirks.

(Zweiter Theil.)

25. Die im ersten Theile unserer Arbeit ausgeführte Theorie wollen wir nun zur näheren Beleuchtung der verschiedenen physischen Eigenschaften der Materie und der zwischen denselben existirenden Relationen, so wie auch zur Bestimmung des Elasticitäts-Coëfficienten und der Geschwindigkeit des Schalles anwenden, wobei dieselben Bezeichnungen wie im ersten Aufsatze beibehalten werden[1]).

26. Bezeichnen wir die Zahl der in einem chemischen Atome verschiedener Substanzen sich befindenden Molecüle mit $\pi', \pi'', \pi''' \ldots\ldots$, mit β aber eine constante Gröfse, so folgt, nach dem Gesetze von Dulong und Petit bekanntlich: $\pi' p' c' = \pi'' p'' c'' = \ldots\ldots = \beta$, und aus der Gleichung $f' k' (d' + i') = p' c' h'$ entnehmen wir $h' = \frac{f' k' (d' + i') \pi'}{\beta}$. — Die zur Dilatation verbrauchte Arbeit der Wärme ist $= p' h' n'^3 = 1\,\text{Kil.}\, h'$; die ganze zum Erwärmen Eines Kilogramms auf 1° C. verbrauchte, in mechanische Arbeit (Werk) ausgedrückte Wärme ist $= 1\,\text{Kil.}\, Wc'$. —

1) s. Poggend. Ann. 1874, Ergbd. VI, Stück 4, S. 586—607.

Digitized by Google

Bezeichnet ferner λ' ***die totale innere Arbeit*** der Wärme, mit anderen Worten — die Summe ***aller*** lebendiger Kräfte der durch Erwärmen von 1 Kil. der Substanz auf 1° C. erzeugten oscillatorischen, so wie auch rotatorischen Bewegungen der Molecüle, so ist

$$\lambda' = Wc' - p' h' n'^{3} = Wc' - \frac{n'^{3} p' . f' k' (d' + i') \pi'}{\beta}$$

oder auch, da $n'^{3} p' = 1$ Kilogramm

$$\lambda' = Wc' - \frac{f' k' (d' + i') \pi'}{\beta} \quad . \quad . \quad . \quad (38).$$

Wir sind aber berechtigt anzunehmen, dafs die totale innere Arbeit der Wärme direct der Wärmecapacität der Substanz, dem Gewichte derselben P und der ***absoluten*** (in Werk ausgedrückten) Temperatur T proportional sey[1]); es ist also (wenn man mit ϱ eine Constante bezeichnet):

$$\lambda' = \varrho c' P W T' = \varrho c' . 1 \text{ Kil. } W T = \varrho c' W T;$$

vergleichen wir diese Gleichung mit (38), so folgt:

$$\varrho c' W T = Wc' - \frac{f' k' (d' + i') \pi'}{\beta} \quad . \quad . \quad (38^{1})$$

oder auch:

$$f' k' (d' + i') = \frac{\beta}{\pi'} Wc' (1 - \varrho T) \quad . \quad . \quad (39),$$

da aber $f' k' (d' + i') = \frac{\beta h'}{\pi'}$, folglich:

$$h' = Wc' (1 - \varrho T) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40).$$

Haben beide Substanzen gleiche Temperatur ($T' = T''$), so ist auch

$$\frac{h'}{h''} = \frac{c'}{c''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

und aus (39) folgt alsdann:

$$\frac{f' k' (d' + i')}{f'' k'' (d'' + i'')} = \frac{c' \pi'}{c'' \pi'} . \quad . \quad . \quad . \quad (42).$$

Wir ersehen daraus, dafs ***bei gleicher Temperatur die zur Dilatation zweier Substanzen gleichen Gewichtes nöthige Arbeit der Wärme direct der absoluten Wärmecapacität***

1) s. Ledieu: *Interprétation mécanique des lois de Dulong et Petit et de Woestyn sur les chaleurs spécifiques atomiques. (Comptes Rendus,* 1874, *T. L. XXVIII, No.* 1, *p.* 30 *sqq.)*

Digitized by Google

derselben und umgekehrt der Zahl der das chemische Atom constituirenden Molecüle sich verhält.

27. Aus (38) folgt:

$$f' k' (d' + i') \frac{\pi'}{\beta} = Wc' - \lambda'$$

$$f'' k'' (d'' + i'') \frac{\pi''}{\beta} = Wc'' - \lambda'';$$

verbinden wir diese Gleichungen mit (42), so bekommen wir:

$$\frac{Wc' - \lambda'}{Wc'' - \lambda''} = \frac{c'}{c''},$$

oder auch:

$$\frac{\lambda'}{\lambda''} = \frac{c'}{c''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43).$$

Folglich ist (bei gleicher Temperatur) die totale innere Arbeit der Wärme in zwei Substanzen von gleichem Gewichte direct der absoluten Wärmecapacität derselben proportional; es ergiebt sich ferner:

$$\frac{f' k' (d' + i') \pi'}{f'' k'' (d'' + i'') \pi''} = \frac{\lambda'}{\lambda''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44).$$

Also: *Bei gleicher Temperatur und gleichem Gewichte ist die Arbeit der Dilatation der inneren Arbeit proportional, oder, mit anderen Worten, in jeder Substanz ist das gegenseitige Verhältnifs beider Arbeiten eine constante Gröfse*, die wir φ nennen wollen; folglich:

$$\frac{f' k' (d' + i') \pi'}{\lambda'} = \frac{f'' k'' (d'' + i'') \pi''}{\lambda''} = \ldots . = \varphi \quad (45).$$

Aus Gl. (2) haben wir aber:

$$\frac{f' k' (d' + i')}{f'' k'' (d'' + i'')} = \frac{p' k' c'}{p'' k'' c''};$$

demnach folgt aus (42): $\pi' p' h' = \pi'' p'' h''$, oder:

$$\frac{\pi' p'}{\pi'' p''} = \frac{h''}{h'} = \frac{c''}{c'} = \frac{\lambda''}{\lambda'}; \text{ oder allgemein } \frac{h}{c} = E \text{ (const.)}$$

Da aber $\pi' p' = P'$; $\pi'' p'' = P''$ (wo P', P'' das Gewicht der chemischen Atome bezeichnen); demnach bekommen wir folgende Gleichungen:

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} P' h' &= P'' h'' \\ P' \lambda' &= P'' \lambda'' \\ P' c' &= P'' c'' \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46).$$

Es können also dem empirisch gefundenen Gesetze von Dulong und Petit noch zwei theoretisch abgeleitete Sätze $P' h' = P'' h''$ und $P' \lambda' = P'' \lambda''$, das heifst: die Constanz der äufseren und inneren Arbeit der Wärme hinsichtlich des chemischen Atomes beigegeben werden. —

Die Gleichung: $\frac{\pi' p'}{\pi'' p''} = \frac{c''}{c'}$ wird aber auch:

$$\frac{\pi' (d' + i')^3 \Delta' g}{\pi'' d''^3 + i''^3) \Delta'' g} = \frac{c''}{c'},$$

und so haben wir demnach:

$$\frac{d' + i'}{d'' + i''} = \sqrt{\frac{\pi'' c'' \Delta''}{\pi' c' \Delta'}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47).$$

Da $\frac{h''}{h'} = \frac{c''}{c'}$, so bekommt Gl. (6) folgende Form:

$$\frac{F'}{F''} = \frac{c'^2 \Delta' k''}{c''^2 \Delta'' k'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48).$$

Gl. (14) läfst sich folgendermaafsen schreiben:

$$\left(\frac{d'' + i''}{d' + i'}\right)^{4-x} = \frac{c''^2 k' \Delta'}{c'^2 k'' \Delta''} \quad . \quad . \quad . \quad (49).$$

Demnach folgen aus § 18 die Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a) Ist } d'' + i'' > d' + i', \text{ so mufs auch} \\ &\quad \frac{\Delta'' k''}{\Delta' k'} < \frac{c''^2}{c'^2} \text{ und umgekehrt} \\ &\text{b) Ist } d'' + i'' < d' + i', \text{ so mufs auch} \\ &\quad \frac{\Delta'' k''}{\Delta' k'} > \frac{c''^2}{c'^2} \text{ und umgekehrt} \end{aligned}\right\} \quad (50).$$

28. Aus Gl. (45) erhalten wir:

$$f' k' (d' + i') = \frac{q \lambda'}{\pi'};$$

setzt man diese Gröfse in (38), so wird:

$$\lambda' = W c' \frac{\beta}{\beta + \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

oder auch:

Digitized by Google

$$\lambda' = \frac{W}{\beta + \varphi} \pi' p' c'^2 ; \quad \lambda'' = \frac{W}{\beta + \varphi} \pi'' p'' c''^2,$$

folglich:

$$\frac{\lambda'}{\lambda''} = \frac{\pi' p' c'^2}{\pi'' p'' c''^2} = \frac{P' c'^2}{P'' c''^2} \quad . \quad . \quad . \quad (52).$$

Wir ersehen daraus, *dafs die totale innere Arbeit der Wärme (bei gleicher Temperatur) sich durch die Gröfse $P' c'^2$ messen läfst, die wir die lebendige Kraft des chemischen Atoms nennen mögen.*

29. Aus Gl. (43) ist $\frac{c'}{\lambda'} = \frac{c''}{\lambda''} = \ldots\ldots = \xi$ (const); demnach $c' = \lambda' \xi$; setzt man nun diese Gröfse, so wie auch φ aus (45) in die Gl. (38), so wird letztere: $\lambda' = W\xi\lambda' - \frac{\varphi\lambda'}{\beta}$; oder auch, da $\beta = \pi' p' c'$, wenn man $p' c$ mit ω' bezeichnet:

$$\omega' = \frac{\varphi}{\pi'(W\xi - 1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53).$$

Da aber p' das absolute Gewicht eines Molecüls, also eine sehr kleine Gröfse, auch c' bei allen Substanzen (Wasser und Wasserstoff ausgenommen) ein Bruchtheil vorstellt, so unterliegt ω' zweien Bedingungen: 1) ω' ist eine wesentlich positive Gröfse; 2) $\omega' < 1$.

1) Ist ω' positiv, so folgt demnach $W\xi > 1$ (denn φ ist immer positiv, denn, hätten in (45) Zähler und Nenner verschiedene Zeichen, so wäre, wenn man z. B. λ positiv nimmt, in Gl. (38) $\lambda' > Wc'$, d. h. es wäre die *innere* Arbeit der Wärme gröfser als die ganze Arbeit, was doch unmöglich ist). Aus $W\xi > 1$ folgt aber $c' > \frac{\lambda'}{W}$. — *Es unterliegt also für jedwede Substanz c zweien Bedingungen:*

$$\left.\begin{aligned} c &< 1 \\ c &> \tfrac{\lambda}{W} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54).$$

2) Wenn $\omega' < 1$, so ist, weil $W\xi > 1$, auch $\varphi < (W\xi - 1)\pi'$ oder $\varphi < \left(W\frac{c'}{\lambda'} - 1\right)\pi'$; da aber $c' < 1$, so ist, *à fortiori*,

Digitized by Google

$\varphi < \left(\frac{W}{\lambda'} - 1\right)\pi'$, oder auch $\pi'\left(\frac{W-\lambda'}{\lambda'}\right) > \varphi$; da aber φ eine positive Gröfse ist, ***so ist unumgänglich*** $\lambda' < W$, wie es auch zu erwarten stand.

Aus vorletzter Bedingung folgt: $\pi' > \frac{\varphi}{W\xi - 1}$; oder auch $W > \frac{\lambda'\varphi}{\pi'} + \lambda'$, folglich ist:

$$\omega' < \frac{\varphi}{(\lambda'\varphi + \lambda')\xi - 1} \text{ oder auch } \omega' < \frac{\varphi}{\varphi c' + \pi' c' - \pi'};$$

da aber ω' positiv $u < 1$ ist, so folgt daraus: $\varphi c' + \pi' c' - \pi' > 0$ oder auch $\varphi > \frac{(1-c')\pi'}{c'}$, oder $\pi' < \frac{\varphi c'}{1-c'}$. ***Wir haben daher für die Zahl*** π ***der das chemische Atom irgend einer Substanz constituirenden Molecüle folgende Gränzwerthe:***

$$\left.\begin{aligned} \pi &> \frac{\varphi}{W\xi - 1} \\ \pi &< \frac{\varphi c}{1-c} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (55).$$

Da aber $\pi \not< 1$, folglich mufs $\frac{\varphi c}{1-c} > 1$; $\varphi > \frac{1-c}{c}$, oder auch $c > \frac{1}{1+\varphi}$; anstatt (54) bekommen wir also ***für die absolute Wärmecapacität irgend einer Substanz folgende Gränzwerthe*** (Wasser und Wasserstoff ausgenommen):

$$\left.\begin{aligned} c &> \frac{1}{1+\varphi} \\ c &< 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (56).$$

30. Aus der Bedingung: $\omega > \frac{(1-c')\pi'}{c'}$ ist zu ersehen, dafs *à fortiori*: $\omega' > \frac{\frac{(1-c')\pi'}{c'}}{\pi'(W\xi - 1)}$, oder auch $\omega' > \frac{1-c'}{c'(W\xi - 1)}$.

Setzt man anstatt ω' seinen Werth $p'c'$, auch anstatt ξ den Werth $\frac{c'}{\lambda'}$, so bekommt die letzte Ungleichheit folgende Form: $p' > \frac{(1-c')\lambda'}{c'^2(Wc' - \lambda')}$. Da aber, wie oben bewiesen, $\pi'\lambda'p' = \pi''\lambda''p'' = \ldots\ldots = \psi$ (const.), woraus

Digitized by Google

$\lambda' = \frac{\psi}{\pi' p'}$, so ist: $p' > \frac{(1-c')\psi}{c'^2(\pi' Wc' p' - \psi)}$ und *à fortiori*, $p' > \frac{(1-c')\psi}{c'^2 \pi' Wc' p'}$, oder auch $p' > \sqrt{\frac{(1-c')\psi}{\pi' Wc'^3}}$. Da p' eine sehr kleine Gröfse ist, so ist auch $(1-c')\psi < \pi' Wc'^3$; $(1-c')\pi'\lambda' p' < \pi' Wc'^3$, $p' < \frac{Wc'^3}{(1-c')\lambda'}$. Oben hatten wir aber $p' > \frac{(1-c')\lambda'}{c'^2(Wc'-\lambda')}$. Setzt man statt λ' dessen Werth $\frac{c'}{\xi}$, *so bekommen wir für das Molecülgewicht irgend einer Substanz folgende Gränzwerthe*:

$$\left.\begin{aligned} p &> \frac{1-c}{c^2(W\xi-1)} \\ p &< \frac{W\xi c^2}{1-c} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (57).$$

Aus diesen beiden Gränzwerthen folgt unmittelbar die Bedingung:

$\frac{1-c}{c^2(W\xi-1)} < \frac{W\xi c^2}{1-c}$, oder auch $W\xi(W\xi-1) > \frac{(1-c)^2}{c^4}$,

folglich, *à fortiori*, $W\xi . W\xi > \frac{(1-c)^2}{c^4}$, oder $W\xi > \frac{1-c}{c^2}$.

31. Die *totale* innere Arbeit der Wärme bei Erhöhung der Temperatur eines Kil. irgend einer Substanz auf 1° C. ist nach § 26: $\lambda = \varrho c W T$; die Gl. (51) aber giebt $\lambda = Wc\frac{\beta}{\beta+\varphi}$; folglich ist $\varrho T = \frac{\beta}{\beta+\varphi} = \frac{\pi p c}{\pi p c+\varphi} = \frac{1}{1+\frac{\varphi}{Pc}}$,

oder auch

$$c = \frac{\varphi}{P\left(\frac{1}{\varrho T}-1\right)} \quad \ldots \quad (58).$$

Wir ersehen daraus: 1) *je gröfser die absolute Temperatur, desto gröfser wird die Wärmecapacität (was auch von Regnault und Andern bewiesen)*; 2) *c ist für jede Substanz bei gegebener Temperatur nicht blos eine Function letzterer, sondern auch des Gewichtes des chemischen Atomes.*

32. Bezeichnet man in Gl. (38¹) die Gröfse $\frac{fk(d+i)\pi}{\beta}$

Digitized by Google

mit D, so wird $T = \frac{1}{\varrho} - \frac{D}{\varrho c W}$; folglich $\frac{dT}{dD} = -\frac{1}{\varrho c W}$; da aber $T = 273^0 + t^0$, folglich:

$$\frac{dt}{dD} = -\frac{1}{\varrho c W}.$$

Daraus ist zu ersehen, dafs bei kleinen Variationen der Temperatur (zwischen welchen Gränzen man c als constant betrachten kann):

1) *die Dilatation immer eine Erniedrigung der Temperatur zu Folge hat;*
2) *die Relation zwischen diesen beiden, quantitativ betrachteten, Erscheinungen unverändert bleibt;*
3) *diese Relation weder von der Masse, noch von der anfänglichen Temperatur derselben abhängt.*

33. Es wurde $\frac{f k (d+i)^{\pi}}{\beta}$ mit D bezeichnet; nun ist aber nach Gl. (8):

$$f = \frac{\alpha . m^2}{(d+i)^x} = \frac{\alpha . p^2}{g^2 (d+i)^x},$$

folglich ist:

$$D = \frac{\pi \alpha p k}{g^2 c (d+i)^{x-1}}.$$

Betrachten wir dieselbe Substanz bei einer *niedrigeren* Temperatur τ, so ist gleichfalls:

$$D_{\tau} = \frac{\pi \alpha p k_{\tau}}{g^2 c_{\tau} (d+i_{\tau})^{x-1}}$$

und folglich auch:

$$D_{\tau} - D = \frac{\pi \alpha p}{g^2} \left[\frac{k_{\tau}}{c_{\tau} (d+i_{\tau})^{x-1}} - \frac{k}{c (d+i)^{x-1}} \right] \quad (59).$$

Setzt man nun anstatt D die vorher gefundene Gröfse in die Gleichung:

$$T = \frac{1}{\varrho} - \frac{D}{\varrho c W},$$

so wird dieselbe:

$$T = \frac{1}{\varrho} - \frac{\pi \alpha p k}{\varrho g^2 c^2 W (d+i)^{x-1}},$$

Digitized by Google

analog wird dieselbe auch bei einer geringeren Temperatur τ; und wir haben demnach:

$$T - \tau = \frac{\pi \alpha p}{\varrho g^2 W}\left[\frac{k_\tau}{c_\tau^2 (d+i_\tau)^{x-1}} - \frac{k}{c^2 (d+i)^{x-1}}\right] \quad (60).$$

Da $T > \tau$, so ist $T - \tau$ positiv, und folglich ist:

$$\frac{k_\tau}{c_\tau^2 (d+i_\tau)^{x-1}} > \frac{k}{c^2 (d+i)^{x-1}}.$$

Ist also

$$\frac{k_\tau}{c_\tau^2 (d+i_\tau)^{x-1}} < 1, \text{ so kann auch } \frac{k}{c^2 (d+i)^{x-1}}$$

nimmer gröfser als 1 seyn; folglich wenn

$$\frac{k_\tau}{c_\tau^2} < (d+i_\tau)^{x-1}, \text{ so ist auch } \frac{k}{c^2} \not> (d+i)^{x-1}. -$$

Wenn aber

$$\frac{k_\tau}{c_\tau^2} < (d+i_\tau)^{x-1}, \text{ so ist } \textit{à fortiori}, \frac{k_\tau}{c_\tau^2} < (d+i)^{x-1}. -$$

Wir schliefsen daraus, dafs wenn

$$\frac{k}{c^2 (d+i)^{x-1}} < 1, \text{ so ist unumgänglich } \frac{k}{c^2 (d+i)^{x-1}} \leqq 1.$$

Es ist aber

$$\frac{1}{(d+i)^{x-1}} > 1,$$

da doch $(d+i)^{x-1}$ immer ein sehr kleiner Bruch ist, folglich ist zu ersehen:

$$\text{wenn } \frac{k_\tau}{c_\tau^2} < 1, \text{ so ist auch } \frac{k}{c^2} < 1 \quad (61).$$

Folglich: 1) *Wenn bei einer niedrigeren Temperatur* τ *die Relation* $\frac{k_\tau}{c_\tau^2}$ *kleiner als die Einheit ist, so findet dasselbe auch bei einer gröfseren Temperatur* T *statt*;

Digitized by Google

2) *ist* $D_1 > D$, *so ist auch* $T > t$, *(denn in Gl.* (60) *ist* c, *das kleiner als die Einheit, in der zweiten Potenz.)*

---

34. Wir wollen nun unsere Formeln zum Auffinden des Elasticitäts-Coëfficienten und der zwischen demselben und der latenten Wärme (laut der Person'schen Formel) existirender Relationen anwenden.

Bezeichnen wir mit E den Elasticitäts-Coëfficienten, d. h. das Gewicht, welches einen Cylinder von $1^{\square mm}$ im Querschnitte auf die *doppelte* Länge ausdehnen kann. Betrachten wir einen Metallcylinder von $1^{\square mm}$ Querschnitt und $10^{mm} = 1$ Cent. Länge; die Zahl n der im Querschnitte enthaltenen Molecüle ist: $n = \frac{1^{\square mm}}{(d+i)^2} = \frac{1}{(d+i)^2}$; ($d + i$ ist auch in Millimetern ausgedrückt); die Zahl N der in der Länge des Cylinders enthaltenen Molecüle ist $N = \frac{10}{d+i}$. Wird also die Länge verdoppelt, so ist $N(d+i') = 2N(d+i)$, oder auch $i' = d + 2i$. — Jede Reihe N Molecüle erleidet eine Spannung $= \frac{E}{n}$, folglich wirken auf die Molecüle der Reihe die Kräfte $N.f - \frac{E}{n}$ und auf jedes Molecül $f - \frac{E}{n}$ (da sich die Spannung $\frac{E}{n}$ vom unteren Molecül auf jedes andere Molecül der Reihe fortpflanzt).

Vor der Anwendung des Gewichtes E hatten wir: $\frac{f}{p} = \frac{hc}{k(d+i)}$; bei dessen Anwendung wird aber: $\frac{f - \frac{E}{n}}{p} = \frac{hc}{k(d+i')}$ oder auch: $fk(d+i) = \left(f - \frac{E}{n}\right) k(d+i')$. Setzt man in dieser Gleichung anstatt n seinen Werth $\frac{1}{(d+i)^2}$, anstatt i' dessen Gröfse $i' = d + 2i$, so bekommt man:

$$f = 2E(d+i)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62).$$

Digitized by Google

Bezeichnen wir $\frac{f}{(d+i)^3}$, d. h. die auf $1^{\square mm}$ wirkende Attraction der Molecüle mit F_m, so ist:

$$F_m = 2E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63).$$

Wir ersehen daraus, *dafs die auf die Oberfläche eines Quadrat-Millimeters wirkende Molecular-Attraction zweimal gröfser als der Elasticitäts-Coëfficient ist.*

Da $f = \frac{phc}{k(d+i)}$; $p = (d+i)^3 \Delta g$, folglich wird Gl. (62)

$$E = \frac{\Delta c g k}{2k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64).$$

Daraus ist zu ersehen, dafs *jeder Umstand, der zur Vergröfserung der Dichtigkeit beiträgt, auch den Coëfficienten der Elasticität vergröfsert* (was schon Wertheim bewiesen) *und das Letzere umgekehrt dem Dilatations-Coëfficienten und direct dem Quadrate der Wärmecapacität proportional ist* (da man (§ 27) anstatt h den Werth $c\zeta$ setzen kann, wo ζ irgend eine Constante bezeichnet). Für irgend zwei Substanzen zieht man aus Gl. (64) die Relation:

$$\frac{E'}{E''} = \frac{\Delta' k'' c'^2}{\Delta'' k' c''^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65).$$

35. Bezeichnet man mit l', l'' die latente Wärme zweier Metalle, mit E', E'' deren Elasticitäts-Coëfficienten, so haben wir nach der bekannten Person'schen Formel:

$$\frac{l'}{l''} = \frac{E'\left(1+\frac{2}{\sqrt{\Delta'}}\right)}{E''\left(1+\frac{2}{\sqrt{\Delta''}}\right)}.$$

Setzt man anstatt $\frac{E'}{E''}$ dessen Werth aus (65), so wird:

$$\frac{l' k' c''^2}{l'' k'' c'^2} = \frac{\Delta' + 2\sqrt{\Delta'}}{\Delta'' + 2\sqrt{\Delta''}} \quad . \quad . \quad . \quad (66).$$

Zur Berechnung der Formel (66) wollen wir die Gröfsen Δ, l, k, c, welcher der folgenden in Jamin's und Daguin's, sowie auch in mehreren anderen Lehrbüchern der Physik sich befindenden Tafel entnommen sind, gebrauchen:

Digitized by Google

Tafel I.

Metalle	A (bei $+4°,1$ C.)	c	k	l (in Calorien)
Silber, gegossen	10,5	0,0557	0,000020	21,07
Kupfer, geschmiedet	8,95	0,0949	0,000018	—
Eisen in Stäben	7,8	0,1098	0,000013	—
Zink, gegossen	6,9	0,0955	0,000029	28,13
Zinn, gegossen	7,3	0,7562	0,000022	14,25
Blei, gegossen	11,3	0,0314	0,000028	5,37
Platin, geschmiedet	23,0	0,0355	0,000009	—

Mit Hülfe dieser Gröfsen wollen wir die Function $\frac{A' + 2\sqrt{A'}}{A'' + 2\sqrt{A''}}$ für je zwei Metalle nach Formel (66) zuerst vermittelst c, k, l, dann aber unmittelbar vermittelst A' und A'' berechnen:

Tafel II.

$$\frac{A' + 2\sqrt{A'}}{A'' + 2\sqrt{A''}} =$$

Metalle	berechnet nach Form. (66)	berechnet unmittelbar
Silber : Zink	1,52	1,40
Zinn : Zink	1,11	1,04
Blei : Zinn	1,54	1,42
Blei : Silber	1,12	1,06

Vorkommende Differenzen beider Resultate lassen sich wohl dadurch erklären, dafs in Taf. 1 bei A jedesmal der Zustand des Metalles (gegossen, geschmiedet u. d. gl.) sich vorfindet, was wir aber bei c, k, l leider nicht wissen, und doch jede dieser Gröfsen von dem Zustande der Substanz abhängen mag.

Nach (66) sind wir auch im Stande, l für eine Sub-

Digitized by Google

stanz zu berechnen, wenn nur alle Gröfsen für irgend eine andere Substanz bekannt sind. So z. B. giebt:

Kupfer verglichen mit	Silber:	$l = 59{,}75$
„ „ „	Zink:	55,00
„ „ „	Zinn:	58,37
als Mittel für Kupfer:		$l = 57{,}71.$
Eisen verglichen mit	Silber:	$l = 99{,}26$
„ „ „	Zink:	91,35
„ „ „	Zinn:	96,96
im Mittel für Eisen:		$l = 95{,}86.$
Platin verglichen mit	Silber:	$l = 36{,}50$
„ „ „	Zink:	33,60
„ „ „	Zinn:	35,66
im Mittel für Platin:		$l = 35{,}25.$

36. Wählt man zwei Metalle, deren $\Delta'' > \Delta'$, so folgt aus Gl. (66): $\frac{l' k' c''^2}{l'' k'' c'^2} < 1$; nehmen wir an, dafs $k'' < k'$, so ist unfehlbar $\frac{l'}{l''} > \frac{c''^2}{c'^2}$. ***Wir ersehen daraus, dafs in zwei Metallen, deren $\Delta'' > \Delta'$, $k'' < \Delta'$, unfehlbar seyn mufs*** $\frac{l''}{l'} > \frac{c''^2}{c'^2}$, was sich ohne Ausnahme aus Taf. I als richtig beweist, wenn wir folgende Metalle mit einander vergleichen: — Zinn:Zink; Blei:Zink; Silber:Zink; Silber : Zinn; Kupfer : Zinn; Kupfer : Zink; Eisen : Zink; Eisen : Zinn; Platin : Zinn; Platin : Blei; welche die beiden Conditionen: $\Delta'' > \Delta'$, $k'' < \Delta'$ erfüllen. (Für die latente Wärme des Kupfers, Eisens und Platins kann man die oben berechneten Werthe berechnen.) —

37. Vergleichen wir Gl. (49) mit Gl. (66), so erhalten wir:

$$\left(\frac{d'' + i''}{d' + i'}\right)^{4-x} = \frac{l''}{l'} \cdot \frac{\Delta'^2 + 2\sqrt{\Delta'^3}}{\Delta''^2 + 2\sqrt{\Delta''^3}} \quad . \quad (67).$$

Nehmen wir an, dafs $d'' + i'' > d' + i'$ und aufserdem dafs $\Delta'' > \Delta'$, so ist, nach letzterer Gleichung, unfehlbar auch $l'' > l'$; da aber, nach Bedingung (50), wenn

Digitized by Google

$d'' + i'' > d' + i'$, auch $\frac{\Delta''}{\Delta'} < \frac{c''^2}{c'^2} \cdot \frac{k'}{k''}$ ist, so ersehen wir, daſs wenn $\Delta'' > \Delta'$, auch $\frac{c''^2}{c'^2} > \frac{k''}{k'}$. Daher schlieſsen wir, *daſs wenn* $\frac{c''^2}{c'^2} > \frac{k''}{k'}$, *jedesmal auch* $l'' > l'$ *ist*, was sich im vollen Maaſse bewährt, wenn man nach Taf. I: Kupfer : Silber; Eisen : Kupfer; Eisen : Zink; Zink : Zinn; Zinn : Blei; Platin : Blei; Eisen : Platin; Kupfer : Platin; Kupfer : Blei und Eisen : Blei vergleicht.

38. Die kleinste Dichtigkeit in der Gruppe der Metalle besitzt Aluminium (2,7), die gröſste aber geschlagenes Platin (23,0). Setzt man daher diese Werthe in Gl. (66), so bekommen wir zwei Gränzwerthe:

$$\frac{l' k' c''^2}{l'' k'' c'^2} \left(= \frac{\Delta' + 2\sqrt{\Delta'}}{\Delta'' + 2\sqrt{\Delta''}} \right) \begin{matrix} > 0{,}18 \\ < 5{,}45 \end{matrix} \Big\} \quad . \quad (68).$$

Vergleicht man diese Werthe mit Gl. (67), so wird:

$$\left(\frac{d'' + i''}{d' + i'}\right)^{4-x} > 0{,}18 \, \frac{\Delta' l''}{\Delta'' l'}; \quad \left(\frac{d'' + i''}{d' + i'}\right)^{4-x} < 5{,}45 \, \frac{\Delta' l''}{\Delta'' l'}.$$

Da, wie schon vorher bewiesen, nur bei Gasen $d'' + i'' = d' + i'$, so ist:

a) Wenn $d'' + i'' > d' + i'$, so ist $5{,}45 \, \frac{\Delta' l''}{\Delta'' l'} > 1$,

oder $\frac{\Delta' l''}{\Delta'' l'} > 0{,}18$

b) Wenn $d'' + i'' < d' + i'$, so ist $0{,}18 \, \frac{\Delta' l''}{\Delta'' l'} < 1$,

oder $\frac{\Delta' l''}{\Delta'' l'} < 5{,}45$.

Um zu wissen, welche von diesen beiden Bedingungen die richtige und naturgemäſse sey, wenden wir uns an Gl. (67), aus welcher insofort:

$$x = \frac{lg \left[\frac{(d'' + i'')^4 \, l' \, (\Delta''^2 + 2\sqrt{\Delta''^3})}{(d' + i')^4 \, l'' \, (\Delta'^2 + 2\sqrt{\Delta'^3})} \right]}{lg \left[\frac{d'' + i''}{d' + i'} \right]}$$

Wie schon gesagt, ist $x > 1$, und $x < 4$.

Digitized by Google

a) Ist $x > 1$, so ist auch:

$$\frac{(d''+i'')^4\, l''\,(\Delta''^2+2\sqrt{\Delta''^3})}{(d'+i')^4\, l'\,(\Delta'^2+2\sqrt{\Delta'^3})} > \frac{d''+i''}{d'+i'}$$

und daraus folgt die Bedingung:

$$\frac{(d''+i'')^3\, l''\,(\Delta''^2+2\sqrt{\Delta''^3})}{(d'+i')^3\, l'\,(\Delta'^2+2\sqrt{\Delta'^3})} > 1 \quad . \quad . \quad (69).$$

b) Ist $x < 4$, so ist auch:

$$lg\left[\frac{(d''+i'')^4}{(d'+i')^4}\cdot\frac{l''}{l'}\cdot\frac{(\Delta''^2+2\sqrt{\Delta''^3})}{(\Delta'^2+2\sqrt{\Delta'^3})}\right] < 4\, lg\left[\frac{d''+i''}{d'+i'}\right]$$

und daraus folgt die zweite Bedingung:

$$\frac{l''\,(\Delta''^2+2\sqrt{\Delta''^3})}{l'\,(\Delta'^2+2\sqrt{\Delta'^3})} < 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70).$$

Beide letzten Bedingungen geben aber sofort $\frac{d''+i''}{d'+i'} > 1$; findet aber letzteres statt, so ist $\frac{\Delta' l''}{\Delta'' l'} > 0{,}18$, oder auch:

$$\frac{l''}{l'} > 0{,}18\,\frac{\Delta''}{\Delta'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71).$$

Nehmen wir zwei Metalle, in welchen $l'' < l'$, so ist, à fortiori, $0{,}18\,\frac{\Delta''}{\Delta'} < 1$, oder auch $\Delta' > 0{,}18\,\Delta''$, was sich auch bei Betrachtung dieser Werthe in Taf. I vollkommen bewährt. Betrachten wir eine andere Gruppe einfacher Substanzen, so verändert sich blofs die Zahl 0,18, alles Uebrige aber behält seine Richtigkeit.

39. Da $p = (d+i)^3\,\Delta g$, so können wir (69) auch folgendermaafsen schreiben:

$$\frac{p''\, l''\,(\Delta''+2\sqrt{\Delta''})}{p'\, l'\,(\Delta'+2\sqrt{\Delta'})} > 1.$$

Aus (70) folgt aber auch:

$$\frac{l'\,\Delta''\,(\Delta''+2\sqrt{\Delta''})}{l''\,\Delta'\,(\Delta'+2\sqrt{\Delta'})} < 1.$$

Vergleicht man beide letzten Ungleichheiten mit einander, so folgt, ***à fortiori***:

$$\frac{p''}{p'}\,\frac{l''}{l'}\cdot\frac{l''\,\Delta'}{l'\,\Delta''} > 1,$$

Digitized by Google

oder auch:

$$\frac{p''}{p'} > \frac{\Delta''}{\Delta'} \quad \ldots\ldots \quad (72).$$

Ist nun $\Delta'' > \Delta'$, so ist auch $p'' > p'$.

Bezeichnen wir mit δ'' und δ' die ***wahre*** Dichtigkeit beider Substanzen (bei der absoluten Null-Temperatur), so ist auch $p'' = d''^3\,\delta'' g$; $p' = d'^3\,\delta' g$. Ist nun $\Delta'' > \Delta'$, also auch nach (72) $p'' > p'$, so ist $d''^3\,\delta'' > d'^3\,\delta'$, oder $\frac{d''^3}{d'^3} > \frac{\delta'}{\delta''}$; ***wenn also $\delta' > \delta''$, so ist $d'' > d'$.***

Ferner ist, nach Dulong und Petit: $\pi'' p'' c'' = \pi' p' c'$ oder $\frac{p''}{p'} = \frac{\pi' c'}{\pi'' c''}$; ist nun $\Delta'' > \Delta'$, ferner auch $p'' > p'$, so ist $\pi'' c'' > \pi' c'$;

ist demnach $\Delta'' > \Delta'$, so ist $\pi'' c'' < \pi' c'$.

Ein Blick auf Taf. I zeigt in der That, daſs ***meistentheils die Dichtigkeiten der Metalle sich umgekehrt den Wärmecapacitäten derselben verhalten.***

---

40. Den in Gl. (64) gefundenen Werth E wollen wir zum Ausfinden der Geschwindigkeit des Schalls in verschiedenen Substanzen gebrauchen.

Nach der bekannten Laplace'schen Formel ist diese Geschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{g}{\Phi}},$$

wo g die Intensität der Schwerkraft, Φ aber die Verlängerung eines Stabes, dessen Länge $= 1$, durch eine seinem eigenen Gewichte gleiche Ziehkraft bedeutet.

Da aber zwischen Φ und E die bekannte Relation besteht: $\Phi E = \Delta$, so ist nach (64): $\Phi = \frac{2k}{cgh}$ und die Laplace'sche Formel wird $v = \sqrt{\frac{cg^2h}{2k}}$; da aber

$$h = \frac{fk(d+i)}{pc}; \; p = (d+i)^3 \Delta g,$$

so ist:

$$v = \sqrt{\frac{fg}{2\Delta(d+i)^2}} \quad \ldots \quad (73),$$

oder wenn F die Gröſse der Molecular-Attraction auf der einer Einheit gleichen Oberfläche vorstellt:

$$v = \sqrt{\frac{Fg}{2\Delta}} \quad \ldots \quad (74).$$

Es ist leicht zu ersehen, daſs Formel (74), an Gase angebracht, identisch ist mit der Newton'schen Formel $v = \sqrt{\frac{\delta h g}{\Delta}}$, worin h die Barometerhöhe, δ die Dichtigkeit von Quecksilber bei 0°, Δ die Dichtigkeit des Gases vorstellt; denn in (74) bedeutet $\frac{F}{2}$ den auf's Gas von aussen erzeugten Druck. — Befinden sich zwei Gase unter gleichem Drucke und gleicher Temperatur, alsdann ist:

$$\frac{v'}{v''} = \sqrt{\frac{\Delta''}{\Delta'}} = \sqrt{\frac{p''}{p'}} \quad \ldots \quad (75).$$

41. Setzt man in Form. (73) anstatt f und p die Gröſsen

$$f = \frac{\alpha m^2}{(d+i)^x} = \frac{\alpha p^2}{g^2(d+i)^x}; \; p = (d+i)^3 \Delta g,$$

so ist:

$$v = \sqrt{\frac{\alpha \Delta g}{2}(d+i)^{4-x}},$$

woraus folgt $(d+i)^{4-x} = \frac{2v^2}{\alpha \Delta g}$; für irgend zwei Substanzen, in denen die Schallgeschwindigkeit v' und v'' ist, bekommen wir:

$$\left(\frac{d''+i''}{d'+i'}\right)^{4-x} = \frac{v''^2 \Delta'}{v'^2 \Delta''}.$$

Wird letztere Gleichung mit Gl. (49) verglichen, so wird:

$$\frac{v''}{v'} = \frac{c''}{c'} \sqrt{\frac{k'}{k''}} \quad \ldots \quad (76);$$

Wenn man aber dieselbe mit Gl. (67) vergleicht, so folgt:

$$\frac{v''}{v'} = \sqrt{\frac{l''}{l'} \cdot \frac{\Delta' + 2\sqrt{\Delta'}}{\Delta'' + 2\sqrt{\Delta''}}} \quad \ldots \quad (77).$$

Digitized by Google

Die Formeln (76) und (77) wollen wir nach Taf. I berechnen und die Resultate mit den folgenden von Wertheim für die Schallgeschwindigkeit in verschiedenen Substanzen gegebenen vergleichen (dieselbe in der Luft = 333 Meter als Einheit genommen):

in Zinn = 7,480; Silber = 8,057; gezogenem Zink = 11,007; gezogenem Kupfer = 11,167; gezogenem Eisen = 15,108; Platindraht = 8,409.

Tafel III.

Metalle	$\frac{v''}{v'}$		
	nach Wertheim	nach Form. (76)	nach Form. (77)
Silber : Zinn	1,077	1,039	1,051
Silber : Zink (gezog.)	0,732	0,732	0,730
Kupfer : Eisen	0,739	0,735	0,735
Eisen : Platin	1,80	2,57	2,57
Eisen : Zinn	2,02	2,54	2,52
Kupfer : Zinn	1,49	1,87	1,86
Silber : Eisen	0,53	0,41	0,42
Platin : Silber	1,04	0,95	0,93
Platin : Zinn	1,12	0,99	0,98
Kupfer : Platin	1,33	1,89	1,89

Aus dieser Tafel ersehen wir eine fast vollkommene Identität zwischen beiden, den Formeln (76) und (77) nachgerechneten Gröfsen, trotzdem dafs dieselben auf ganz verschiedene Werthe basirt sind. Die Differenzen aber zwischen den berechneten und den Wertheim'schen Gröfsen lassen sich einfach dadurch erklären, dafs letzterer z. B. die Schallgeschwindigkeit für *gezogenes* Eisen bestimmt, während unsere der Taf. I entnommenen Werthe A, c, k, l sich auf Eisen in Stäben beziehen; ebenso ist bei Wertheim von Platindraht die Rede, während unsere Gröfsen sich auf geschmiedetes Platin beziehen, u. dgl. Was die in Taf. I für verschiedene Metalle gegebenen

Digitized by Google

Gröfsen anbetrifft, so berufen wir uns auf das schon vorher Gesagte (§ 35).

42. Aus Gl. $(d+i)^{1-x} = \frac{2v^2}{\alpha \Delta g}$ folgt, wenn man anstatt $\Delta . g$ dessen Werth aus $p = (d+i)^3 \Delta g$ setzt: $(d+i)^{1-x} = \frac{2v^2}{\alpha p}$; differentiirt man diese Gleichung, so ist: $(1-x)(d+i)^{-x} di = \frac{4v\,dv}{\alpha p}$ und da: $(d+i)^{-x} = \frac{2v}{\alpha p (d+i)}$, folglich ist (da doch $x > 1$):

$$dv = -\frac{(x-1)\,di}{2(d+i)}.$$

Daraus ist zu ersehen, dafs *in festen und flüssigen Substanzen jede Verminderung der Dichtigkeit (bei ungeänderter Temperatur) eine Verminderung der Schallgeschwindigkeit zu Folge hat.*

V. *Ueber eine Eigenschaft einer elektrisirten Wasserfläche; von Hrn. G. Lippmann.*

(*Compt. rend. T. LXXXI, p.* 280.)

Es sey eine in einem Glasgefäfs enthaltene Wassermasse durch einen Platindraht mit dem Erdboden in Verbindung gesetzt. Wenn man diesem Wasser eine geriebene Harzstange nähert, wird die positive Elektricität des Bodens angezogen und auf der Oberfläche des Wassers ausgebreitet. Da der Platindraht als Eintritts-Elektrode einer Fluth von positiver Elektricität dient, so bekleidet er sich mit Sauerstoffblasen, in einer der eintretenden Elektricität proportionalen Menge; dies wenigstens geschieht, wenn man eine Elektrode von sehr kleiner Oberfläche anwendet, z. B. eine Wollaston'sche Spitze. Die Sauerstoffentwicklung unter diesen Umständen ist übrigens eine

Digitized by Google

wohl bekannte Thatsache, ist namentlich bestätigt durch Hrn. Buff und Hrn. Soret.

Da der Sauerstoff in Freiheit gesetzt worden, so muſs der mit ihm verbunden gewesene Wasserstoff überschüssig in dem Wasser oder auf dessen Oberfläche bleiben. Dieser der Ladung proportionale Ueberschuſs von Wasserstoff bleibt gewissermaſsen *versteckt (dissimulé)*, so lange das Wasser elektrisirt wird, entwickelt sich aber im Moment der Entladung.

Es reicht hin, die Harzstange zu entfernen. Die Ladung, die durch Induction festgehalten wurde, flieſst dann durch die Platinspitze in den Boden. Da diese Spitze als Ausfluſs-Elektrode einer positiven Elektricitätsfluth dient, bekleidet sie sich mit Wasserstoffblasen. Der *versteckte* Wasserstoff kommt also während der Entladung wieder zum Vorschein und zwar in Gesammtheit.

Denn nach dem Faraday'schen Gesetz entwickelt dieselbe Elektricitätsmenge, die beim Eintritt 1 Aeq. Sauerstoff entwickelt, beim Austritt 1 Aeq. Wasserstoff.

Da der *versteckte* Wasserstoff in Gesammtheit wieder erscheinen muſs, so kann man keinen Theil davon durch Diffusion abziehen, weder durch Oxydation, noch durch irgend eine physische oder chemische Action, welche die elektrische Ladung unversehrt läſst. Mit anderen Worten: der versteckte Wasserstoff ist weder gebunden, noch gelöst, und dennoch ist er wirklich da, weil man ihn durch Entfernen der Harzstange entwickeln kann.

Ueberdieſs lieſsen sich die Worte *gebunden* oder *gelöst* nur auf Wasserstoff anwenden, der im Innern einer gewissen Masse enthalten wäre; aber hier haben wir, wie es scheint, ein erstes Beispiel einer anderen Art von materieller Verknüpfung. Der versteckte Wasserstoff ist ganz an der *Oberfläche* des Wassers enthalten; ich meine, in dem Theil des Körpers, in welchem die elektrische Ladung sich ausgebreitet befindet.

In der That kann man jeglichen Theil der inneren Wassermasse durch Luft ersetzen; so lange man die

Digitized by Google

Oberfläche nicht verändert, ändert sich die elektrische Ladung und folglich die Menge des versteckten Sauerstoffs auch nicht. Also kann man die Masse aushöhlen, ohne die Menge des versteckten Wasserstoffs zu ändern; dieser befindet sich also an der Oberfläche.

Eben so enthält eine ungleich elektrisirte Wassermasse an ihrer Oberfläche einen der elektrischen Ladung proportionalen Ueberschufs an Sauerstoff.

VI. *Ueber das Maximum der Rotationsgeschwindigkeit für Influenzmaschinen; von W. Holtz.*

Um zu untersuchen, ob der Uebergang der Elektricität von einem Isolator nach einer leitenden Spitze eine merkliche Zeit bedinge, und um hiermit gleichzeitig die Frage zu lösen, bis zu welcher Gränze der Rotationsgeschwindigkeit eine Influenzmaschine gewöhnlicher Art zu gebrauchen sey, stellte ich mir eine Vorrichtung zusammen, mittelst deren ich eine kleine Hartgummischeibe von 150^{mm} Durchmesser in sehr schnelle Rotation versetzen konnte. Dieser Scheibe wurden die zur Bildung einer Influenzmaschine nöthigen Stücke, nämlich eine zweite feste Scheibe mit zwei Oeffnungen und zwei Belegungen, sowie zwei den letzteren gegenüberstehende unter sich verbundene Spitzenreihen hinzugefügt. Es zeigte sich nun zu meiner Ueberraschung, dafs selbst bei einer Geschwindigkeit von 125 Umdrehungen in der Secunde noch keine Abnahme der Wirkung zu spüren war. Vielmehr liefs sich aus der stetig zunehmenden Anzahl der Selbstentladungen einer kleinen Flasche schliefsen, dafs die Elektricitätsmenge constant mit der Rotationsgeschwindigkeit wuchs, so dafs sie, wie vergleichende Versuche ergaben, zuletzt etwa

Digitized by Google

derjenigen einer in gewohnter Weise rotirenden Scheibe von 520^{mm} Durchmesser gleichkam.

Aus diesem Versuche folgt nun, dafs der Uebergang der Elektricität zwischen Isolator und Spitze fast momentan zu nennen ist, da sonst die Ladung und Entladung des ersteren bei so grofser Geschwindigkeit eine Störung erleiden müfste. Und bedenkt man noch, dafs die Spitzen keineswegs so fein waren, als sie hätten seyn können, auch der Glasfläche nicht so nahe standen, als dies bei sorgfältigerer Anordnung geschehen könnte, so ist der Schlufs wohl berechtigt, dafs es für eine Influenzmaschine von guter Bauart überhaupt kein Maximum der Rotationsgeschwindigkeit giebt, wenigstens kein solches, welches durch den Uebergang zwischen Spitze und Isolator bedingt wäre.

Dies in weiterem Umfange zu prüfen, gestattete die mechanische Unvollkommenheit des Apparates nicht, weil in Folge der starken Anziehung der Scheiben bei gröfserer Geschwindigkeit als der oben angegebenen ein Schleifen der Schnüre an den Triebrädern stattfand, während sich ohne elektrische Einwirkung freilich die Rotationsgeschwindigkeit recht gut verdoppeln liefs.

Eine Hartgummischeibe wählte ich nur aus dem Grunde, weil ich fürchtete, dafs eine Glasscheibe zerspringen würde, und weil eine solche auch selten so dünn und gleichmäfsig ist, als es der vorliegende Versuch erfordert. Sonst sind Hartgummischeiben wegen ihrer Biegsamkeit, Veränderlichkeit in Form und Masse und hygroskopischen Eigenschaft für Influenzmaschinen durchaus nicht zu empfehlen.

Man hat wohl behauptet, dafs Influenzmaschinen mit unbelegten rotirenden Scheiben nur innerhalb gewisser Gränzen der Rotationsgeschwindigkeit wirken könnten, während solche mit metallischen Sectoren und schleifenden Federn versehen, wegen des geringeren Uebergangswiderstandes eine viel gröfsere Rotationsgeschwindigkeit zulassen würden. Dies mag theoretisch richtig seyn; prak-

Digitized by Google

tisch aber ist es ohne Bedeutung, da eine solche Geschwindigkeit, dafs jener Uebergangswiderstand in Betracht käme, nach dem Obigen durch mechanische Mittel wohl kaum zu erreichen ist, jedenfalls nicht mit Glasscheiben oder überhaupt mit Scheiben von solcher Gröfse, wie sie für Influenzmaschinen allein zweckentsprechend sind.

VII. *Ueber das Verhältnifs der beiden specifischen Wärmen, insbesondere der festen Körper; von A. Kurz.*

Die interessante Abhandlung von J. J. Müller im Bande 154, Seite 113 u. f. veranlafst mich zu einigen Bemerkungen, die theilweise auch als Nachtrag meines Artikels im VI. Ergänzungsbande, Seite 314 u. f. angesehen werden können.

Der ganze 4. Absatz, S. 119 bis 121, spricht für meine „Schlufsfolgerung, dafs die festen Körper noch aufserhalb der Theorie stehen"; mit welcher natürlich nichts weniger gemeint ist, als dafs man von Anfängen hierzu abstehen sollte. Solch negativen Sinn könnte man vielmehr berechtigter Weise nur etwa dahin präcisiren, dafs für Handbücher und Lehrbücher über Theile der Physik oder über die ganze Physik bis auf Weiteres noch eine volle Lücke bleiben mufs, bei welcher kaum mehr als der Hinweis auf die einschlägige Fachliteratur gegeben werden kann.

Auch der Schlufs S. 126 und 127 gehört hierher. Zu den dort citirten Messungsresultaten bemerke ich, dafs darin noch nach Wertheim's Annahme die kubische

Digitized by Google

Compression als $\frac{1}{3}$ der linearen gesetzt ist. Man vergleiche hiermit meine Abhandlung S. 315, Z. 4 bis 13 (Z. 12 steht 9,387 statt 0,387); in Zeile 21 könnte die Form $\frac{cs\beta}{3\alpha}$ besser ansprechen, in welcher 3α als der kubische thermische und β als der kubische mechanische Ausdehnungscoëfficient erscheint, letzterer pro 1 Kilogramm auf jeder Würfelseite und nach der Wertheimschen Annahme; auf S. 317, Z. 5 v. u. denkt man an $\frac{3\alpha}{\frac{1}{3}\beta}$, indem jetzt 1 Kilogramm total, also $\frac{1}{3}$ Kilogramm auf jede Würfelseite drückt, wie es auch die 3. Anmerkung auf S. 315 oder die 4. aller dortigen Anmerkungen besagt; ebenso ist S. 318, Z. 3 die 5. Anmerkung citirt, welche als 4. auf S. 315 steht; Z. 6 muſs es heiſsen:

$$c - c_{,} = AT\frac{g\alpha^2}{\beta w},$$

wie in Z. 10, indem der Factor g nur wegbliebe, wenn man unter α schon den kubischen thermischen Coëfficienten verstände; ich will die in Zeile 7—9 angedeutete Rechnung noch hersetzen: aus Z. 1 folgt $c - c_{,} = c\,dT$, und nach der Thomson'schen Formel S. 316 (aber ohne Minus-Zeichen):

$$c - c_{,} = \frac{A\alpha T}{w}\,dp,$$

wenn statt dp noch $\frac{g\alpha}{\beta}$ zu setzen ist.

Zum Schlusse noch einige Druck- und andere Versehen in der J. J. Müller'schen Abhandlung: S. 116 muſs bei der dritten der Gleichungen (4) der Zähler k statt 1 stehen, und S. 119, Z. 2 sind lauter runde ϑ zu machen, als auf isothermische Veränderungen bezügliche. Die Gleichung S. 117 muſs lauten $-p\,.\,(\gamma) = \frac{(\alpha)}{(\varepsilon)}$ für die drei dort benannten (eingeklammerten) adiabatischen Coëfficienten, während für die isothermischen Coëfficienten

Digitized by Google

kommt $p \cdot \gamma = \frac{\alpha}{\epsilon}$. S. 123 berechnet sich der Winkel der adiabatischen und isothermischen Curve aus:

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{kq}{v_0} = \tan(-\alpha) \text{ und } \frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{q}{v_0} = \tan(-\alpha');$$

folglich:

$$\tan(\alpha - \alpha') = \frac{q}{v_0} \cdot \frac{k-1}{1-\frac{kq^2}{{v_0}^2}}.$$

Augsburg, im October 1875.

VIII. *Untersuchung der Gase aus dem Jowa-Meteorit.*

Dieser Meteorit fiel am 12. Febr. 1875 in Jowa County, im Staat Jowa, und gehört zur Klasse der Steinmeteore. Hr. P. W. Wright hat die bei verschiedenen Temperaturen aus demselben ausgetriebenen Gase untersucht, und folgende Zusammensetzung für sie gefunden:

	bei 100°	bei 250°	Unter Rothgluth	Schwacher Rothgluth	Voller Rothgluth
CO_2	95,46	92,32	42,27	35,82	5,56
CO	0,00?	1,82	5,11	0,49	0,00
H	4,54	5,86	48,06	58,51	87,53
N	0,00	0,00	4,56	5,18	6,91
	100	100	100	100	100

Das Spectrum der Gase war dem verschiedener Cometen sehr ähnlich *(American Journ. of Science, Ser. III, Vol. X, p. 44)*.

A. W. Schade's Buchdruckerei (L. Schade) in Berlin, Stallschreiberstr. 47.

Digitized by Google

ANNALEN
DER PHYSIK UND CHEMIE.
Band VII. ERGÄNZUNG. Stück 3.

I. *Die unbegränzten regelmäfsigen Punktsysteme als Grundlage einer Theorie der Krystallstructur; von Leonhard Sohncke in Carlsruhe.*

(Auszug aus der gleichnamigen Abhandlung des Verfassers in den Verhandlungen des Naturwiss. Vereins in Carlsruhe. 7. Heft. Carlsruhe 1875.)

Einleitung. Als wahrscheinlichste Vorstellung von der inneren Beschaffenheit der krystallisirten Körper galt bisher jene, welche von Delafosse aufgestellt und von Bravais eingehend verfolgt ist, und die sich kurz so schildern lässt. Wenn eine Schaar unendlich vieler Parallelebenen gleichen Abstandes geschnitten wird von zwei analogen Schaaren irgend welchen anderen, je gleichen, Abstandes, so bildet die Gesammtheit der Schnittpunkte ein sogenanntes *Raumgitter*, d. h. ein Punktnetz mit parallelepipedischer Masche (parallelepipedischem Kern). In den Schnittpunkten liegen nach Bravais die Schwerpunkte der, kongruent und in paralleler Lage zu denkenden, Krystallelemente. Diese Ansicht wird hauptsächlich dadurch gestützt, dafs die Eintheilung der Raumgitter nach dem verschiedenen Grade ihrer Symmetrie genau auf dieselben 7 Abtheilungen führt, welche bei den Krystallen als Krystallsysteme bekannt sind. Andererseits läfst sich ein wesentlicher Einwand erheben. Es giebt nämlich unter den Raumgittern keins mit derartigen Symmetrieverhältnissen, wie sie die halbflächigen Krystalle charakterisiren. Daher mufs die Hülfshypothese gemacht werden, dafs der halbflächige Charakter bei solchen Krystallen schon den Molecülen innewohne, deren Schwerpunkte nichtsdestoweniger als ein Raumgitter angeordnet seyen, gerade so wie die

Digitized by Google

Schwerpunkte von Molecülen vollflächigen Charakters; z. B. wird ein reguläres Tetraëder etwa aus lauter congruenten parallelen Tetraëdern bestehend gedacht, deren Centra ein Gitter mit Würfelmaschen bilden. Ob es überhaupt möglich ist, dafs in dieser Art Molecüle geringeren Symmetriegrades zu einem Raumgitter von höherer Symmetrie zusammentreten, bleibt ganz unerörtert.

Trotz dieser Schwierigkeit konnte Bravais' Ansicht bisher als wahrscheinlich gelten, zumal da sie sich als unmittelbare Folge aus dem möglichst evidenten Princip der regelmäfsigen Punktanordnung in den Krystallen ableiten zu lassen schien[1]). Indessen ist bei dieser von mir gegebenen Ableitung stillschweigend vorausgesetzt, dafs alle Krystallelemente parallel liegen[2]). Läfst man diese ungerechtfertigte Voraussetzung fallen, so liefert die erschöpfende Aufsuchung der aus jenem Princip fliefsenden Folgerungen nicht mehr die Bravais'schen Gitter allein, sondern Resultate von unvergleichlich gröfserer Allgemeinheit, welche nun ohne weitere Hülfshypothese in überraschendster Weise mit den Thatsachen der Krystallographie und Krystallphysik übereinstimmen (z. B. geben sie in einfachster Weise Aufschluss über den Grund der Circularpolarisation in Krystallen). Die Mittheilung dieser Resultate und ihre Vergleichung mit der Natur bildet den Inhalt der vorliegenden Abhandlung.

Hypothese. Folgerungen. Der erste Schritt zur Beantwortung der *Frage nach dem inneren Bau der krystallisirten Körper* geschieht durch Aufstellung des erwähnten höchst einfachen, natürlicher Weise hypothetischen, Princips. Man denke einen Krystall aus lauter congruenten — nicht nothwendig parallel liegenden — Krystallelementen aufgebaut, von denen dahin gestellt bleibt, ob sie chemische

1) Die Gruppirung der Molecüle in den Krystallen. Pogg. Ann. Bd. 132, S. 75—106.

2) Auf die grofse hierin liegende Beschränkung machte mich zuerst mein verehrter College H. Chr. Wiener aufmerksam. Vgl. auch dessen Atomenlehre S. 86.

Digitized by Google

Molecüle oder Aggregate von solchen sind, und man ersetze bei der ganzen folgenden Betrachtung jedes Krystallelement durch seinen Schwerpunkt, dann lautet die *Hypothese*:

> *„Krystalle — unbegränzt gedacht — sind regelmäfsige unendliche Punktsysteme, d. h. solche, bei denen um jeden Punkt herum die Anordnung der übrigen Punkte dieselbe ist, wie um jeden anderen Punkt.“*

Hierdurch ist die Ermittelung aller für die krystallisirten Körper möglichen Structurformen auf die Lösung der Aufgabe zurückgeführt:

> *„Alle überhaupt möglichen regelmäfsigen Punktsysteme von allseitig unendlicher Ausdehnung zu finden.“*

In dieser Form ist die Aufgabe noch nicht gelöst; indessen existirt eine Abhandlung von Camille Jordan[1]), welche in sehr abweichender Gestalt eine mit der vorliegenden nah verwandte, aber viel allgemeinere Aufgabe aus der Geometrie der Bewegung behandelt. (Ueber den Zusammenhang beider Probleme vergl. meine ausführliche Abhandl.) Mit Hülfe der Jordan'schen Arbeit war ich nun im Stande, eine Uebersicht aller überhaupt möglichen regelmäfsigen unendlichen Punktsysteme aufzustellen. Zu dem Zweck mufsten aus Jordan's Resultaten diejenigen herausgesucht werden, die auf die vorliegende Frage Bezug haben; ferner mufsten sie aus der jenem Probleme angemessenen Ausdrucksweise in die geometrische Sprache der Punktsysteme übersetzt werden. Dabei waren verschiedene Unrichtigkeiten zu verbessern und Lücken auszufüllen (Abth. V., *C* fehlt z. B. bei Jordan), was mir mit Hülfe einer früher von mir angestellten Untersuchung über regelmäfsige ebene Punktsysteme[2]) möglich war.

Die regelmäfsigen unbegränzten Punktsysteme sind im Folgendenden nach krystallographischen Gesichtspunkten

1) *Mém. s. l. groupes de mouvements.* In *Brioschi e Cremona Annali di Matematica.* T. II. (1868—69) p. 167—215 und 322—345.

2) Borchardt's Journal f. reine u. angew. Math. Bd. 77, S. 47—101.

Digitized by Google

geordnet und beschrieben. Der Beweis ihrer Vollzähligkeit ist hier nicht geführt; diesen enthält eben die Jordan'sche Abhandlung, welche freilich, nach dem Gesagten, einer nochmaligen Revision bedarf. Dagegen überzeugt man sich leicht davon, dafs jedes der angeführten Systeme wirklich regelmäfsig ist. Dazu dient folgende Betrachtung.

Aus dem Begriff des regelmäfsigen unendlichen Punktsystems folgt, dafs die von jedem Systempunkt nach allen übrigen gezogenen Linienbündel congruent seyn müssen. Denkt man sich nun ein regelmäfsiges unendliches Punktsystem starr gemacht und aus seiner bisherigen Lage herausgerückt, so bilden die zuvor von Systempunkten besetzt gewesenen Orte des Raums ein ihm congruentes System, welches gegenüber dem herausgenommenen beweglichen System das feste heifsen mag. In welchen Systempunkt des festen Systems man nun einen beliebig gewählten Systempunkt des beweglichen auch legen mag: immer kann man in Folge der Congruenz aller Linienbündel bewirken, dafs beide Systeme zur Deckung kommen. Diese Eigenschaft ist charakteristisch für die regelmäfsigen Punktsysteme. Indem man nun eine solche Bewegung, welche das bewegliche System aus einer Lage der Deckung in eine andere Lage der Deckung überführt, als *Deckbewegung* bezeichnet, erkennt man, dafs die Ausführung der, bei jedem System angegebenen, charakteristischen Deckbewegungen den unmittelbaren Beweis für die Regelmäfsigkeit des Systems enthält. Die Deckbewegungen sind theils Schiebungen, theils Drehungen oder Schraubungen um gewisse fest gegebene gerade Linien als Axen.

Namenerklärungen. Die Beschreibung der Systeme wird erleichtert durch Anwendung mehrerer Ausdrücke, die theils neu, theils wenigstens nicht allgemein bekannt sind.

Raumgitter, *Masche*, *Kern* sind in der Einleitung erklärt. Die ein Raumgitter bildenden Punkte werden auch *Knoten* oder *Ecken* der Maschen genannt. Es giebt Raumgitter von der Eigenschaft, dafs, wenn man die Centra ihrer

Digitized by Google

Maschen mit Punkten besetzt, diese Punkte zusammen mit den vorigen Knotenpunkten wieder ein Raumgitter bilden. Obgleich letzteres nun einen anderen Kern hat, so ist es doch oft bequem, das neue Gitter auf den alten Kern zu beziehen, d. h. ihm einen *im Centrum besetzten Kern* zuzuschreiben. Wenn keine Verwechselungen zu befürchten sind, wird vom Worte Kern auch in dieser Weise Gebrauch gemacht werden.

Ebene oder räumliche Gitter, die nur benutzt werden, um die Lage der Punkte eines regelmäfsigen Systems auf sie beziehen und dadurch einfacher beschreiben zu können, ohne dafs die Knoten der Gitter selbst mit Punkten jenes Systems besetzt sind, mögen *Netze* heifsen.

Zweizählige (binäre),
Dreizählige (ternäre, rhomboëdrische),
Vierzählige (quaternäre, quadratische),
Sechszählige (senäre, hexagonale)
} *Axen* (oder Symmetrieaxen)

eines unendlichen regelmäfsigen Punktsystems sind solche Grade, um welche entweder eine Drehung allein oder eine Drehung mit gleichzeitiger Verschiebung längs derselben (d. h. eine Schraubung) resp. um $\frac{2\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{6}$ ausgeführt werden mufs, damit das System mit sich selbst wieder zur Deckung gelange.

Axenschaar ist die Gesammtheit aller parallelen, gleichvielzähligen Axen; eine solche kann wieder aus einer Schaar von Drehungsaxen und einer Schaar von Schraubenaxen zusammengesetzt seyn.

Wenn die meistzähligen Axen in einem Punktsysteme nur nach Einer Richtung verlaufend vorkommen, so heifst die Richtung *Hauptaxe*.

Punktebene ist jede mit Systempunkten besetzte Ebene.

Hauptebene ist eine zur Hauptaxe senkrechte Punktebene.

Wenn eine Gerade in gleichen Abständen mit Punkten besetzt ist, und eine congruent besetzte Gerade ihr parallel läuft, so heifse die Gesammtheit der besetzenden Punkte

Digitized by Google

auf beiden Geraden ein *Streifen*; und zwar ein *gerader*, wenn die Verticalprojectionen der Punkte der einen Geraden auf die andere in die Punkte der letzteren hineinfallen, dagegen ein *Wechselstreifen*, wenn sie mitten zwischen die Punkte der anderen Geraden fallen.

Die Gesammtheit der Punkte, welche zwei Parallelebenen in congruenter Weise besetzen, bildet eine *Schicht*.

Wenn congruente Streifen (resp. Schichten) in gleichen Abständen und parallel in der Ebene (dem Raum) so neben (über) einander liegen, dafs die Verticalprojection aller Streifen (Schichten) auf eine Gränzlinie (Gränzebene) dieselbe Figur giebt, wie die Projection eines einzigen dieser Streifen (Schichten) auf dieselbe Gränzlinie (Gränzebene), so sollen die Streifen (Schichten) *gerade aufgeschichtet* heifsen. Ebenso ist die *Gerade-Aufschichtung* von *Punktebenen* zu verstehn.

Rechts gewunden heifse eine Schraube, welche von einem Punkte der Drehung im Uhrzeigersinn mit gleichzeitiger Annäherung an den Beobachter beschrieben wird; *links gewunden* die entgegengesetzte.

Gewundene Säule nenne ich die Gesammtheit der Eckpunkte zweier congruenter regelmäfsiger Vielecke, die in parallelen Ebenen mit den Mittelpunkten gerade übereinander liegen, deren Seiten aber nicht parallel laufen.

Es giebt *rechts gewundene* und *links gewundene* Säulen.

Rhombentetraëder (rhombisches Sphenoïd Naumann, gleichflächiges Tetraëder J. T. Müller) entspricht der gewundenen Säule, wenn statt des Vielecks eine gerade Linie genommen wird; es ist der Halbflächner des Rhombenoctaëders und wird von 4 congruenten spitzwinkligen Dreiecken begränzt. Durch zweizählige Drehungen um 3, durch sein Centrum gehende, aufeinander senkrechte Axen, die in den Mitten zweier Gegenkanten auf letzteren senkrecht stehn, gelangt es mit sich selbst zur Deckung. Einfachste Construction durch Verbindung der Seitenmitten eines beliebig gegebenen spitzwinkligen Dreiecks und Zusammenfaltung der 4 so gebildeten Dreiecke; je nachdem

Digitized by Google

man nach der einen oder der anderen Seite zusammenfaltet, entstehn zwei symmetrische, nicht zur Deckung zu bringende (enantiomorphe, Naumann) Tetraëder.

Ein N-eck mit den Winkeln des regelmäfsigen N-ecks, aber mit nur abwechselnd gleichen Seiten heifse *halbregelmäfsig*.

Beziehung zwischen den regelmäfsigen Punktsystemen und den Raumgittern. Uebersicht über die Raumgitter. Die Vergleichung aller regelmäfsigen Punktsysteme ergiebt den wichtigen Satz:

Jedes regelmäfsige, allseitig unendliche Punktsystem ist entweder ein Raumgitter, oder es besteht aus mehreren in einandergestellten congruenten Raumgittern. — Alle aus Schiebungen bestehenden Deckbewegungen des Systems sind identisch mit denen des zu Grunde liegenden Raumgitters, welches das „Grundgitter" heifsen mag.

Hiernach ist es nöthig, einiges über Raumgitter voranzuschicken. Dafs sie zu den regelmäfsigen Systemen gehören, erkennt man unmittelbar durch Ausführung derjenigen Deckbewegungen, die in Schiebungen parallel und gleich den Kanten des als Kern dienenden Parallelepipeds bestehn. Je nach der Beschaffenheit des Kerns giebt es, wie Bravais[1]) gezeigt hat, 14 verschiedene Gattungen von Raumgittern, die sich wieder in 7 durch ihre Symmetrieverhältnisse unterschiedene Klassen bringen lassen, entsprechend den vollflächigen Gestalten der 7 Krystallsysteme. In der hier folgenden *Uebersicht über die Raumgitter* ist der Name jedes einzelnen nach der Beschaffenheit des Kerns gewählt[2]).

1) *Mém. s. l. systèmes formés par des points distrib. regulièr.* Im *Journ. de l'école polyt.* T. XIX. 1850. Vergl. auch Sohncke Gruppirung der Molecüle. Pogg. Ann. Bd. 132.

2) Ein Universalmodell der Raumgitter, welches durch Veränderung der Dimensionen und der Winkel alle 14 Gattungen von Raumgittern zu veranschaulichen geeignet ist, ist vom Mechaniker Heckmann in Carlsruhe nach meinen Angaben construirt; es befindet sich im physik. Cabinet des Carlsruher Polytechnicums.

Digitized by Google

Klasse I. Raumgitter ohne Symmetrieebene und ohne Axe (entsprechend dem klinorhomboïdischen Krystallsystem).

Eine Unterabtheilung:

1) *Raumgitter der schiefen Säule mit rhomboïdischer Basis.*

Klasse II. Raumgitter mit einer Schaar von Symmetrieebenen und einer dazu senkrechten Schaar zweizähliger Drehungsaxen (entsprechend dem klinorhombischen Krystallsystem).

Zwei Abtheilungen:

2) *Raumgitter der geraden Säule mit rhomboïdischer Basis.*

3) *Raumgitter der, im Centrum besetzten, geraden Säule mit rhomboïdischer Basis* (oder der klinorhombischen Säule) läfst sich ansehn als aus zwei congruenten Gittern der vorigen Art bestehend, parallel so ineinander gesetzt, dafs die Punkte des einen in den Mitten der Maschen des andern liegen. Der Kern ist eine klinorhombische Säule, gebildet von den vier Ecken einer Seite der geraden Säule und von zwei, diesseits und jenseits derselben in halber Säulenhöhe gelegenen Paaren von nächstbenachbarten Säulencentren. Aber es ist bequemer, die Bezeichnung „Kern“ hier auch auf die *im Centrum besetzte* gerade Rhomboïdsäule auszudehnen (vergl. Definition von „Kern“ S. 341).

Klasse III. Raumgitter mit drei senkrechten Schaaren von Symmetrieebenen, deren Schnittlinien zweizählige Drehungsaxen sind (entsprechend dem rhombischen Krystallsystem).

4 Unterabtheilungen:

4) *Raumgitter des rechtwinkligen Parallelepipeds.*

5) *Raumgitter des rechtwinkligen, im Centrum besetzten, Parallelepipeds* läfst sich ansehn, als aus zwei congruenten, parallel mitten ineinandergestellten Gittern der vorigen Art bestehend.

6) *Raumgitter der geraden Rhombensäule.*

7) *Raumgitter der geraden, im Centrum besetzten, Rhom-*

Digitized by Google

bensäule läfst sich ansehn als aus zwei congruenten, parallel mitten ineinander gestellten Gittern der vorigen Art bestehend. Besser betrachtet man es als aus vier congruenten Gittern des rechtwinkligen Parallelepipeds zusammengesetzt, die parallel so ineinander stehn, dafs die Mitten der drei Arten von parallelen Maschenseiten des einen Gitters mit Punkten der drei andern Gittern besetzt sind. Die drei Punktpaare dreier Theilgitter, welche die Seitenmitten der Maschen des vierten Gitters besetzen, bilden die Ecken eines Rhombenoctaëders. Je vier Nachbarpunkte, bezüglich angehörig den vier Theilgittern, nämlich ein Eckpunkt einer Masche des einen, und die Centralbesetzungspunkte der drei in jener Eckę zusammenstofsenden Maschenseiten, bilden ein Rhombentetraëder. Fig. 1, Taf. IV stellt die Projection zweier benachbarten, zu derselben Symmetrieebene parallelen Punktebenen, und gleichzeitig des ganzen Gitters, auf eine von ihnen vor. Die eine Gitterebene enthält nur Punkte von zwei Theilsystemen, die andere nur Punkte der zwei anderen, resp. bezeichnet durch 1, 2, 3, 4.

Klasse IV. Raumgitter mit vier Schaaren von je in einer Geraden unter 45° *sich schneidenden Symmetrieebenen, deren Schnittlinien eine Schaar vierzähliger Drehungsaxen bilden, und mit einer fünften Schaar Symmetrieebenen, senkrecht auf den vorigen* (entsprechend dem quadratischen Krystallsystem).

2 Unterabtheilungen:

8) *Raumgitter der quadratischen Säule.*

9) *Raumgitter der im Centrum besetzten quadratischen Säule* läfst sich ansehn als aus zwei congruenten, parallel mitten ineinander gesetzten Gittern der vorigen Art bestehend.

Klasse V. Raumgitter mit drei Schaaren von je in einer Geraden unter 60° *sich schneidenden Symmetrieebenen, deren Schnittlinien eine Schaar dreizähliger Drehungsaxen bilden* (entsprechend dem rhomboëdrischen Krystallsystem).

1 Unterabtheilung:

10) *Raumgitter des Rhomboëders.* Die congruente Be-

Digitized by Google

setzung aller Hauptebenen besteht in Gittern mit gleichseitig dreieckiger Masche. Von vier aufeinander folgenden Hauptebenen liegen nur die Punkte der beiden äufsersten vertical übereinander, während die der zweiten vertical über den Mitten der abwechselnden Maschendreiecke der ersten liegen, und die der dritten vertical über den Mitten der noch übrigen Dreiecke der ersten. Die Projection von drei benachbarten Hauptebenen auf eine von ihnen ist identisch mit der des ganzen Gitters und bildet ein Netz kleinerer, gleichseitig dreieckiger Maschen. Hier sind die Seiten eines durch sechs zusammenliegende Dreiecke gebildeten regelmäfsigen Sechsecks die Projectionen der Randkanten eines Rhomboëders, dessen zwei Endecken sich in die Sechseckmitte projiciren.

Klasse VI. Raumgitter mit sechs Schaaren von je in einer Geraden unter 30° *sich schneidenden Symmetrieebenen, deren Schnittlinien eine Schaar sechszähliger Drehungsaxen bilden, und mit einer siebenten Schaar Symmetrieebenen, senkrecht auf den vorigen* (entsprechend dem hexagonalen Krystallsystem).

1 Unterabtheilung:

11) *Raumgitter der geraden regelmäfsig dreiseitigen Säule.*

Klasse VII. Raumgitter mit neun Schaaren von Symmetrieebenen, gelegen wie diejenigen eines Würfels, deren Schnittlinien drei Schaaren vierzähliger, vier Schaaren dreizähliger, sechs Schaaren zweizähliger Drehungsaxen bilden (entsprechend dem regulären Krystallsystem).

3 Unterabtheilungen:

12) *Raumgitter des Würfels* (cubisches Gitter).

13) *Raumgitter des im Centrum besetzten Würfels* (granatoëdrisches Gitter) läfst sich ansehn als aus zwei congruenten, parallel mitten ineinander gestellten Gittern der vorigen Art bestehend. Eine Würfelecke, die drei Nachbarecken desselben Würfels, sein Centrum und die Centra derjenigen drei Nachbarwürfel, die durch je drei von den vier benutzten Würfelecken bestimmt sind, bilden die acht

Digitized by Google

Ecken eines Rhomboëders, welches der Kern dieses Gitters ist, und deren vier ein Granatoëder (Rhombendodekaëder) zusammensetzen.

14) *Raumgitter des in den Seitenmitten besetzten Würfels* (octaëdrisches Gitter). Die Beschreibung des Raumgitters 7) paſst auch hier vollständig, sobald die dortige rechtwinklig parallelepipedische Masche durch eine cubische ersetzt wird. Eine Ecke eines Würfels und die Centralbesetzungspunkte seiner drei daselbst zusammenstoſsenden Seiten bilden ein reguläres Tetraëder. Zwei gegenüberliegende Ecken des Würfels sind die Endecken, und die Mittelpunkte seiner sechs Seiten die Randecken eines Rhomboëders, das aus einem Octaëder und zwei Tetraëdern der genannten Art zusammengesetzt ist, und welches den Kern des Gitters bildet.

Andererseits läſst es sich auch als ein Gitter der quadratischen, im Centrum besetzten, Säule auffassen, deren Höhe gleich der Diagonale des Grundquadrats; nämlich von zwei mit einer Fläche aneinanderliegenden Würfeln bilden die Mittelpunkte der zu jener Fläche senkrecht stehenden acht Flächen und der Mittelpunkt der gemeinsamen Fläche eine solche im Centrum besetzte Quadratsäule.

In Betreff der vollständigen Angabe aller Drehungs- und Schraubenaxen sowohl bei den Raumgittern, als bei den folgenden Punktsystemen muſs auf die ausführliche Arbeit verwiesen werden.

Aufzählung und Beschreibung der regelmäſsigen Punktsysteme von allseitig unendlicher Ausdehnung.

Sie lassen sich in zwei Hauptgruppen, jede mit 4 Unterabtheilungen, einordnen:

Systeme mit Hauptaxe:	1.	Die Hauptaxe ist zweizählig.
	2.	- - - drei -
	3.	- - - vier -
	4.	- - - sechs -
Systeme ohne Hauptaxe:	5.	Es finden sich gar keine Axen.
	6.	- - - nur zweizählige Axen.
	7.	- - - - zwei- und dreizählige Axen.
	8.	- - - - zwei- und drei- und vierzählige Axen.

Digitized by Google

Diese acht Abtheilungen sollen nicht ganz in obiger Reihenfolge behandelt werden, sondern die dritte vor der zweiten und die fünfte und sechste resp. vor und nach der ersten. Dann entsprechen diese Klassen vollständig jenen der Raumgitter, nur dafs statt der dortigen siebenten Klasse hier zwei (7. und 8.) auftreten.

Klasse I. Systeme ohne Axe (klinorhombisches Krystallsystem).

Hierher gehört nur ein System:

Das Raumgitter 1) *der schiefen Säule mit rhomboïdischer Basis selbst.*

Klasse II. Systeme mit zweizähliger Hauptaxe (klinorhombisches Krystallsystem).

Alle bestehn aus zwei ineinandergestellten congruenten Raumgittern zweiter Klasse, die im speciellen Fall auch in eins zusammenfallen können. Alle geben als Verticalprojection auf eine Hauptebene die Fig. 2, Taf. IV, in welcher die Schnittpunkte der Axen mit $\times$ bezeichnet sind.

1) *Streifensystem* (System der geraden Säule mit rhomboïdischer Basis).

2) *Zusammengesetztes Streifensystem* (System der klinorhombischen Säule).

Grundgitter für das erste System ist das Raumgitter 2) der geraden Rhomboïdsäule, für das zweite System das Raumgitter 3) derselben im Centrum besetzten Säule.

Bei jedem System stehen zwei congruente Grundgitter so ineinander, wie sie aus einem von ihnen hervorgehn durch zweizählige Drehungen um eine zur Säulenkante parallele Grade. Dadurch stellt sich statt jedes Punktes des einfachen Gitters ein Punktpaar ein; alle Paare stehn parallel und ihre Mittelpunkte bilden ein dem Grundgitter congruentes Netz. Alle Hauptebenen sind congruent besetzt mit parallelen, gleichviel gegen einander verschobenen congruenten Streifen (Fig. 2, Taf. IV) und folgen in gleichen Abständen aufeinander. Beim ersten System sind alle Hauptebenen gerade aufgeschichtet, beim zweiten nur die abwechselnden, während die zwischenliegenden aus der

Digitized by Google

Lage der geraden Aufschichtung im Sinne der Streifenerstreckung verschoben sind, um den halben Abstand zweier Nachbarpunkte der Streifengränzlinie. Während Fig. 2, Taf. IV für das erste System eine Hauptebene und zugleich die Projection des zweiten Systems auf sie vorstellt, so ist dieselbe Figur zwar noch die Projection des zweiten Systems auf eine Hauptebene; aber die Besetzung der einzelnen Hauptebene erhält man, indem man auf jedem Streifen der Figur in entsprechender Weise ein Punktpaar um das andere wegläfst.

Specialfälle: Statt des beliebigen Streifens der Hauptebene kann auch eine mit Punkten oder eine mit Punktpaaren äquidistant besetzte Gerade, oder ein gerader Streifen oder ein Wechselstreifen eintreten. Wichtiger noch ist eine andere Art von Specialfällen, die auch bei anderen Systemen noch oft wiederkehrt, nämlich, wenn das Grundgitter mehr Axen besitzt, als für das betreffende System in Betracht kommen. Das Grundgitter kann z. B. zum Kern eine Rhomboïdsäule haben, welche eine rhombische oder rechtwinklig parallelepipedische oder regelmäfsig dreiseitige oder quadratische Säule oder ein Würfel ist; die entstehenden Systeme sind dann mit den Gestalten des rhombischen, hexagonalen, quadratischen, regulären Krystallsystems verwandt, werden aber durch die Beschaffenheit ihrer Axen in das klinorhombische Krystallsystem verwiesen. Beim zusammengesetzten Streifensysteme ist auch der rhomboëdrische Habitus möglich.

3) (*Monoklines*) *Wechselstreifensystem* geht gleich dem Streifensystem aus Raumgitter 2) hervor, jedoch durch eine zweizählige Schraubung (nicht Drehung), deren Schiebung gleich der halben Säulenhöhe. Dadurch erscheinen beide Grundgitter parallel so ineinander gesetzt, dafs die Hauptebenen des einen mitten zwischen denen des anderen liegen, aber beliebig gegen sie verschoben sind. In Fig. 2, Taf. IV sind die mit 1 resp. 2 bezeichneten Punktreihen die Projectionen der gerade aufgeschichteten Hauptebenen des einen resp. anderen Theilgitters auf eine Hauptebene.

Digitized by Google

Die Gesammtheit der Punkte, die sich in ein Punktpaar eines Streifens projiciren, bildet einen Wechselstreifen. Alle Axen sind Schraubenaxen.

Klasse III. Systeme mit nur zweizähligen Axen nach drei aufeinander senkrechten Richtungen (rhombisches Krystallsystem).

Alle bestehn aus vier ineinander gestellten congruenten Raumgittern der Klasse III., die im speciellen Fall auch in eins zusammenfallen können.

1) *Tetraëderschichtensystem mit rechtwinklig parallelepipedischer Masche* (Fig. 3, Taf. IV).

2) *Zusammengesetztes Tetraëderschichtensystem derselben Masche* (Fig. 4, Taf. IV).

3) *Tetraëderschichtensystem mit rhombischer Säulenmasche* (Fig. 4, Taf. IV).

4) *Zusammengesetztes Tetraëderschichtensystem derselben Masche* (Fig. 3, Taf. IV).

Grundgitter dieser vier Systeme sind resp. das Raumgitter 4) des rechtwinkligen Parallelepipeds, Gitter 5) des im Centrum besetzten rechtwinkligen Parallelepipeds, Gitter 6) der geraden Rhombensäule, Gitter 7) derselben im Centrum besetzten Säule. Bei jedem Systeme stehn vier congruente Grundgitter so ineinander, wie sie aus einem von ihnen hervorgehn durch zweizählige Drehungen um drei in irgend einem Orte senkrechte Axen, die den Axen der Grundgitter parallel sind. Dadurch stellen sich statt jedes Punkts des Grundgitters vier Punkte ein, gelegen wie die Ecken eines Rhombentetraëders; alle diese Tetraëder stehen parallel und ihre (von Systempunkten freien) Centra bilden ein dem Grundgitter congruentes Netz, dessen Axen den Tetraëderdrehungsaxen parallel sind. Von den zu einer Axe senkrechten Ebenen bilden je zwei benachbarte eine *Tetraëderschicht*, deren Tetraëdercentra bei den ersten zwei Systemen rechteckige, bei den letzteren beiden rhombische Maschen bestimmen. Fig. 3, Taf. IV ist die Projection des ganzen Systems 1) und zugleich diejenige einer seiner Schichten, welche ja gerade aufgeschichtet

Digitized by Google

sind; dieselbe Rolle spielt Fig. 4, Taf. IV für das System 3). Bei den Systemen 2) und 4) sind nur die abwechselnden Schichten gerade aufgeschichtet, während die zwischenliegenden so verschoben sind, dafs die Projectionen ihrer Tetraëdercentra mitten in die durch Centra der Nachbarschicht gebildeten Maschen fallen. Fig. 4, Taf. IV ist die Projection zweier Nachbarschichten, sowie des ganzen Systems 2) auf eine Schichtengränzebene; dieselbe Rolle spielt Fig. 3, Taf. IV für System 4).

Specialfälle: Statt des Tetraëders ein Rechteck oder ein Punktpaar oder ein Punkt. Statt des beliebigen Streifens in der zu einer Axe senkrechten Ebene ein Wechselstreifen. Benutzung eines quadratischen oder regulären Gitters als Grundgitter giebt Systeme mit Verwandtschaft zum quadratischen, resp. regulären Krystallsystem.

5) *Stufenschichtensystem* (Fig. 5, Taf. IV).

6) *Zusammengesetztes Stufenschichtensystem erster Art* (Fig. 6, Taf. IV).

8) *Zusammengesetztes Stufenschichtensystem zweiter Art* (Fig. 5, Taf. IV).

Grundgitter dieser Systeme sind resp. das Raumgitter 4) des rechtwinkligen Parallelepipeds, dasselbe im Centrum besetzte (5), und dasjenige der geraden Rhombensäule (6). Bei jedem System stehn vier congruente Grundgitter so ineinander, wie sie aus einem hervorgehn durch zwei zweizählige Drehungen und eine zweizählige Schraubung (deren Schiebung gleich der halben Parallelepipedkante, resp. gleich der halben Säulenhöhe), um drei Axen, die denen der Grundgitter parallel sind. Die drei Axen stehn nicht in einem Punkt aufeinander senkrecht, sondern beide Drehungsaxen schneiden die Schraubenaxe in einem Abstand gleich der halben Schiebungsgröfse der Schraubenbewegung. Dadurch stellen sich statt jedes Punkts des Grundgitters zwei Punktpaare ein (*a* und *b* der Fig. 5, Taf. IV), deren eines in der Zeichnungsebene, das andere in einer Parallelebene zu denken). Beide zusammen sollen eine *Stufe* heifsen, und die Mitte der Linie, die beide Punktpaarmitten

Digitized by Google

verbindet, heifse „Mittelpunkt der Stufe“. Wenn a in, b oberhalb der Zeichnungsebene gedacht wird, so ist die Durchlaufung des Linienzuges ab einer Rechtsschraubenbewegung verwandt; ist aber a höher zu denken als b, so entspricht ba einer Linksschraube; daher sind *rechte* und *linke Stufen* zu unterscheiden, und folglich auch *rechte und linke Stufenschichtensysteme*. Jede zu einer Drehungsaxe senkrechte Punktebene ist mit gerade aufgeschichteten Streifen besetzt.

Je zwei benachbarte parallele Punktebenen bilden eine *Stufenschicht* (Fig. 5, Taf. IV). Diese Figur ist zugleich die Projection des ganzen Stufenschichtensystems auf eine Schichtengränzebene, denn alle Schichten sind gerade aufgeschichtet. Bei beiden Arten zusammengesetzter Stufenschichtensysteme sind nur die abwechselnden Schichten gerade aufgeschichtet, die zwischenliegenden aber verschoben; diese Verschiebung ist bei System 6) parallel und gleich der halben Diagonale des in die Hauptebene fallenden Rechtecks des Grundgitters, bei 7) parallel der Streifenerstreckung senkrecht zur Schraubenaxe, und gleich dem halben Punktabstand einer Streifengränzlinie. Daher kann man beide zusammengesetzte Systeme ansehen als bestehend aus zwei congruenten, parallel ineinander gestellten Stufenschichtensystemen 5). Fig. 6, Taf. IV ist die Projection zweier Nachbarstufenschichten des Systems 6), und zugleich die des ganzen Systems auf eine Schichtengränzebene. Es bedeuten die stark ausgezogenen und stark punktirten Linien die Projection der einen Schicht, die schwachen die der anderen. Ebenso ist Fig. 5, Taf. IV die Projection zweier Nachbarschichten des Systems 7) und zugleich die des ganzen Systems, indem die mit 1 bezeichneten Punktreihen der einen, die mit 2 bezeichneten der anderen Schicht angehören.

Einfacher kann man die Systeme 5) und 7) als aus zwei congruenten ineinander gestellten Systemen bestehend ansehn, die aus der völlig symmetrischen Lage herausgerückt sind; nämlich System 5) aus zwei Streifensystemen II., 1,

Digitized by Google

die so specialisirt sind, wie sie aus dem rechtwinklig parallelepipedischen Gitter hervorgehn; und System 7) aus zwei ebenso specialisirten Systemen der klinorhombischen Säule II, 2. In beiden Fällen entsprechen dem einen und dem andern Theilsystem die ausgezogenen und die punktirten Linien der Fig. 5, Taf. IV.

Specialfälle: Statt des beliebigen Streifens eine mit Punkten oder Punktpaaren äquidistant besetzte Gerade, oder ein gerader Streifen oder ein Wechselstreifen. Die Dicke der Stufenschicht kann $= 0$ werden, so dafs sie in eine Punktebene von der Besetzung der Fig. 5, Taf. IV übergeht. Der Zwischenraum zwischen zwei Schichten kann gleich der Schichtendicke seyn. Die benutzten Grundgitter können den Systemen den Habitus eines der folgendenn Krystallsysteme verleihen.

8) (*Rhombisches*) *Wechselstreifensystem* (Fig. 7, Taf. IV). Vier congruente Raumgitter 4) des rechtwinkligen Parallelepipeds stehn so ineinander, wie sie aus einem hervorgehn durch zweizählige Schraubenbewegungen um drei Axen, welche wie drei nicht zusammenhängende aufeinander senkrechte Kanten eines Parallelepipeds liegen, dessen Kanten parallel und gleich den Viertelskanten der Grundgitterparallelepipeden. Die Schiebung dieser Schraubenbewegung ist gleich der halben Maschenkante des Grundgitters. — Einfacher sieht man das System als aus zwei congruenten monoklinen Wechselstreifensystemen II., 3 bestehend an, die so specialisirt sind, dafs vier Mittellinien benachbarter Wechselstreifen die Kanten einer geraden Säule mit rechteckiger Basis bilden. Eins der Theilsysteme steht so im anderen, wie es aus ihm durch eine gewisse zweizählige Schraubenbewegung hervorgeht. Fig. 7, Taf. IV ist die Projection des Systems auf eine zu den Mittellinien der Wechselstreifen senkrechte Ebene; je ein verbundenes Punktpaar ist die Projection eines Wechselstreifens. In einen mit h bezeichneten Ort projiciren sich alle Punkte, die eine verticale Gerade in gleichen Abständen ϑ (Kantenlänge der Grundgittermasche) besetzen, und deren nächster

Digitized by Google

den beliebigen Abstand h von der Zeichnungsebene hat. Analoges gilt von den anderen Punkten der Figur. Vier Punkte wie $-h, h, \frac{\vartheta}{2} - h, \frac{\vartheta}{2} + h$, welche vier benachbarten Wechselstreifen angehören, bilden eine Art von rechts gewundener, freilich nicht regelmäfsiger, Schraubenlinie. Ebenso gut können Linksschrauben auftreten. Also kann man *rechte* und *linke Wechselstreifensysteme* unterscheiden.

Specialfälle: Die Ebenen der Wechselstreifen beider Theilsysteme parallel zu einander und zu einer Symmetrieebene des Grundgitters, oder die Ebenen beider Wechselstreifenarten senkrecht zu einander; oder beide Wechselstreifen ohne Längsschiebung gegeneinander ($h = 0$); oder statt des Wechselstreifens eine äquidistant besetzte Gerade. Quadratisches oder reguläres Grundgitter.

9) *Wechselschichtensystem* (Fig. 8 und 9, Taf. IV).

10) *Zusammengesetztes Wechselschichtensystem* (Fig. 10, Taf. IV).

Grundgitter für 9) ist das des rechtwinkligen Parallelepipeds 4), und für 10) das der geraden Rhombensäule 6). Vier congruente Grundgitter stehn so ineinander, wie sie aus einem hervorgehn durch zwei Schraubungen und eine Drehung um drei den Axen des Grundgitters parallele Gerade. Beide Schraubenaxen schneiden sich, während die Drehungsaxe bei beiden vorbeigeht in Entfernung gleich $\frac{1}{4}$ der parallelen Karte der rechtwinklig parallelepipedischen Masche, resp. der parallelen Rhombendiagonale des Grundgitters. Die zu den Schraubungen erforderlichen Schiebungen sind resp. gleich den halben parallelen Kanten der Parallelepipedmasche, der halben Säulenhöhe und der halben Rhombendiagonale der Säulenmasche. — Einfacher sieht man System 9) als aus zwei monoklinen Wechselstreifensystemen II, 3 bestehend an, so specialisirt wie beim vorigen System III, 8; eins geht aus dem andern hervor durch eine gewisse zweizählige Drehung. Fig. 8, Taf. IV ist die Projection auf eine zur Erstreckung der Wechselstreifen senkrechte Ebene. Ebenso besteht System 10) aus

Digitized by Google

zwei monoklinen Wechselstreifensystemen, bei deren jedem die Mittellinien von vier benachbarten Wechselstreifen die Kanten einer rhombischen Säule bilden. Fig. 10, Taf. IV ist die Projection auf eine zu den Mittellinien senkrechte Ebene. Auch läfst sich System 10) als aus zwei Systemen 9) zusammengesetzt ansehn.

Projicirt man System 9) auf eine senkrecht zu der bei der Construction benutzten Drehungsaxe stehende Ebene, so entsteht Fig. 9, Taf. IV. Diese ist auch die Projection einer einzelnen Schicht, indem die ausgezogenen Linien der einen, die punktirten der anderen Gränzebene angehören; sie heifse eine *Wechselschicht*; ihre beiden Gränzebenen sind besetzt mit gerade aufgeschichteten Streifen. Diese Figur lehrt, dafs das System als aus zwei Streifensystemen II, 1 bestehend angesehn werden kann, die so specialisirt sind, wie sie aus dem Gitter des rechtwinkligen Parallelepipeds hervorgehn; eines steht so im andern, wie es aus ihm entsteht durch zweizählige Schraubung um eine gewisse zu den Streifen parallele Gerade. — In gleicher Weise läfst sich System 10) als aus Wechselschichten aufgebaut ansehn, die aber nicht mehr sämmtlich gerade aufgeschichtet sind. Da man *rechte und linke Wechselschichten* unterscheiden mufs, analog den rechten und linken Stufenschichten (III, 5—7), so giebt es rechte und linke Systeme 9) und 10).

Klasse IV. Systeme mit vierzähliger Hauptaxe (quadratisches Krystallsystem).

Abtheilung A. Systeme ohne anders gerichtete Axen.

Alle bestehn aus vier congruenten ineinander gesetzten Raumgittern der Klasse IV, und zwar haben die Systeme 1) bis 3) als Grundgitter das der Quadratsäule 8), die Systeme 4) und 5) dasjenige der im Centrum besetzten Quadratsäule 9). Alle geben als Projection auf eine Hauptebene die Fig. 11, Taf. IV, gebildet aus congruenten parallelen Quadraten, deren Centra ein Netz von quadratischer Masche bestimmen. Durch die Knoten und Maschenmitten

Digitized by Google

dieses Netzes gehn die vierzähligen Axen; parallel zu ihnen verlaufen zweizählige durch die Mitten der Maschenseiten.

1) *Quadratsäulensystem.* Die vier Grundgitter stehn so ineinander, wie sie aus einem von ihnen hervorgehn durch vierzählige Drehungen um eine zur Säulenaxe parallele Gerade; dadurch stellen sich statt jedes Grundgitterpunkts vier Punkte ein, die Ecken eines Quadrats bildend. Alle Quadrate stehn parallel, und ihre Centra bilden ein dem Grundgitter congruentes Netz. Das System besteht aus gerade aufgeschichteten Hauptebenen von der Besetzung Fig. 11, Taf. IV.

Specialfälle: Die von den zugewandten Ecken von vier Quadraten der Fig. 11, Taf. IV gebildeten Quadrate können ersteren congruent seyn. Als Grundgitter kann das cubische dienen. Analoge Specialfälle bei den folgenden Systemen.

2*a* und *b*). *Rechtes resp. linkes (vierzähliges) Schraubensystem.* Statt der Drehung beim vorigen System dient hier eine vierzählige Rechts- oder Linksschraubung, deren Schiebung gleich $\frac{1}{4}$ Säulenhöhe $\left(\frac{\vartheta}{4}\right)$ des Grundgitters. Die Hauptebenen sind congruent, mit quadratischem Gitter besetzt. Sie folgen in gleichen Abständen $\frac{\vartheta}{4}$ aufeinander. Das Quadratgitter jeder folgenden ist um 90° gegen das der vorhergehenden gedreht, also ihr wieder parallel. Fig. 11, Taf. IV ist die Projection von vier folgenden Hauptebenen, und zugleich die des ganzen Systems, auf eine Hauptebene. Das System läfst sich ansehn als Gesammtheit paralleler Vierpunktschrauben, d. h. von Punkten, die auf Schraubenlinien in gleichen Abständen so stehn, dafs jeder Umgang vier Punkte trägt, und der fünfte Punkt wieder vertical über dem ersten liegt.

3) *Kreuzsprossensystem* entsteht wie das vorige, nur dafs als Schiebung bei der Schraubenbewegung die halbe Säulenhöhe ϑ des Grundgitters genommen wird. Die Hauptebenen folgen in gleichen Abständen $\frac{\vartheta}{4}$ aufeinander;

Digitized by Google

die abwechselnden sind mit Punktpaaren besetzt, so gelegen wie die Endpunkte der Diagonalen *einer* Richtung in den Quadraten der Projectionsfigur; die zwischenliegenden Hauptebenen tragen Punktpaare, deren Projectionen die Endpunkte der anderen Diagonalen derselben Quadrate sind. Also ist Fig. 11, Taf. IV die Projection zweier benachbarter Hauptebenen, sowie die des ganzen Systems, auf eine von ihnen. Die Verticallinien, die sich in je 1 Quadratcentrum projiciren, dienen als Träger für senkrecht zu ihnen in gleichen Abständen angebrachte, abwechselnd gekreuzt stehende, Verbindungslinien von Punktpaaren (Kreuzsprossen).

4) *Quadratoctaëdersystem* geht aus Gitter 9) hervor, wie das Quadratsäulensystem IV, *A.* 1 aus Gitter 8, so dafs statt jedes Grundgitterpunkts vier wie die Ecken eines Quadrats liegende Punkte eintreten. Die Centra aller dieser parallelen Quadrate bilden ein dem Grundgitter congruentes Netz. Das System ist ansehbar als aus zwei parallel mitten ineinander gesetzten Systemen IV, *A.* 1 gebildet. Die in gleichen Abständen folgenden Hauptebenen sind besetzt wie bei IV, *A.* 1. Fig. 11, Taf. IV ist die Projection zweier Nachbarhauptebenen und zugleich des ganzen Systems auf eine von ihnen; darin gehören die mit 1 resp. 2 bezeichneten Quadrate der einen resp. anderen Hauptebene an.

5) (*Vierzähliges*) *Gegenschraubensystem* geht aus Gitter 9) hervor, wie das Schraubensystem IV, *A.* 2 aus Gitter 8). Es läfst sich ansehn als aus zwei congruenten Schraubensystemen bestehend, die parallelaxig so ineinander stehn, dafs die Schraubenmittellinien des einen mitten zwischen je vier solchen des anderen verlaufen, und dafs das eine System gegen das andere um eine halbe Schraubenhöhe gehoben ist. Die Hauptebenen, congruent besetzt, folgen in gleichen Abständen aufeinander; jede trägt zwei parallele, congruente, beliebig ineinander gesetzte, quadratmaschige Punktgitter, doch ist die Besetzung jeder folgenden gegen die vorige um 90° gedreht. Fig. 12, Taf. IV

Digitized by Google

ist die Projection von vier folgenden Hauptebenen, und zugleich des ganzen Systems, auf eine von ihnen; darin bedeuten 1, 2, 3, 4 resp. Punkte der vier Hauptebenen. Die mit den Mittellinien der Vierpunktschrauben zusammenfallenden Schraubenaxen des Systems haben entgegengesetzten Drehungssinn, als die, welche mitten zwischen je vier der vorigen verlaufen. Man sieht z. B. unmittelbar, dafs die einander zugewandten Punkte von vier Nachbarschrauben eine entgegengesetzt gewundene Vierpunktschraube von gleicher Schiebung bilden. Daher ist es gleichgültig, ob man der Construction ein rechtes oder linkes Schraubensystem zu Grunde legt.

Klasse IV.

Abtheilung B. Systeme mit gewissen zweizähligen Axen senkrecht zur Hauptaxe.

Die vierzähligen Axen sind vertheilt wie bei Abth. *A*.

Alle Systeme bestehn aus acht congruenten Raumgittern (in speciellen Fällen aus vier oder zwei oder einem), oder einfacher aus zwei congruenten Systemen der vorigen Abtheilung; eines der letzteren steht so im anderen, wie es aus ihm hervorgeht durch zweizählige Drehung um eine Gerade, welche zwei nächstbenachbarte vierzählige Axen senkrecht schneidet. Daher treten statt jedes Punkts der Systeme der Abtheilung *A* hier Punktpaare auf. Alle Systeme geben als Projection auf eine Hauptebene die Fig. 13, Taf. IV, gebildet aus congruenten, parallelen, mit gleichartigen Seiten einander zugewandten, halbregelmäfsigen Achtecken, deren Centra ein quadratisches Maschennetz bestimmen. Durch die Knoten und Mitten dieser Maschen verlaufen die vierzähligen Axen. Von den zur Hauptaxe senkrechten zweizähligen projiciren sich die Drehungsaxen in die Diagonalen, sowie in und mitten zwischen die Seiten der Netzmaschen, die Schraubenaxen mitten zwischen zwei Diagonalen.

1) *System der gewundenen Quadratsäule* entspringt aus IV, *A*. 1. Fig. 11, Taf. IV ist die Besetzung einer Hauptebene, Fig. 13, Taf. IV die Projection einer von zwei Nachbar-

Digitized by Google

hauptebenen gebildeten Schicht, sowie des ganzen Systems, das aus solchen Schichten gerade aufgeschichtet ist. Zwei in den Gränzebenen einer Schicht mit den Mittelpunkten gerade übereinander liegende Quadrate bilden eine gewundene Säule, die sich als halbregelmäfsiges Achteck projicirt. Eine solche tritt für jedes Quadrat des Systems IV, *A.* 1 ein.

Specialfälle: Aufser den bei IV, *A.* 1 aufgezählten noch folgende: Die Hauptebene ist mit Quadraten besetzt. deren Seiten den Seiten oder den Diagonalen der Maschen parallel sind; oder sie ist mit einem Quadratgitter besetzt. Die gewundene Säule kann sich als regelmäfsiges Achteck projiciren, oder sie geht in das Projectionsachteck selbst über; hierbei kann die Besetzung der Hauptebene aus völlig aneinander liegenden Achtecken und Quadraten bestehn. Analoge Fälle bei den folgenden Systemen.

2) *Rechtes oder linkes (vierzähliges) Doppelschraubensystem* entsteht aus IV, *A.* 2; es besteht aus parallel stehenden Schrauben, deren jede auf einem Umgang in gleichen Abständen vier Punktpaare beträgt; das Achteck der Fig. 13, Taf. IV ist die Projection eines solchen Umgangs und zugleich der ganzen unendlichen Schraube auf die Hauptebene.

3) *System der gekreuzten Rhombentetraëder* entspringt aus IV, *A.* 3. Besetzung der Hauptebene wie dort. Die von zwei Nachbarhauptebenen gebildete Schicht besteht aus congruenten, parallelen Rhombentetraëdern, deren Centra ein quadratisches Maschennetz bestimmen und deren Drehungsaxen der Hauptaxe und den Maschendiagonalen parallel laufen. Die folgende Schicht besteht aus ebenso vertheilten Tetraëdern, deren jedes aber aus der vorigen Stellung um 90° um seine der Hauptaxe parallele Axe gedreht ist. Ebenso berechtigt ist folgende Auffassung. Man betrachtet je zwei zugewandte Gränzebenen zweier Nachbarschichten als eine neue Schicht, so besteht das ganze System aus diesen neuen Schichten; in jeder liegen congruente parallele Rhombentetraëder, deren Drehungsaxen

Digitized by Google

der Hauptaxe und den Quadratmaschenseiten parallel laufen. Fig. 13, Taf. IV ist die Projection zweier Nachbarschichten und des ganzen Systems auf eine Hauptebene. Die durch die Achteckscentra gehenden Hauptaxen tragen in gleichen Abständen congruente Tetraëder, die abwechselnd parallel sind, während zwei benachbarte gekreuzt stehn. Also besteht das System aus so besetzten Trägeraxen, die auf der Hauptebene ein quadratisches Netz bestimmen.

4) *Doppelsystem des Quadratoctaëders* entspringt aus IV, *A.* 4, wobei statt der Quadrate gewundene Säulen eintreten. Das System läfst sich auch ansehn als aus zwei Systemen der gewundenen Säule IV, *B.* 1 gebildet, die parallel so ineinander stehn, dafs die Centra der gewundenen Säulen des einen Systems in die Mitten derjenigen Quadratsäulenmaschen fallen, die durch acht benachbarte Centra gewundener Säulen des anderen Systems gebildet werden. In Fig. 13, Taf. IV entsprechen die mit 1 und 2 bezeichneten Achtecke den gewundenen Säulen zweier Nachbarschichten. Die Centra aller gewundenen Säulen bilden ein quadratoctaëdrisches Netz.

5) *Doppelsystem der Gegenschrauben* entspringt aus IV, *A.* 5, wobei statt vier Vierpunktschrauben solche mit vier Punktpaaren auf jedem Umgang eintreten. Oder man leitet es aus IV, *B.* 2 ab, ebenso wie IV, *A.* 5 aus IV, *A.* 2. In Fig. 13, Taf. IV ist jedes Achteck die Projection einer solchen Schraube; alle abwechselnden, mit 2 bezeichneten, sind gegen die anderen, mit 1 bezeichneten, um die halbe Schraubenhöhe gehoben.

Klasse IV.

Abtheilung C. Systeme mit anderen zweizähligen Axen senkrecht zur Hauptaxe.

Die vierzähligen Axen sind vertheilt wie bei Abth. *A.*

Alle Systeme bestehn aus acht congruenten Raumgittern (in Specialfällen aus vier oder zwei), oder einfacher aus zwei congruenten Systemen der Abth. *A*; eins der letzteren steht so im anderen, wie es aus ihm hervorgeht durch zweizählige Drehung um eine Gerade, welche zwei

Digitized by Google

der Hauptaxe parallele nächstbenachbarte zweizählige Axen senkrecht schneidet. Alle Systeme geben als Projection auf eine Hauptebene Fig. 14, Taf. IV, gebildet aus zwei symmetrisch ineinander stehenden Gruppen von Quadraten, wobei die Quadratcentra der einen Gruppe die Mitten der von den Centren der anderen gebildeten Quadratmaschen einnehmen. Beide Gruppen entsprechen den zwei zusammensetzenden Systemen der Abtheilung *A*. Die Hauptaxen gehn durch die Knoten und Mitten des, durch die Centra der einen Gruppe bestimmten, quadratischen Maschennetzes; die ihnen parallelen zweizähligen Axen durch die Seitenmitten derselben Maschen. Von den zur Hauptaxe senkrechten zweizähligen Axen projiciren sich zwei Schraubenaxenschaaren in die Diagonalen jener Maschen; parallel und mitten zwischen ihnen verlaufen die Projectionen von Drehungsaxen; parallel den Maschenseiten und mitten zwischen den vierzähligen Axen hindurch verlaufen noch Schraubenaxen.

1) *Zusammengesetztes System der Quadratsäulen* entspringt aus IV, *A*. 1. Fig. 11, Taf. IV ist die Besetzung der Hauptebene, Fig. 14, Taf. IV die Projection der von zwei Nachbarhauptebenen gebildeten Schicht, und zugleich des ganzen Systems, auf eine Hauptebene.

Specialfälle: Die Quadrate der Projectionsfigur kehren einander die Seiten oder die Ecken gerade zu, oder sie reduciren sich zu Punkten oder sie hängen mit den Ecken aneinander, rhombische Zwischenräume lassend. Beide Gränzebenen einer Schicht fallen in dieselbe Ebene. — Das Grundgitter ist cubisch. — Analoge Fälle bei den folgenden Systemen.

2) *a* und *b*) *Rechtes, resp. linkes zusammengesetztes (vierzähliges) Schraubensystem* entspringt aus IV, *A*. 2. Fig. 14, Taf. IV ist die Projection sowohl von acht aufeinander folgenden Hauptebenen, deren jede mit einem quadratischen Gitter besetzt ist, als auch des ganzen Systems. Jedes Quadrat ist die Projection einer Vierpunktschraube.

3) *Zusammengesetztes Kreuzsprossensystem* entspringt aus IV, *A*. 3. Fig. 14, Taf. IV ist die Projection von

Digitized by Google

vier aufeinander folgenden Hauptebenen von analoger Besetzung, wie bei System IV, *A.* 3, und gleichzeitig die Projection des ganzen Systems. Jedes Quadrat ist die Projection sämmtlicher einen Träger besetzender Kreuzsprossen.

Klasse V. Systeme mit dreizähliger Hauptaxe. (rhomboëdrisches Krystallsystem).

Abtheilung A. Systeme ohne sonstige Axen.

Alle bestehen aus congruenten drei ineinander gestellten Raumgittern der Klasse VI oder V. Alle geben als Projection auf eine Hauptebene die Fig. 15, Taf. IV, gebildet aus congruenten parallel stehenden gleichseitigen Dreiecken, deren Centra ein Netz gleichseitig dreieckiger Maschen bestimmen. Die dreizähligen Axen sind sämmtlich parallel, doch zerfallen sie in drei Gruppen: die ersteren gehn durch die Knoten jenes Netzes, die anderen beiden durch die Mitten der abwechselnden dreieckigen Netzmaschen.

1) ***System der dreiseitigen Säule.*** Die drei Grundgitter 11) der regelmäfsig dreiseitigen Säule stehn so ineinander, wie sie aus einem hervorgehn durch dreizählige Drehungen um eine zur Säulenaxe parallele Gerade; dadurch stellen sich statt jedes Grundgitterpunkts drei Punkte ein, die ein gleichseitiges Dreieck bilden. Alle Dreiecke stehn parallel, ihre Centra bilden ein dem Grundgitter congruentes Netz. Fig. 15, Taf. IV ist eine Hauptebene und zugleich die Projection des ganzen, aus diesen Hauptebenen gerade aufgeschichteten, Systems auf eine von ihnen.

2) *a* und *b*) ***Rechtes, resp. linkes (dreizähliges) Schraubensystem*** geht, wie das vorige, aus Gitter 11) hervor, nur dafs dazu eine dreizählige Rechts- oder Linksschraubung dient, deren Schiebung gleich $\frac{1}{3}$ Säulenhöhe ϑ ist. Die Hauptebenen sind congruent mit gleichseitig dreieckigem Gitter besetzt, sie folgen in gleichen Abständen $\frac{\vartheta}{3}$ aufeinander. Das Gitter jeder folgenden ist um 120° gegen das der vorhergehenden gedreht, also ihr wieder parallel. Fig. 15, Taf. IV ist die Projection dreier Nachbarhauptebenen (indem

Digitized by Google

die homologen Ecken aller Dreiecke immer derselben Hauptebene angehören) und zugleich des ganzen Systems auf eine von ihnen. Das System ist ansehbar als Gesammtheit parallel stehender Dreipunktschrauben (zu verstehn analog den Vierpunktschrauben IV, *A.* 2), deren Mittellinien auf der Hauptebene ein gleichseitig dreieckiges Netz bestimmen.

3) ***Rhomboëdersystem*** besteht aus drei rhomboëdrischen Gittern 10); sie stehn so ineinander, wie sie aus einem von ihnen hervorgehn durch dreizählige Drehungen um eine zur Rhomboëderaxe parallele Gerade. Dadurch entstehn aus jedem Grundgitterpunkt drei Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks. Alle Dreiecke stehn parallel und ihre Centra bilden ein dem Grundgitter congruentes rhomboëdrisches Netz. Jede Hauptebene ist besetzt wie bei V, *A.* 1. Fig. 15, Taf. IV ist die Projection dreier Nachbarhauptebenen, und zugleich des ganzen Systems, auf eine von ihnen; darin gehören die Punkte 1, 2, 3, resp. den drei aufeinander folgenden Hauptebenen an.

Specialfälle: Das rhomboëdrische Grundgitter kann eins der drei besonderen Kernrhomboëder haben, welche den drei regulären Gittern zu Grunde liegen, wodurch ein regulärer Habitus entsteht.

Klasse V.

Abtheilung B. Systeme mit gewissen zweizähligen Axen senkrecht zur Hauptaxe.

Die dreizähligen Axen sind vertheilt wie bei Abth. *A.* Alle Systeme bestehn aus sechs congruenten Raumgittern (in speciellen Fällen aus drei oder zwei oder einem) oder einfacher aus zwei congruenten Systemen der vorigen Abtheilung; eins der letztern steht so im andern, wie es aus ihm hervorgeht durch zweizählige Drehung um eine Gerade, welche zwei zunächst benachbarte dreizählige Axen senkrecht schneidet. Daher treten statt jedes Punkts der Systeme der Abtheilung *A.* hier Punktpaare auf. Alle Systeme geben als Projection auf eine Hauptebene Fig. 16, Taf. IV, gebildet aus congruenten, parallelen, gerade neben

Digitized by Google

einander stehenden, halbregelmäfsigen Sechsecken, deren Centra ein gleichseitig dreieckiges Maschennetz bestimmen. Durch die Knoten und Mitten dieser Maschen verlaufen die dreizähligen Axen; die zweizähligen Drehungsaxen projiciren sich in die Höhen der dreieckigen Maschen, die Schraubenaxen ihnen parallel mitten zwischen sie.

1) *System der gewundenen (dreiseitigen) Säule* entspringt aus V, *A.* 1. Fig. 15, Tafel IV ist die Besetzung einer Hauptebene, Fig. 16, Tafel IV die Projection einer von 2 Nachbarhauptebenen begränzten Schicht, sowie des ganzen Systems, das aus solchen Schichten gerade aufgeschichtet ist. Zwei in beiden Gränzebenen mit den Mittelpunkten gerade über einander liegende Dreiecke bilden eine gewundene Säule, die sich als Sechseck projicirt. Eine solche tritt statt jedes gleichseitigen Dreiecks des Systems V, *A.* 1 ein.

Specialfälle: Gerade nebeneinander stehende gleichseitige Dreiecke besetzen die Hauptebene, oder sie ist gänzlich erfüllt von regelmäfsigen Sechsecken, die mit regelmäfsigen Dreiecken umkränzt sind; oder die Besetzung bildet ein Gitter mit gleichseitig dreieckiger Masche. Die gewundene Säule kann sich als regelmäfsiges Sechseck projiciren, oder sie geht in das Projectionssechseck selbst über; dabei können lauter aneinander liegende regelmäfsige Sechsecke (Bienenzellen) auftreten. Analoge Fälle bei den folgenden Systemen.

2) *a* und *b*) *Rechtes resp. linkes (dreizähliges) Doppel-Schraubensystem* entspringt aus V, *A.* 2; es besteht aus parallelen Schrauben, deren jede auf einem Umgang in gleichen Abständen 3 Punktpaare trägt; das Sechseck der Fig. 16, Tafel IV ist die Projection eines solchen Umgangs und zugleich der ganzen unendlichen Schraube auf die Hauptebene.

3) *Doppel-Rhomboëdersystem* entspringt aus V, *A.* 3, wobei statt jedes gleichseitigen Dreiecks eine gewundene Säule eintritt. In Fig. 16, Tafel IV bedeuten die mit 1, 2, 3 bezeichneten Sechsecke die Projectionen gewundener

Digitized by Google

Säulen aus 3 auf einander folgenden Schichten. Alle Säulen stehen parallel; ihre Centra bilden ein rhomboëdrisches Netz.

Klasse V.

Abtheilung C. Systeme mit anderen zweizähligen Axen senkrecht zur Hauptaxe.

Die dreizähligen Axen sind vertheilt wie bei Abth. *A*. Alle Systeme bestehen aus 6 congruenten Raumgittern (in Specialfällen aus 3 oder 2), oder einfacher aus 2 congruenten Systemen der Abth. *A*. Eins der letzteren steht so in anderen, wie es aus ihm hervorgeht, durch zweizählige Drehung um eine Gerade, welche 2 nächst benachbarte dreizählige Axen derselben Gruppe (cf. V, *A*) senkrecht schneidet. Alle Systeme geben als Projection Fig. 17, Tafel IV, gebildet aus 2 symmetrisch in einander stehenden Gruppen gleichseitiger Dreiecke, deren Centra ein Netz regelmäfsig 6-eckiger Maschen bestimmen. Beide Gruppen entsprechen den 2 zusammensetzenden Systemen der Abth. *A*. Die Projection bildet auch congruente, parallele, gerade über einander stehende halbregelmäfsige Sechsecke, deren Centra ein Netz gleichseitig dreieckiger Maschen bestimmen. Durch die Knoten und Mitten der letzteren Maschen gehen die dreizähligen Axen. In die Seiten dieser Maschen projiciren sich die zweizähligen Drehungsaxen, und parallel zu ihnen mitten zwischen sie die Schraubenaxen. Die Systeme dieser Abtheilung lassen sich auch aus denen der vorigen dadurch ableiten, dafs, bei unveränderter Lage der Hauptaxe, alle gewundenen Säulen oder Schrauben um 30° um ihre Mittellinien gedreht werden, was sich in der Figur als eben solche Drehung der Sechsecke um ihre festgehaltenen Centra zeigt.

1) *Zusammengesetztes System der dreiseitigen Säule* entspringt aus V, *A*. 1, oder auf die andere Art aus V, *B*. 1. Fig. 15, Tafel IV ist eine Hauptebene, Fig. 17, Tafel IV die Projection zweier Nachbarhauptebenen und zugleich des ganzen Systems.

Digitized by Google

Specialfälle: Die Hauptebene ist mit gerade über einander stehenden gleichseitigen Dreiecken besetzt; statt der Sechsecke der Projectionsfigur finden sich gleichseitige Dreiecke oder regelmäfsige Sechsecke.

2) *a* u. *b*) *Rechtes resp. linkes zusammengesetztes (dreizähliges) Schraubensystem* entspringt aus V, *A.* 2 oder auf die andere Art aus V, *B.* 2. Die Hauptebene ist mit einem Gitter gleichseitig dreieckiger Maschen besetzt.

Klasse VI. Systeme mit sechszähliger Hauptaxe. (Hexagonales Krystallsystem.)

Abtheilung A. Systeme ohne anders gerichtete Axen.

Alle bestehen aus 6 in einander gesetzten congruenten Raumgittern 11) der geraden dreiseitigen Säule. Alle geben als Projection auf eine Hauptebene Fig. 18, Taf. IV, gebildet aus congruenten, parallelen regelmäfsigen Sechsecken, deren Centra ein Netz gleichseitig dreieckiger Maschen bestimmen. Durch die Knoten des Netzes verlaufen sechszählige Axen.

1) *System der sechsseitigen Säule.* Die Grundgitter stehen so in einander, wie sie aus einem hervorgehen durch sechszählige Drehungen um eine zur Säulenaxe parallele Gerade; dadurch stellen sich statt jedes Grundgitterpunkts 6 Punkte ein, ein regelmäfsiges Sechseck bildend. Die Sechsecke stehen parallel, ihre Centra bilden ein dem Grundgitter congruentes Netz. Das System besteht aus gerade aufgeschichteten Hauptebenen von der Besetzung der Fig. 18, Tafel IV.

2) *a* und *b*) *Rechtes resp. linkes (sechszähliges) Schraubensystem.* Statt der Drehung beim vorigen System dient hier eine sechszählige Rechts- oder Linksschraubung (mit Schiebung $= \frac{1}{6}$ Säulenhöhe ϑ des Grundgitters). Die Hauptebenen sind congruent mit gleichseitig dreieckigem Maschennetz besetzt und folgen in gleichen Abständen $\frac{\vartheta}{6}$ auf einander. Fig. 18, Tafel IV ist die Projection von 6 auf einander folgenden Hauptebenen (so dafs die homologen Ecken aller Sechsecke immer derselben Hauptebene

Digitized by Google

angehören) und zugleich des ganzen Systems auf eine von ihnen. Das System ist ansehbar als Gesammtheit paralleler Sechspunktschrauben, deren Axen auf einer Hauptebene ein gleichseitig dreieckiges Netz bestimmen.

3) *a* und *b*) ***Rechtes resp. linkes Wendeltreppensystem*** wird analog dem vorigen abgeleitet, nur dafs die Schiebung der Schraubenbewegung $\frac{1}{3}$ Säulenhöhe ϑ beträgt. Die Hauptebenen sind congruent besetzt und folgen in gleichen Abständen $\frac{\vartheta}{3}$; jede ist gegen die vorhergehende um 60° um eine sechszählige Axe gedreht. Während die eine Hauptebene mit Punktpaaren besetzt ist, gelegen wie die Endpunkte der einen Schaar paralleler grofser Durchmesser in den Projectionssechsecken, so tragen die 2 folgenden Hauptebenen Punktpaare, gelegen wie die Endpunkte der zweiten und dritten Durchmesserschaar. Fig. 18, Tafel IV ist die Projection dreier auf einander folgender Hauptebenen, sowie die des ganzen Systems, auf eine von ihnen. Die Vertikallinien, die sich in je 1 Sechseckscentrum projiciren, dienen als Träger für senkrecht zu ihnen in gleichen Abständen angebrachte Verbindungslinien von Punktpaaren, deren jede folgende gegen die vorige um 60° um die Axe gedreht ist, so dafs die (halb genommenen) Verbindungslinien eine Wendeltreppe bilden.

4) ***Sternsäulensystem*** wird analog dem vorigen abgeleitet, nur dafs die zur Schraubenbewegung gehörige Schiebung jetzt die halbe Säulenhöhe ϑ beträgt. Die Hauptebenen sind congruent besetzt und folgen in gleichen Abständen; die abwechselnden von ihnen tragen congruente, parallele gleichseitige Dreiecke, deren Centra ein dreieckiges Maschengitter bilden (Fig. 15, Tafel IV); die zwischen liegenden tragen eben solche Dreiecke, nur um 60° gegen die vorige Lage gedreht. Fig. 18, Tafel IV ist die Projection zweier Nachbarhauptebenen, sowie des ganzen Systems; jedes Sechseck ist die Projection von äquidistant über einander liegenden, je um 60° gedrehten gleichseitigen Dreiecken, deren Gesammtheit eine „Stern-

Digitized by Google

säule“ heifsen mag. Das System hat Verwandtschaft mit Specialfällen des Systems der gewundenen Säule V, *B.* 1.

Klasse VI.

Abtheilung B. Systeme mit zweizähligen Axen senkrecht zur Hauptaxe.

Die sechszähligen Axen sind vertheilt wie bei Abth. *A*. Alle Systeme bestehen aus 12 congruenten Raumgittern (in Specialfällen aus 6 oder einem), oder einfacher aus 2 congruenten Systemen der vorigen Abtheilung; eins der letzteren steht so im anderen, wie es aus ihm hervorgeht durch zweizählige Drehung um eine Gerade, die 2 sechszählige Nachbaraxen senkrecht schneidet. Daher treten statt jedes Punkts der Systeme der Abth. *A* hier Punktpaare auf. Alle Systeme geben als Projection auf eine Hauptebene die Fig. 19, Tafel IV, gebildet aus congruenten, parallelen, mit gleichartigen Seiten einander gerade zugewandten, halbregelmäfsigen Zwölfecken, deren Centra ein gleichseitig dreieckiges Maschennetz bestimmen. Durch die Knoten des letztern gehen die sechszähligen Axen. Von den zur Hauptaxe senkrechten zweizähligen Axen projiciren sich die Drehungsaxen in die Seiten und Höhen der Dreiecksmaschen, die Schraubenaxen ihnen parallel mitten zwischen 2 benachbarte von ihnen.

1) *System der gewundenen (sechsseitigen) Säule* entspringt aus VI, *A*. 1. Fig. 18, Tafel IV ist die Besetzung der Hauptebene, Fig. 19, Tafel IV die Projection einer durch 2 Nachbarhauptebenen gebildeten Schicht und zugleich die des ganzen Systems, das aus solchen Schichten gerade aufgeschichtet ist. Zwei in den Gränzebenen einer Schicht mit den Mittelpunkten gerade über einander liegende Sechsecke bilden eine gewundene Säule, die sich als halbregelmäfsiges Zwölfeck projicirt. Eine solche tritt für jedes Sechseck des Systems VI, *A*. 1. ein.

Specialfälle: Die regelmäfsigen Sechsecke der Hauptebene kehren einander die Ecken oder die Seiten gerade zu, wobei wieder lauter an einander liegende congruente

Digitized by Google

Sechsecke, oder solche Sechsecke und gleichseitige Dreiecke, oder an einander liegende Sechsecke, Quadrate und gleichseitige Dreiecke auftreten können. Oder ein gleichseitig dreieckiges Gitter nimmt die Hauptebene ein. Oder die gewundene Säule projicirt sich als regelmäfsiges Zwölfeck. Oder sie geht in das Zwölfeck der Projectionsfigur selbst über, wobei wieder lauter aneinander liegende Zwölfecke und Dreiecke, oder regelmäfsige Zwölfecke, Sechsecke und Quadrate auftreten können. Analoge Fälle bei den folgenden Systemen.

2) *a* und *b*) *Rechtes, resp. linkes (sechszähliges) Doppel-Schraubensystem* entspringt aus VI, *A.* 2 und läfst sich ansehn als Gesammtheit paralleler Schrauben, deren jede auf einem Umgang in gleichen Abständen sechs Punktpaare trägt. Das Zwölfeck der Fig. 19, Taf. IV ist die Projection eines solchen Umgangs, sowie der ganzen Schraube, auf die Hauptebene.

3) *a* und *b*) *Rechtes, resp. linkes Treppensystem des Rhombentetraëders* entspringt aus VI, *A.* 3. Besetzung der Hauptebene wie dort. Eine von zwei Nachbarhauptebenen begränzte Schicht besteht aus parallelen congruenten Rhombentetraëdern, deren Centra ein gleichseitig dreieckiges Maschennetz bilden, und deren Drehungsaxen resp. parallel sind zur Hauptaxe, zu einer Seite und zur zugehörigen Höhe der Dreiecksmasche. Die Nachbarschicht, der vorigen congruent, wird erhalten durch eine sechszählige Schraubung, deren Schiebung $\frac{1}{3}$ Säulenhöhe des Grundgitters beträgt. Analog entsteht die dritte Schicht. Fig. 19, Taf. IV ist die Projection dreier aufeinander folgender Schichten, und zugleich des ganzen Systems, auf eine Hauptebene. Jedes Zwölfeck ist die Projection dreier, und zugleich unendlich vieler, Rhombentetraëder; sie sind wendeltreppenförmig angeordnet.

4) *Doppelsystem der Sternsäule* entspringt aus VI, *A.* 4. Es lässt sich ansehn als aus zwei congruenten zusammengesetzten Systemen der dreiseitigen Säule V, *C.* 1 gebildet, die so ineinander stehn, dass die die Säulencentra enthaltenden, zur Hauptaxe senkrechten, Ebenen des einen mitten

Digitized by Google

zwischen denen des anderen liegen, dass aber das eine System gegen das andere um 60° um eine gemeinsame Hauptaxe gedreht ist. Jede sechszählige Axe ist mit congruenten, gewundenen, dreiseitigen Säulen besetzt, die abwechselnd um 60° um ihre Axe gegeneinander gedreht sind. Ein Zwölfeck der Fig. 19, Taf. IV ist die Projection von zwei übereinander liegenden gewundenen Säulen, und gleichzeitig von allen, welche auf dieselbe Axe aufgereiht sind. Fig. 19, Taf. IV. ist die Projection zweier Nachbarschichten, sowie des ganzen Systems.

Klasse VII. Systeme ohne Hauptaxe, mit nur zwei- und dreizähligen Axen (reguläres Krystallsystem, Halbflächner).

Alle Systeme bestehn aus zwölf congruenten ineinander gesetzten regulären Raumgittern (No. 12, 13 oder 14), oder einfacher aus drei congruenten Systemen der Klasse III (rhombisches Krystallsystem), jedoch mit regulärem Grundgitter. Die drei Theilsysteme sind senkrecht so durcheinander gesteckt (nach den Richtungen ihrer drei Axen), wie sie aus einem von ihnen hervorgehn durch dreizählige Drehungen um eine Gerade, die einer Würfelmaschendiagonale des Grundgitters parallel ist. Alle resultirenden Systeme enthalten dreizählige Axen parallel den vier Diagonalen, und zweizählige Axen parallel den drei Kantenrichtungen der Würfelmasche des Grundgitters.

1) *Cubisches Zwölfpunktnersystem.*
2) *Granatoëdrisches Zwölfpunktnersystem.*
3) *Octaëdrisches Zwölfpunktnersystem.*

Grundgitter ist resp. das cubische, granatoëdrische, octaëdrische Gitter (12, 13, 14); aber einfacher dienen zur Ableitung resp. die Tetraëderschichtensysteme III, 1, 2, 4, so specialisirt, wie sie aus jenen Gittern hervorgehn, d. h. dafs die Tetraëdercentra selbst ein Maschennetz wie Gitter 12, 13, 14 bilden. Die drei Theilsysteme stehn so ineinander, wie sie aus einem von ihnen hervorgehn durch dreizählige Drehungen um eine Diagonale der cubischen Netzmasche; dadurch stellen sich statt jedes Rhomben-

Digitized by Google

tetraëders des Theilsystems drei senkrecht durch einander gesteckte Rhombentetraëder mit demselben Mittelpunkt ein, deren Axen cyklisch vertauscht sind. Der durch ihre zwölf Endpunkte bestimmte Körper mit zwölf congruenten Ecken mag „*Zwölfpunktner*“ heifsen. Hiernach besteht jedes der Systeme 1, 2, 3 dieser Klasse aus congruenten parallelen Zwölfpunktnern, deren Centra resp. die Maschennetze 12, 13, 14 bilden. Fig. 20, Taf. V ist die Projection eines Zwölfpunktners auf eine senkrecht zu einer zweizähligen Axe liegende Ebene; die Punkte 1, 2, 3 gehören resp. den drei zusammensetzenden Tetraëdern an. Aufser den drei aufeinander senkrechten, zweizähligen Drehungsaxen, welche mit denen der Theiltetraëder zusammenfallen, gehn durch sein Centrum noch vier dreizählige Drehungsaxen, mitten in die durch die vorigen Axen gebildeten Octanten hineinragend. In *Specialfällen* verwandelt sich der Zwölfpunktner in ein reguläres Tetraëder, in dasselbe mit Gegentetraëder, in den Würfel mit Tetraëder und Gegentetraëder, in das Octaëder mit Pyritoïd.

Die Systeme VII, 1 und 2) lassen sich noch so auffassen: Weil die zwei einander zugewandten Punktpaare je zweier nächsten Zwölfpunktner des Systems VII, 1 ein Rhombentetraëder bilden, so kann man dies System, statt es aus Zwölfpunktnern aufzubauen, aus isolirten Rhombentetraëdern construiren, deren je eins sein Centrum mitten auf einer Würfelmaschenkante liegen hat. Alle diese Tetraëder bilden zusammen drei durch einander gesteckte Tetraëderschichtensysteme III, 1 mit cubischer Masche und zwar so, dass sie durch gewisse dreizählige Drehungen in einander übergehn. Bezeichnet man mit 1, 2, 3 das Rhombentetraëder bezüglich in den drei Stellungen, in die es durch diese Drehungen gelangt, und welche den ihm im Zwölfpunktner zukommenden Stellungen entsprechen, so stellt Fig. 21, Taf. V die Projection zweier benachbarter, mit Tetraëdercentren besetzter Ebenen und zugleich die des ganzen Systems auf die Ebene einer Würfelmaschenseite vor. Die Centra der Tetraëder 1 und 2 liegen in

Digitized by Google

der Ebene oder um ein ganzes Vielfaches der Würfelmaschenkante ϑ von ihr entfernt; die Centra (3) stehn um ein ungerades Vielfaches von $\frac{\vartheta}{2}$ von ihr ab. In Specialfällen kann statt des Tetraëders in den Stellungen 1, 2, 3 ein reguläres oder ein quadratisches Tetraëder oder ein Rechteck oder Quadrat oder eine gerade Linie in jenen drei Stellungen auftreten.

Analog läfst sich System VII, 2 als aus zwei mitten ineinander gestellten Systemen der Fig. 21, Taf. V gebildet ansehn, wovon Fig. 22, Taf. V eine Vorstellung giebt. Hier bedeuten die eingeklammerten Zahlen die Centra von Rhombentetraëdern im Abstande $\frac{\vartheta}{2}$ von der Zeichnungsebene, die nicht eingeklammerten solche in der Ebene.

4) *Reguläres Stufenschichtensystem* (Fig. 23, Taf. V). Grundgritter ist das granatoëdrische (13), dessen cubischer Kern die Kante ϑ besitze. Zur einfacheren Ableitung dient das zusammengesetzte Stufenschichtensystem erster Art (III, 6) mit demselben Grundgitter. Drei solche congruente Theilsysteme sind senkrecht so durcheinander gesteckt, dass sie durch dreizählige Drehungen um gewisse, zur Würfeldiagonale des Grundgitters parallele Gerade in einander übergehn. Dies ist auf vier Arten möglich, so dass vier Varietäten dieses Systems entstehn. (Genaueres vergl. in der ausführlichen Arbeit.) Fig. 23, Taf. V zeigt die Projection von einer solchen Varietät auf eine durch ein Stufencentrum, senkrecht zu einer zweizähligen Axenschaar, gelegte Ebene. Die stark oder schwach ausgezogenen oder punktirten, kurzen schrägen Linien sind die Projectionen von Punktpaaren des ersten Theilsystems, welche parallel zur Zeichnungsebene, resp. um $\pm h$ oder $2\alpha \pm h$ über ihr liegen (wo α zur Abkürzung für $\frac{\vartheta}{4}$ gesetzt ist). Hierdurch ist zugleich das ganze Theilsystem projicirt, wie in Fig. 6, Taf. IV. Die Projectionen des zweiten resp. dritten Theilsystems sind als dunkle, resp.

Digitized by Google

helle Keile dargestellt, deren dickeres Ende den höher liegenden Punkt andeutet. Die Punktpaarcentra liegen um $0, 2\alpha, \pm\alpha$ über der Zeichnungsebene. In der Höhe $4\alpha = \vartheta$ über jedem Punktpaar liegt ein ihm paralleles. Also ist Fig 23, Taf. IV wirklich die Projection des ganzen Systems. In der Mitte jedes zur Zeichnungsebene parallelen Punktpaars steht eine zweizählige Drehungsaxe auf dieser Ebene senkrecht; die ausgezogenen und punktirten Geraden, die die ganze Figur durchziehen, bedeuten die zweizähligen Drehungsaxen der beiden anderen Schaaren, resp. in der Zeichnungsebene und um α über ihr. Von den vier Schaaren dreizähliger Drehungsaxen sind die Projectionen kurzer Stücke durch die geschlängelt endigenden Linien angedeutet, deren geschlängeltes Ende nach oben laufend zu denken, während das andere Ende in der Zeichnungsebene liegt. Eine dieser Axen, etwa AB, ist zur Construction des Systems aus dem ersten Theilsystem benutzt.

Specialfälle wie bei III, 6. Rechte und linke Systeme wie dort.

5) *Reguläres Wechselstreifensystem* (Fig. 24, Taf. V). Grundgitter ist das cubische (12) mit Kante ϑ. Zur einfachsten Ableitung dient das rhombische Wechselstreifensystem III, 8 mit demselben Grundgitter. Drei solche Theilsysteme stehn so ineinander, wie sie durch dreizählige Drehungen um gewisse zur Würfeldiagonale des Grundgitters parallele Gerade aus einem von ihnen hervorgehn. Wie bei VII, 4 ist dies auf vierfache Art möglich. Fig. 24, Taf. V ist die Projection eines dieser vier möglichen Systeme auf eine zu einer zweizähligen Axenschaar senkrechte Ebene. Die kurzen, schräg stehenden Linien sind die Projectionen der Wechselstreifen des ersten Theilsystems, wie in Fig. 7, Taf. IV. Von den Wechselstreifen der zwei anderen Theilsysteme verlaufen die Mittellinien parallel der Zeichnungsebene nach zwei senkrechten Richtungen, und zwar die des einen abwechselnd in der Zeichnungsebene und um $\frac{\vartheta}{2}$ (wo $\vartheta = 4\alpha$ gesetzt ist) über ihr, sowie in

Digitized by Google

Abständen von ϑ übereinander; die des anderen um $\frac{\vartheta}{4}$ über und unter der Zeichnungsebene, sowie in Abständen von ϑ übereinander. Diejenigen Punkte eines Wechselstreifens, welche höher als seine Mittellinie liegen, sind als kleine helle Kreise gezeichnet. Die Höhe der Mittellinien über der Zeichnungsebene siehe an den Seiten der Figur. Die Darstellung der Axen analog wie beim vorigen System.

Klasse VIII. Systeme ohne Hauptaxe mit nur zwei- und drei- und vierzähligen Axen (reguläres Krystallsystem, Vollflächner).

Alle Systeme bestehn aus vierundzwanzig congruenten, ineinander gestellten regulären Raumgittern (No. 12, 13 oder 14), die in Specialfällen auch in 1, 6, 8 oder 12 Gitter zusammenfallen können, oder einfacher aus drei congruenten Systemen der Klasse IV, *B* und *C* (quadratisches Krystallsystem) mit regulärem Grundgitter. Die drei Theilsysteme sind nach drei senkrechten Richtungen so durcheinander gesteckt, wie sie aus einem von ihnen hervorgehn durch dreizählige Drehungen um eine Gerade, die einer Würfelmaschendiagonale des Grundgitters parallel läuft. Alle resultirenden Systeme enthalten dreizählige Axen parallel den vier Diagonalen, und vierzählige Axen parallel den drei Kantenrichtungen der Würfelmasche des Grundgitters.

1) *Cubisches Vierundzwanzigpunktnersystem.*
2) *Granatoëdrisches Vierundzwanzigpunktnersystem.*
3) *Octaëdrisches Vierundzwanzigpunktnersystem.*

Grundgitter ist resp. das cubische, granatoëdrische, octaëdrische (12, 13, 14); aber unmittelbarer dient zur Ableitung das System der gewundenen Quadratsäule (IV, *B.* 1) mit cubischem Grundgitter, das Doppelsystem des Quadratoctaëders (IV, *B.* 4) mit granatoëdrischem Grundgitter, und dasselbe System in der Specialisirung, dafs die Centra der gewundenen Säulen ein Gitter mit solcher im Centrum besetzter Quadratsäulenmasche bilden, deren Höhe gleich der Diagonale der Basis. Letzteres kommt darauf hinaus, dafs die Centra aller gewundenen Säulen ein octaëdrisches

Digitized by Google

Gitter bilden (cf. 14). In allen drei Fällen stehn die drei Theilsysteme so ineinander, wie sie aus einem von ihnen hervorgehn durch dreizählige Drehungen um eine Diagonale einer cubischen Netzmasche, die (frei, oder im Centrum, oder in den Seitenmitten besetzt), von den Centren der gewundenen Säulen des Theilsystems gebildet wird. Dadurch stellen sich statt jeder gewundenen Säule drei congruente, senkrecht durcheinander gesteckte gewundene Säulen ein, die denselben Mittelpunkt haben, und deren vierzählige Drehungsaxen nach drei senkrechten Richtungen verlaufen. Der durch ihre vierundzwanzig Eckpunkte bestimmte Körper mit vierundzwanzig congruenten Ecken mag der *Vierundzwanzigpunktner* heifsen. Hiernach besteht jedes der Systeme VIII, 1, 2, 3 aus congruenten parallelen Vierundzwanzigpunktnern, deren Centra resp. die Maschennetze 12, 13, 14 bilden. Der Vierundzwanzigpunktner besteht aus zwei congruenten Zwölfpunktnern, so ineinander stehend, dafs sie durch eine vierzählige Drehung um eine ihrer zweizähligen Axen ineinander übergehn. Oder man erhält ihn, wenn man von allen Flächen eines Achtundvierzigflächners der Krystallographie eine um die andere in gleicher Weise mit einem Punkt besetzt. Diese vierundzwanzig Punkte sind seine Ecken. Aufser den drei aufeinander senkrechten vierzähligen Drehungsaxen, welche mit denen der gewundenen Säulen zusammenfallen, gehn durch sein Centrum noch vier dreizählige Drehungsaxen, mitten in die durch die vorigen Axen gebildeten Octanten hineinragend. In *Specialfällen* verwandelt sich der Vierundzwanzigpunktner in einen Punkt, ein reguläres Octaëder, einen Würfel, in die Combination von Würfel und Octaëder, in jene Combination von Würfel, Octaëder und Granatoëder, bei der die Begränzung von Quadraten, gleichseitigen Dreiecken und Rechtecken gebildet wird. — Bei VIII, 1 bilden die einander zugewandten Quadrate zweier benachbarter Vierundzwanzigpunktner eine gewundene Säule, so dafs sich das System auch aus isolirten gewun-

Digitized by Google

denen Säulen aufbauen läfst, analog VII, 1. Ist jede gewundene Säule durch einen Punkt ersetzt, so besteht das System aus Punkten, gelegen wie die Kantenmitten eines cubischen Gitters (Fig. 21, Taf. V.).

4) *Reguläres System der gekreuzten Rhombentetraëder* (Fig. 25, Taf. V).

Grundgitter ist das cubische (12); zur einfachsten Ableitung dient aber das System der gekreuzten Rhombentetraëder IV, *B.* 3 mit cubischem Grundgitter, bei welchem die Punkte (nach der zweiten Auffassung, vgl. S. 359) zu Rhombentetraëdern zusammengefafst werden, deren Drehungsaxen den Würfelmaschenkanten parallel. Die Centra acht benachbarter paralleler Tetraëder liegen in den Ecken eines Würfels mit Kante ϑ. Drei solche Theilsysteme stehn so ineinander, wie sie aus einem von ihnen hervorgehn durch dreizählige Drehungen um eine Gerade, die parallel einer Diagonale jenes Würfels durch eine nicht mit einem Tetraëdercentrum besetzte Würfelkantenmitte gelegt ist. Daher haben die Würfelmaschen der drei Theilsysteme die Mitten gewisser Würfelkanten gemein (die Punkte α in der Zeichnungsebene). Drei nächstbenachbarte Trägeraxen der drei Theilsysteme liegen so, wie drei nicht zusammenhängende senkrechte Kanten eines Würfels mit Kante $\frac{\vartheta}{2}$. Durch vierzählige Schraubung um eine Trägeraxe eines Theilsystems $\left(\text{mit Schiebung } \frac{\vartheta}{2}\right)$ vertauschen sich die beiden anderen Theilsysteme, während das erste mit sich selbst zur Deckung kommt. In Fig. 25 sind die Achtecke die Projection der gekreuzten Tetraëder des einen Theilsystems auf eine zu den Trägeraxen senkrechte Ebene, gelegt durch ein Tetraëdercentrum (= Fig. 13). Die Keile sind zu verstehen wie bei VII, 4 (Fig. 23); ein Paar derselben stellt ein Rhombentetraëder vor. Die Centra der durch punktirte Keile dargestellten Tetraëder liegen um ein ungerades Vielfache von $\frac{\vartheta}{2}$ entfernt von der

Digitized by Google

Zeichnungsebene, die anderen um ein gerades, oder in ihr. In Specialfällen tritt statt des Rhombentetraëders ein Punkt, eine Gerade, ein Rechteck, Quadrat, ein reguläres oder quadratisches Tetraëder ein.

5) *a* und *b*) ***Rechtes resp. linkes reguläres Schraubensystem*** (Fig. 26, Taf. V). Grundgitter ist das cubische (12); zur einfachsten Ableitung dient aber das zusammengesetzte vierzählige Schraubensystem (IV, C. 2) mit kubischem Grundgitter. Drei solche Theilsysteme stehen so ineinander, wie sie aus einem von ihnen hervorgehen durch dreizählige Drehungen um eine zu einer Würfeldiagonale parallele Gerade AB, deren Lage so bestimmt ist: Gewisse Würfel mit Kante $\frac{\vartheta}{4}$, von denen drei nicht zusammenhängende senkrechte Kanten durch eine vierzählige und zwei zweizählige Schraubenaxen des einen Theilsystems gebildet werden, mögen rhomboëdrisch betrachtet werden, so dafs jene Kanten ihre abwechselnden Randkanten sind; dann steigen letztere, im Uhrzeigersinn herum verfolgt, in der Hälfte aller Würfel ab, in der anderen Hälfte auf. Besteht nun das Theilsystem aus rechtsgewundenen Schrauben, so ist die als rhomboëdrische Hauptaxe dienende Diagonale eines Würfels ersterer Art als obige Constructionsaxe zu wählen; besteht das Theilsystem aus links gewundenen Schrauben, so dient dazu die Hauptaxe eines Würfels zweiter Art. Durch vierzählige Schraubung (mit Schiebung $\frac{\vartheta}{4}$) um eine vierzählige Axe eines Theilsystems vertauschen sich die zwei anderen Theilsysteme, während das erstere mit sich selbst zur Deckung gelangt. In Fig. 26 (rechts gewundene Schrauben darstellend) bedeuten die einzeln stehenden Quadrate die Projectionen der Schrauben eines Theilsystems auf eine zu seiner Hauptaxe senkrechte und durch eine zweizählige Axe gelegte Ebene (cf. Fig. 14). Ferner sind die mit $\pm\frac{\vartheta}{4}$, 0, $\frac{\vartheta}{2}$ bezeichneten Linien, welche in diesen Entfernungen, vermehrt um ein

Digitized by Google

ganzes Vielfache von ϑ von der Zeichnungsebene abstehend zu denken sind, die Mittellinien vierzähliger Schrauben des zweiten und dritten Theilsystems, deren Punkte selbst nicht gezeichnet sind. Nicht wesentlich verschieden ist ein System, in dessen Projectionsfigur $+$ und $-\frac{\vartheta}{4}$, sowie 0 und $\frac{\vartheta}{2}$ miteinander vertauscht sind. Dagegen entsteht aus Fig. 26 die für ein System mit Linksschrauben gültige Figur, wenn entweder nur $+\frac{\vartheta}{4}$ mit $-\frac{\vartheta}{4}$, oder nur 0 mit $\frac{\vartheta}{2}$ vertauscht wird.

6) *Reguläres Gegenschraubensystem* (Fig. 27, Taf. V). Grundgitter ist das octaëdrische (14); zur einfachsten Ableitung dient das Doppelsystem der Gegenschrauben IV, B. 5 mit demselben Grundgitter. Da nämlich das octaëdrische Gitter als ein Specialfall des Gitters der im Centrum besetzten Quadratsäulen auffafsbar (vgl. Gitter 14), so kann es dem System IV, B. 5 zu Grunde gelegt werden, welches durch vierzählige Schraubungen und zweizählige Drehung aus einem solchen Säulengitter hervorgeht. Drei solche Theilsysteme stehen so ineinander, wie sie aus einem von ihnen hervorgehen durch dreizählige Drehungen um eine gewisse, zu einer Maschenwürfeldiagonale parallele Gerade. Sie liegt als rhomboëdrische Hauptaxe in einem Würfel mit Kante $\frac{\vartheta}{4}$ (wenn ϑ die Würfelmaschenkante), von dem drei abwechselnde Randkanten durch eine vierzählige Axe und zwei zunächst bei einander und bei jener vorübergehende zweizählige Axen des ersten Theilsystems (parallel den Maschenkanten) gebildet werden. Durch vierzählige Schraubung $\left(\text{mit Schiebung} = \frac{\vartheta}{4}\right)$ um eine vierzählige Schraubenaxe eines Theilsystems vertauschen sich die beiden anderen Theilsysteme, während das erste mit sich selbst zur Deckung kommt. In Fig. 27, Taf. V bedeuten die Achtecke die Projectionen der Doppelschrauben des einen Theilsystems auf eine zu einer vierzähligen Axe

Digitized by Google

senkrechte und durch eine zweizählige Axe hindurchgelegte Ebene (cf. Fig. 13, Taf. IV). Die Schrauben mit den Axen A, A' sind gegen einander um $\frac{\sigma}{2}$ gehoben (vergl. IV, B. 5). Die mit C, C' und mit $B_{\frac{2}{4}}$, $B'_{-\frac{2}{4}}$, und $B_{-\frac{2}{4}}$, $B'_{\frac{2}{4}}$ bezeichneten Graden sind die den Axen A, A' entsprechenden vierzähligen Schraubenaxen des zweiten und dritten Theilsystems, resp. in der Zeichnungsebene und um $\pm \frac{\sigma}{4}$ von ihr entfernt verlaufend. Die Punkte dieser Schrauben selbst sind nicht gezeichnet.

Uebersicht der Resultate.

In der ersten Spalte der folgenden Tabelle findet sich die Nummer der betreffenden Punktsystemklasse; in der zweiten die Charakteristik; in der dritten die Zahl der congruenten Grundgitter, aus denen jedes Punktsystem jener Klasse zusammengesetzt ist; in der vierten die Nummer derjenigen Raumgitterklasse, zu welcher das Gitter im Allgemeinen gehört (abgesehen von solchen Specialfällen, wie sie bei II, 1 und später erwähnt sind); in der fünften die Zahl regelmäfsiger Systeme, welche in die betreffende Klasse oder Abtheilung gehören. Die Gesammtzahl verschiedener Punktsysteme würde viel gröfser ausfallen, wenn man je 2 solche, die den Unterschied von rechts und links zeigen, übrigens aber völlig übereinstimmen, als 2 verschiedene Systeme aufzählen wollte.

Klasse	Charakteristik	Zahl der Grundgitter	Klasse	Zahl der Systeme
I.	Keine Axe	1	I.	1
II.	Zweizählige Hauptaxe	2	II.	3
III.	Nur zweizählige Axen nach 3 senkrechten Richtungen . . .	4	III.	10
				14

Digitized by Google

Klasse	Charakteristik	Zahl der	Klasse Grundgitter	Zahl der Systeme
	Transport			14
IV. A	Vierzählige Hauptaxe. Keine Axe von anderer Richtung	4	IV.	5
IV. B	Vierzählige Hauptaxe. Senkrecht auf ihre zweizählige Axen . .	8	IV.	5
IV C	Vierzählige Hauptaxe. Senkrecht auf ihre andere zweizählige Axen	8	IV.	3
V A	Dreizählige Hauptaxe. Keine Axe von anderer Richtung . . .	3	VI. u. V.	3
V B	Dreizählige Hauptaxe. Senkrecht auf ihre zweizählige Axen . .	6	VI. u. V.	3
V. C	Dreizählige Hauptaxe. Senkrecht auf ihre andere zweizählige Axen	6	VI.	2
VI. A	Sechszählige Hauptaxe. Keine Axe von anderer Richtung . .	6	VI.	4
VI. B	Sechszählige Hauptaxe. Senkrecht auf ihre zweizählige Axen	12	VI.	4
VII.	Zweizählige und dreizählige Axen, bezüglich parallel den Kanten und Diagonalen eines Würfels	12	VII.	5
VIII.	Vierzählige und dreizählige Axen, bezüglich parallel den Kanten und Diagonalen eines Würfels	24	VII.	6
			Summa	54

Mit diesen 54 unendlichen regelmäfsigen Punktsystemen sind alle für die krystallisirten Körper möglichen Structurformen erschöpft, sofern die Ausgangshypothese zugegeben wird. Freilich: welche von diesen Formen nicht blofs geometrisch, sondern auch statisch möglich sind, bleibt theoretisch so lange unermittelbar, als man nicht im Stande ist, einigermafsen gegründete Voraussetzungen über das

Digitized by Google

Wirkungsgesetz der Molecüle zu machen. Eine bessere Antwort auf diese Frage verspricht die

Vergleichung mit den Krystallen in geometrischer und physikalischer Hinsicht.

Es fragt sich, ob die gewonnenen Resultate mit der Gesammtheit der von den Krystallen dargebotenen Erscheinungen vereinbar sind. Diese Vergleichung kann vorläufig nur angedeutet werden, denn die erschöpfende Beantwortung der Frage erfordert eigene umfangreiche Untersuchungen. Zunächst werden die geometrischen Beziehungen betrachtet.

Die sieben bekannten Krystallsysteme (unter denen das rhomboëdrische als selbstständiges neben dem hexagonalen aufgezählt wird) werden naturgemäfs charakterisirt durch Angabe der Zahl und Lage derjenigen Axen, um welche die kleinsten Drehungen erforderlich sind, damit die betreffenden Krystalle mit sich selbst wieder zur Deckung gelangen. So erhält man folgende Uebersicht:

1. *Klinorhomboidisches Krystallsystem*, keine Drehungsaxe.
2. *Klinorhombisches Krystallsystem*, 1 zweizählige Drehungsaxe.
3. *Rhombisches Krystallsystem*, zweizählige Drehungsaxen nach drei senkrechten Richtungen.
4. *Quadratisches Krystallsystem*, 1 vierzählige Drehungsaxe.
5. *Rhomboëdrisches Krystallsystem*, 1 dreizählige Drehungsaxe.
6. *Hexagonales Krystallsystem*, 1 sechszählige Drehungsaxe.
7. *Reguläres Krystallsystem*, 3 zweizählige (oder 3 vierzählige) und 4 dreizählige Drehungsaxen, bezüglich parallel den Kanten und Diagonalen eines Würfels.

Die Vergleichung dieser Aufzählung der Krystallsysteme mit der obigen Aufzählung der Punktsystemklassen zeigt die vollkommenste Uebereinstimmung, indem Klasse VII und VIII dem regulären Krystallsystem entsprechen. Es ist

Digitized by Google

bemerkenswerth, dafs diese Uebereinstimmung schon sichtbar ist, obgleich hier noch gar kein Versuch gemacht ist, aus den Structurformen die möglichen Krystallflächen abzuleiten. Nur *ein* Unterschied fordert eine Erklärung: Während nämlich in jeder überhaupt mit Axen versehenen Klasse von Punktsystemen nicht nur Systeme mit Drehungsaxen, sondern auch solche Systeme vorkommen, welche nur durch Schraubenbewegungen mit sich zur Deckung gelangen, so kann bei Krystallen, als bei *endlichen* Gestalten, natürlich nur durch Drehung wieder Deckung herbeigeführt werden. Dafs trotzdem ein Krystall die Structur eines Schraubensystems haben kann, läfst sich etwa so vorstellen: Die, bei einer Schraubenbewegung, mit der Drehung verbundene Schiebung ist gegen die endlichen Dimensionen des Krystalls äufserst klein, nämlich von der Ordnung der Molecularabstände: daher ist es denkbar, dafs sich diese Schiebung, bei Betrachtung der äufseren Form, der Beobachtung entzieht, während der Umstand, dafs überhaupt eine Axe von Zwei-, Drei-, Vier-, oder Sechszähligkeit vorhanden ist, durchaus bemerklich bleibt. Diese Axe scheint dann also eine Drehungsaxe zu seyn, obgleich sie in Wahrheit eine Schraubenaxe ist.

Anmerkung. Es ist vielleicht nicht überflüssig, hier kurz die Beziehung zwischen den in der Krystallographie üblichen Krystallaxen und den in vorliegender Abhandlung benutzten Symmetrieaxen anzudeuten. Während letztere Axen solche Gerade sind, um welche man das Punktsystem schrauben oder drehen mufs, damit es mit sich selbst wieder zur Deckung gelange, lassen sich die *krystallographischen Axen definiren als solche Coordinatenaxen, auf welche man einen Krystall beziehen mufs, damit die Gesammtheit seiner Flächen möglichst einfache Flächenzeichen erhält*, wo unter Flächenzeichen das Verhältnifs der durch die Fläche abgeschnittenen Axenstücke verstanden wird. Beide Arten von Axen fallen nur theilweise zusammen.

In Punktsystemen mit drei aufeinander senkrechten gleichvielzähligen Axen dienen diese zugleich als Krystallaxen (Klasse III, VII, VIII).

In Punktsystemen mit Hauptaxe dient diese als eine der Krystallaxen (nur Miller's schiefwinklige Axen beim rhomboëdrischen System sind anders gewählt).

Giebt es senkrecht zur Hauptaxe noch zweizählige Axen (IV, *B. C.*

Digitized by Google

V, *B. C.* VI, *B.*), so dienen zwei von diesen als die beiden anderen Krystallaxen (nur im rhomboëdrischen System wählt man sie meist anders).

Giebt es aufser der Hauptaxe keine Axen mehr, so dienen entweder zwei zur Hauptaxe senkrechte Richtungen, welche für das Grundgitter des Punktsystems Axen sind, als die beiden anderen Krystallaxen (IV, *A.* VI, *A*). (nur beim rhomboëdrischen System V, *A.* wählt man sie meist anders); oder wenn es keine solche Richtungen giebt, so bleibt für die Wahl der beiden anderen Krystallaxen eine gewisse Willkür, so dafs von verschiedenen Krystallographen hier eine verschiedene Wahl getroffen wird (II).

Giebt es gar keine Symmetrieaxen, so ist die Willkür bei der Wahl der Krystallaxen noch gröfser (I).

Die Uebereinstimmung zwischen den geometrischen Eigenschaften der regelmäfsigen Punktsysteme und der Krystalle erstreckt sich viel weiter als auf die bisher besprochene Gleichheit der Abtheilungen, in welche beide zerfallen. Dies zeigen folgende Betrachtungen.

Sowie innerhalb jedes Krystallsystems sehr *verschiedene Typen oder Ausbildungsweisen* vorkommen, so giebt es auch innerhalb der einzelnen Punktsystemklassen sehr verschiedene Punktsysteme, und bei jedem der letzteren wieder mannigfaltige Specialfälle mit tiefgreifenden Verschiedenheiten. Daher läfst sich mit Grund erwarten, dafs es bei genauerer Vergleichung gelingen wird, für jeden vorkommenden Krystalltypus das ihm entsprechende regelmäfsige Punktsystem zu ermitteln.

Ferner ist es sehr beachtenswerth, dafs sich für die *halbflächigen Krystalle* zahlreiche Repräsentanten unter den Punktsystemen vorfinden, so dafs die Eingangs erwähnte Schwierigkeit, welche die Bravais'sche Hypothese darbietet, hier gänzlich fortfällt. Um nur wenige Beispiele herauszugreifen, so entsprechen alle Systeme der Klasse VII hemiedrisch regulären Krystallen, die Systeme III, 1—4 hemiedrisch rhombischen, wenigstens so lange man die in ihnen auftretenden Tetraëder nicht durch Rechtecke, gerade Linien oder Punkte ersetzt.

Endlich liefert die Betrachtung der Krystalle als regelmäfsiger Punktsysteme eine ungezwungene Erklärung für die nicht selten vorkommenden *Uebergangsformen aus*

Digitized by Google

einem Krystallsystem in ein anderes, z. B. für solche Krystalle, bei denen zwar die Mehrzahl der Flächen auf ein gewisses Krystallsystem hinweist, die aber nichts destoweniger durch einige untergeordnet auftretende Flächen in ein Krystallsystem von geringerer Symmetrie verwiesen werden. *Einer solchen Uebergangsform entspricht ein Punktsystem, dessen Grundgitter mehr Axen besitzt, als das aus diesen Grundgittern aufgebaute System.* Hierauf ist im Verlaufe der Abhandlung wiederholt hingewiesen. Wird z. B. das dem klinorhombischen Krystallsystem angehörende Streifensystem II, 1 aus dem Raumgitter des rechtwinkligen Parallelepipeds aufgebaut, so trägt es sowohl etwas von dem geometrischen Charakter des rhombischen als auch von dem des klinorhombischen Krystallsystems an sich. In solcher Weise sind vermuthlich manche halbflächige Bildungen zu deuten.

Es leuchtet ein, dafs die hier vertretene Auffassung der Krystalle auch zu einer einfachen Formulirung des Begriffs der *Isomorphie* führt, nämlich zu folgender: *Isomorph sind zwei Substanzen, die bei der Krystallisation gleiche oder nahezu gleiche Strukturform annehmen.*

Die entwickelte Hypothese über die Krystallstruktur ist aber nicht nur mit den geometrischen Eigenschaften der Krystalle in Uebereinstimmung, sondern sie verbreitet auch einiges Licht über das *physikalische Verhalten* derselben, ja es treten sogar mehrere interessante Beziehungen neu hervor. Sieht man einen Krystall als ein regelmäfsiges Punktsystem an, so versteht sich von selbst, dafs in geometrisch ungleichwerthigen Richtungen *das Verhalten gegen mechanische Einflüsse* verschieden seyn mufs; daher die Verschiedenheit der Cohäsion in verschiedenen Richtungen. Dieselbe ist auf mehrfache Weise nachgewiesen: Durch die Spaltbarkeit der meisten Krystalle parallel mit Ebenen von bestimmter Lage; durch Untersuchung der Zugfestigkeit, wodurch ich z. B. beim Steinsalz grofse Cohäsionsunterschiede fand [1]); durch Untersuchung der

1) Diese Annalen 1869, Bd. 137. pag. 177 ff.

Digitized by Google

Härteunterschiede, theils auf verschiedenen Krystallflächen, theils auf derselben Fläche in verschiedenen Richtungen, worüber noch neuerdings umfangreiche Beobachtungsreihen von F. Exner [1]) bekannt gemacht sind. Auf Grund unserer Hypothese ist zu vermuthen, dafs das Vorkommen von Härteunterschieden längs derselben Geraden, je nachdem sie in einem oder dem anderen Sinne überstrichen wird, weiter verbreitet ist, als bisher bekannt; freilich ist es zweifelhaft, ob diese Unterschiede hinreichend grofs sind, um mit den bisherigen Mitteln nachweisbar zu seyn.

Die Cohäsionsunterschiede bethätigen sich noch auf eine andere, für den Einblick in die Struktur höchst wichtige Art, nämlich durch den in verschiedenen Richtungen verschiedenen Widerstand gegen die Auflösung durch geeignete Flüssigkeiten. Die auf diesem Wege erzeugten Aetzfiguren sind auf ungleichwerthigen Krystallflächen ebenfalls ungleich; sie zeigen bei hinreichend langsamer Einwirkung der ätzenden Flüssigkeit wohl immer geradlinige Umrisse. Die vorläufige Vergleichung der von Leydolt, Haushofer, Baumhauer u. A. gefundenen Aetzfiguren mit den von mir ermittelten regelmäfsigen ebenen Punktsystemen von unbegränzter Ausdehnung (Borchardt's Journal a. a. O.) lehrt, *dafs als Aetzfiguren, wenn sie geradlinig begränzt sind, stets eben solche Vielecke auftreten wie die, welche die regelmäfsigen ebenen Punktsysteme zusammensetzen.*

So entstehen z. B. nach A. Knop [2]) auf den Spaltungsflächen von Uranglimmer durch sehr verdünnte Salpetersäure halbregelmäfsige Achtecke, auf denen von Magnesiaglimmer durch Fluorammonium Sechsecke mit gleichen Seiten, aber nur abwechselnd gleichen Winkeln, u. s. f.; lauter Figuren, die man auf den Tafeln der angeführten geometrischen Abhandlung wiederfindet. Wenn nun auch keineswegs bekannt ist, in welcher Weise die Lösungs-

1) Unters. über d. Härte an Krystallflächen. Gekrönte Preisschrift 1873.
2) Vorgezeigt bei der V. Vers. d. oberrheinisch. geolog. Vereins zu Mannheim 18. Oktober 1873. Vgl. Neues Jahrb. f. Miner. 1874.

Digitized by Google

geschwindigkeit in verschiedenen Richtungen von der Struktur abhängt, so findet doch der von vornherein zu vermuthende Zusammenhang beider hier eine neue Bestätigung, sobald man die regelmäfsigen Punktsysteme als Strukturformen anerkannt.

Die Unterschiede der Elasticität[1]), sowie die der Wärmeleitung in krystallographisch verschiedenen Richtungen sind nothwendige Folgen der Hypothese. — Was dieselbe in Betreff des magnetischen und elektrischen Verhaltens für Consequenzen hat, ist nicht leicht abzusehen.

Dagegen ergiebt sich ein überraschender Zusammenhang mit gewissen *optischen* Erscheinungen. Bekanntlich zeigen diejenigen Krystalle, welche die Polarisationsebene eines durchgehenden Strahls nach rechts oder links drehen, oft auch äufserlich durch das Auftreten gewisser Flächen den Gegensatz von rechts und links. Ganz entsprechend giebt es nun auch unter den regelmäfsigen Punktsystemen viele, welchen dieser Gegensatz innewohnt; derselbe ist keineswegs auf die ausdrücklich als rechte und linke Schraubensysteme unterschiedenen Systeme beschränkt, sondern viel weiter verbreitet; denn man hat z. B. rechte und linke Stufen zu unterscheiden (Vgl. System III, 5), desgleichen rechts und links gewundene Säulen, rechte und linke Zwölfpunktner (System VII, 1—3), je nachdem zu ihrer Construction das Rhombentedraëder der einen oder der anderen Stellung (Vgl. S. 6) benutzt ist. Vielleicht ist es sogar nicht zu kühn, die Analogie noch weiter zu verfolgen. Es ist bekanntlich nachgewiesen, dafs ein geradlinig polarisirter Strahl, der in einen optisch einaxigen cirkular polarisirenden Krystall parallel der Axe eintritt, in einen rechts und einen links cirkularen Strahl zerlegt wird, welche mit ungleichen Geschwindigkeiten fortschreiten. Die analoge geometrische Eigenthümlichkeit besteht darin, dafs in gewissen Punktsystemen Punktschrauben von einem

1) Vgl. z. B. die Untersuchungen von Baumgarten über die Elasticität von Kalkspathstäbchen (Pogg. Ann. 1874, Bd. 152, S. 369), sowie die analogen Untersuchungen von Voigt über Steinsalz.

Digitized by Google

und dem anderen Drehungssinn nebeneinander existiren; dieselben können sich an Weite und Höhe, sowie noch dadurch unterscheiden, dafs ihre schraubenförmige Bildung mehr oder weniger regelmäfsig ist. Hierher gehören z. B. die Gegenschraubensysteme (IV, A. 5, Fig. 12, u. VIII, 6), ferner das dreizählige Doppelschraubensystem V, B. 2 und andere.

Dafs die Zurückführung der Circularpolarisation von Krystallen auf eine schraubenförmige Anordnung der Molecüle eine höchst wahrscheinliche Hypothese ist, erhellt am besten aus einer bekannten Entdeckung von Reusch[1]), derzufolge durch eine Art wendeltreppenförmiger Aufschichtung von optisch zweiaxigen Glimmerplättchen sehr geringer, aber gleicher Dicke, wobei jedes mit dem vorigen einen Winkel von 60° (oder ebensogut einen Winkel von 45°) bildet, ein nahezu wie Quarz wirkendes Präparat entsteht, und zwar rechts oder links drehend, je nach dem Windungssinne der Wendeltreppe. Bedenkt man, dafs bei den Schraubensystemen ebenfalls jede zur Schraubenaxe senkrechte Punktebene gegen die vorhergehende immer um denselben Winkel (von 60° oder 90° oder 120°) gedreht ist, so leuchtet die vollkommene Analogie jener Glimmercombination mit den schraubenförmigen Punktsystemen ein. Es scheint hiernach ausführbar und lohnend, auf Grund dieser Ueberlegungen eine neue mathematische Theorie der circularpolarisirenden Stoffe aufzubauen.

Es ist nicht undenkbar, dafs auch die Drehung der Polarisationsebene in Flüssigkeiten (und Dämpfen) auf einer ähnlichen Molecularanordnung beruht, ohne dafs man einen unmittelbaren drehenden Einfluſs des einzelnen Körpermolecüls auf den Aether anzunehmen braucht, wie ein solcher ja auch bei dem Glimmerpräparat nicht vorhanden ist Man braucht nur vorauszusetzen, was auch aus anderen Gründen nicht unwahrscheinlich ist, dafs in der drehenden Flüssigkeit nicht bloſs einzelne Körpermolecüle, sondern auch

1) Ueber Glimmercombinationen. Monatsberichte der Berliner Akademie 1869, Seite 530.

Digitized by Google

gröfsere Complexe von solchen, nämlich Bruchstücke jener Schrauben, vorhanden sind. Wenn sich nun in Flüssigkeitsschichten von endlicher Dicke sehr viele solche Bruchstücke in den allerverschiedensten Lagen befinden, so folgt von selbst die Proportionalität des Drehungswinkels sowohl mit der Dicke der Schicht als mit dem Gehalt der Lösung an drehender Substanz. Indefs bedarf diese Hypothese noch gewisser Einschränkungen, weil sonst folgen würde, dafs jeder optisch drehende Stoff diese Eigenschaft sowohl im krystallisirten als im gelösten Zustande besitzt, was aber bekanntlich nach bisherigen Erfahrungen nur beim schwefelsauren Strychnin der Fall ist. Der schliefsliche Grund des Drehvermögens ist natürlich doch in der Beschaffenheit des Körpermolecüls zu suchen, durch welche ja die schraubenförmige Anordnung bedingt ist.

Hier drängt sich die Frage auf: Welches für jede der ermittelten Structurformen die Eigenschaften des — in dieser ganzen Abh. durch einen Punkt ersetzt gedachten — Krystallelements seyn müssen, damit es mit seinesgleichen gerade zu jener bestimmten Structurform zusammentritt, d. h. es fragt sich schliefslich nach der Abhängigkeit der Krystallstructur von der Beschaffenheit des Molecüls. Wenn wir nun auch noch sehr weit davon entfernt sind, über diese Hauptfrage schon irgend etwas zu wissen, so scheint doch ihre Beantwortung bei Annahme der neuen Hypothese einigermafsen in das Reich der Möglichkeit gerückt. Hat man nämlich für einen krystallisirenden Stoff auf Grund seiner geometrischen und physikalischen Eigenschaften unter allen möglichen Strukturformen diejenige ermittelt, welche ihm wahrscheinlich zukommt, und kennt man andererseits die chemische Constitution seines Molecüls, so kann es vielleicht gelingen, einen Zusammenhang zwischen dem Bau des Molecüls und der Structurform zu entdecken.

Schliefslich noch einige Worte über die Beziehung der hier entwickelten Hypothese zu der Bravais'schen. Führt

Digitized by Google

man die Krystallelemente selbst, statt der ersetzenden Punkte, in die Betrachtung ein, so sind sie im Allgemeinen nicht sämmtlich parallel gestellt zu denken, wie die Bravais'schen Molecüle, sondern so gelagert, dafs, wenn man mit dem unbegränzt gedachten Krystall die Deckbewegungen des, von den Schwerpunkten seiner Elemente gebildeten regelmäfsigen Systems ausführt, dann auch die Elemente selbst miteinander zur Deckung kommen.

In vielen Fällen ist bis zu einem gewissen Grade Uebereinstimmung zwischen beiden Theorien vorhanden: nämlich bei vielen der geschilderten Strukturformen kann man die Punkte in Gedanken gruppenweise zusammenfassen, z. B. zu lauter Punktpaaren oder zu Dreiecken, Quadraten, Tetraëdern, Zwölfpunktnern u. s. f., wie es ja bei der Beschreibung der Punktsysteme wiederholt geschehen ist. Wenn man dann jede solche Gruppe durch ihren Schwerpunkt ersetzt denkt, so bilden diese Schwerpunkte ein Raumgitter, und die zusammengefafste Punktgruppe entspricht einem Bravais'schen Molecül. Aber es ist immer festzuhalten, dafs sämmtliche Punkte des ganzen Systems durchaus gleichwerthig sind, so dafs um jeden alle anderen in derselben Weise herumliegen, wie um jeden anderen, (was von den Atomen der Bravais'schen Molecüle im Allgemeinen nicht gilt), und dafs jene Zusammenfassung in Gedanken eben nur zur Erleichterung für die Anschauung dienen soll. In vielen Fällen läfst sich diese Zusammenfassung sogar willkürlich auf mehrere Arten ausführen, und in manchen Fällen ist sie ganz unbestimmt, z. B. bei den Schraubensystemen, sowie da wo man von jedem Punkte des Systems zu jedem anderen auf lauter gleich langen Punktverbindungslinien fortschreiten kann. — Dafs die Raumgitter selbst sämmtlich als Specialfälle unter den regelmäfsigen Punktsystemen enthalten sind, braucht hier wohl kaum nochmals ausdrücklich hervorgehoben zu werden.

Zusammenfassend kann man sagen, dafs vorläufig keine Thatsache bekannt ist, welche der neuen Hypothese ent-

Digitized by Google

gegensteht, im Gegentheil: dafs alle Erscheinungen sehr gut mit ihr übereinstimmen, ja dafs sich sogar Aussichten auf die Lösung der interessantesten Probleme eröffnen, so dafs die Hypothese fruchtbar und lebensfähig erscheint. —

II. *Untersuchungen über den Magnetismus von Stahlstäben; von Carl Fromme*[1]).

§ 1. Die nächste Veranlassung zu der vorliegenden Abhandlung gab eine im Sommer 1873 von der philosophischen Fakultät zu Göttingen gestellte Preisaufgabe, welche „eine nähere Untersuchung des bei dem Magnetismus eines Stahlstabs vergänglichen Theils bei verschiedener Stärke des beharrlichen Theils und unter Einwirkung verschiedener Scheidungskräfte“ verlangte.

Diese Aufgabe berührt ein noch ziemlich dunkles Gebiet der Physik.

Die Magnetisirungsverhältnisse des weichen Eisens sind in den drei letzten Jahrzehnten von zahlreichen Beobachtern so gründlich untersucht worden, dafs für die nächste Zeit kaum noch viel mehr als ein Ausbau des Gebäudes übrig bleiben dürfte. Erwägt man aber, wie lange Zeit es doch gedauert hat, bis man über das im Verhältnifs zum Stahl so leicht zu behandelnde weiche Eisen Klarheit erlangte, so darf es nicht wundern, dafs die über jenen bis dahin geführten Untersuchungen bei Weitem nicht die wünschenswerthe und wohl auch erreichbare Durchsichtigkeit seiner Magnetisirungsverhältnisse gebracht haben.

Die Gründe, weshalb der Stahl der Erforschung seiner magnetischen Eigenschaften solche Schwierigkeiten entgegensetzt, sind bekannt: Es ist erstens der nach der

1) Ein Auszug von dieser Abhandlung findet sich schon in d. Ann. Bd. 155, S. 305.

Digitized by Google

Wirkung der magnetisirenden Kraft auftretende remanente Magnetismus[1]). Es verhalten sich ferner die einzelnen Varietäten des Stahls sehr ungleich, und dies begründet eine weitere Verwicklung. Zudem kann man den Stahl im weichen, im gehärteten Zustande und zu verschiedenen Graden angelassen benutzen und danach dieselbe Sorte unter verschiedenen Verhältnissen einer Prüfung unterwerfen.

Eine Untersuchung der magnetischen Verschiedenheiten, welche durch die specifische Natur der Stahlsorten eintreten, wird uns nun bei unserer Unkenntnifs der molecularen Beschaffenheit des Stahls wenig Aufklärung verschaffen können. Zudem existiren über diesen Punkt schon eine ganze Reihe von Arbeiten, deren weitere Vermehrung vorläufig kaum räthlich erscheinen dürfte. Was weiter den Einfluſs der Härtung betrifft, so habe ich denselben, bis dahin wenigstens, noch aufser Acht gelassen.

Schliefslich habe ich auch die Verwicklung, welche durch das Auftreten des remanenten Magnetismus entsteht, dadurch auf ihr geringstes Maafs zurückzuführen gesucht, dafs ich immer nur solche magnetisirende Kräfte anwandte, welche die durch den einmal vorhandenen permanenten Magnetismus entstandene Polarität zu erhalten strebten.

Ich habe also vor der Hand unter den einfachsten Verhältnissen gearbeitet, indem ich ungehärtete Stahlstäbe immer in gleicher Richtung wirkenden magnetisirenden Kräften unterwarf.

§ 2. Mit Rücksicht auf die berührten Gründe wählte ich nur zwei Stahlsorten aus, von verschiedenem specifischen Gewicht und sehr grofser Homogenëität. Von jeder Sorte wurden fünf Stücke geschnitten und dieselben, da die von Neumann und Kirchhoff entwickelte Theorie der Magnetisirung eines Rotationsellipsoids für weiches Eisen sich bewährt hat, in die Form verlängerter Rotationsellipsoide gebracht.

In Tabelle I. sind die halben grofsen und kleinen

1) Hierüber siehe Wiedemann, Galvan. 2. Band. § 314. IV. 2. Aufl.

Digitized by Google

Tabelle I.

	$a^{(mm)}$		$b^{(mm)}$		C		s		$v^{(cbcm)}$		$m^{(mgr)}$	
I, 1.	40,025	40,015	12,685	12,739	1,28361	1,29081	7,82366	7,82059	26780	26756	209519	209258
2.	55,355	55,305	12,505	12,500	0,82805	0,82876	7,82737	7,82123	35666	35634	279169	278700
3.	70,165	70,107	12,840	12,865	0,61995	0,62239	7,81957	7,82195	48176	48106	376712	376283
4.	89,890	89,863	12,645	12,650	0,42521	0,42565	7,82397	7,82274	62661	62598	490258	489689
5.	100,403	100,395	10,187	10,188	0,26063	0,26069	7,82184	7,82148	47438	47374	371052	370532
II, 1.	40,595	40,600	12,449	12,441	1,23199	1,23081	7,83577	7,83384	25865	25817	202674	202248
2.	55,423	55,412	12,599	12,592	0,83506	0,83462	7,83514	7,83221	36961	36901	289596	289019
3.	70,353	70,295	12,410	12,395	0,58875	0,58842	7,83353	7,83240	47007	46786	368235	366449
4.	90,245	90,270	12,628	12,597	0,42189	0,42025	7,83534	7,83366	62842	62567	492385	490125
5.	99,895	99,940	10,248	10,178	0,26506	0,26221	7,83426	7,83116	47363	47144	371050	369195

Digitized by Google

Axen der Ellipsoide a und b, die Constanten C, welche bestimmt sind durch die Gleichung:

$$C = 4\pi\sigma(\sigma^2-1)\left\{\tfrac{1}{2}\lg\text{nat}\frac{\sigma+1}{\sigma-1} - \frac{1}{\sigma}\right\}$$

$$\sigma^2 = \frac{a^2}{a^2-b^2},$$

die specifischen Gewichte s, die Volumina v und die absoluten Gewichte m zusammengestellt und zwar zuerst, wie sie frisch aus der Werkstatt vom Mechanikus Apel in Göttingen hervorgingen, sodann, nachdem sie später durch Glühen von ihrem remanenten Magnetismus befreit waren.

Die Axen wurden mit dem Comparator gemessen, die Volumina durch Wägung in Wasser bestimmt. Eine Vergleichung der so erhaltenen Volumina mit den aus der Länge der Axen berechneten ergab eine gute Uebereinstimmung der beiderseitigen Werthe als Beweis der richtigen Anfertigung der Ellipsoide.

Da der gröfste Unterschied der specifischen Gewichte bei Sorte I. 0,0078 resp. 0,0022 beträgt und bei Sorte II. 0,0022 resp. 0,0027, so wird man bei so grofser Homogenëität eine Vergleichbarkeit der mit den einzelnen Stücken einer Sorte erhaltenen Resultate von vorn herein für möglich halten können.

§ 3. Die Theorie der Magnetisirung, welche W. Weber mit Zugrundlegung der Ansicht von drehbaren Molecularmagneten aufgestellt hat, bezieht sich bekanntlich nur auf weiches Eisen; um auch auf Stahl Anwendung zu finden, bedarf sie einer Modification, welche die Erscheinung des remanenten Magnetismus berücksichtigt.

Eine solche glaubt Maxwell[1]) gefunden zu haben in der Annahme, dafs die Molecularmagnete, wenn sie durch eine magnetisirende Kraft um einen Winkel, kleiner als ein bestimmter Winkel β_0, aus ihrer Gleichgewichtslage gedreht werden, nach Aufhören der Wirkung der Kraft zu derselben zurückkehren. Ist dagegen der Drehungs-

1) *Treatise on Electricity and Magnetism, Vol. II. S.* 79.

Digitized by Google

winkel β gröfser als β_0, so sollen sie eine dauernde Ablenkung um einen Winkel $\beta - \beta_0$ erhalten.

Eine experimentelle Bestätigung dieser Theorie ist nun meines Wissens bis dahin nicht erfolgt, vielleicht auch gar nicht versucht worden. Nur Rowland sagt in seiner Abhandlung: *On Magnetic Permeability ectr., Phil. Mag.* 1873. *II.*: Seine Tabellen schienen zu beweisen, dafs aller Magnetismus bei kleinen magnetisirenden Kräften *fast oder ganz* temporär sey.

Nun sind uns in den beiden Componenten der erdmagnetischen Kraft sehr geringe magnetisirende Kräfte gegeben, welche, wenn überhaupt die Maxwell'sche Theorie irgend welche Bedeutung hat, der Forderung, keinen remanenten Magnetismus zu erzeugen, Genüge leisten müssen. Da wir nun auch zur Untersuchung der durch die Erdkraft erregten Magnetismen im Besitze einer sehr feinen von Weber[1]) angegebenen und benutzten und zuerst von Riecke[2]) in gröfserem Maafse zur Untersuchung der Magnetisirungsverhältnisse des weichen Eisens angewandten Methode sind, so habe ich meine Versuche damit begonnen, dafs ich nach dieser Methode die Ellipsoide der Wirkung beider Componenten der Erdkraft unterwarf.

In der That zeigte sich zwischen den vor und nach einer Beobachtungsreihe ermittelten permanenten Magnetismen keine Beziehung, welche auf eine Veränderung derselben durch Wirkung der Erdkraft hätte schliefsen lassen können.

Die Methode will ich nur in ganz allgemeinen Zügen auseinander setzen; in ausführlicher Darstellung mit Entwicklung der Formeln ist sie in der angeführten Abhandlung von Riecke zu finden.

1) W. Weber im 6. Band der Abhandl. d. Gesellsch. d. Wissensch. in Göttingen: Bestimmung der rechtwinkligen Compon. d. erdmagn. Kraft in Göttingen in d. Zeitraum von 1834—1853.

2) Beiträge zur Kenntnifs der Magnetisirung des weichen Eisens: Pogg. Ann. Band 149.

Digitized by Google

Verlangt ist eine Spirale und in Verbindung mit dieser ein Galvanometer, dessen astatisches Nadelpaar eine möglichst grofse Schwingungsdauer hat. Die Spirale ist um eine zu ihrer geometrischen Axe senkrechte drehbar und wird mit ihrer Drehungsaxe in die Ebene des magnetischen Meridians gestellt, diese horizontal resp. vertikal bei Benutzung der vertikalen resp. horizontalen Componente. Wird die Spirale, deren Windungsfläche anfänglich senkrecht zu der inducirenden Componente seyn soll, rasch um 180° gedreht, so wird in ihr ein Strom inducirt, der sich in der Ablenkung der Galvanometernadel äufsert. Verstärkt man die Ablenkung nach der Methode der Multiplication, so ist der Sinus des halben, durch die Multiplication resultirenden Ablenkungs-Winkels ein Maafs für die Stärke des inducirten Stroms.

Wird nun aber ein Ellipsoid, die Hauptaxe zusammenfallend mit der Axe der Spirale, in der Mitte derselben befestigt und wieder die Drehung um 180° ausgeführt, so wird jetzt zu dem durch directe Wirkung der Erdkraft inducirten Strom ein zweiter sich addiren, welcher dadurch entsteht, dafs der durch die erdmagnetische Componente inducirte ***Magnetismus der Lage*** seine relative Stellung gegen die Enden der Spirale umgekehrt hat.

Da dies nicht von dem etwa vorhandenen permanenten Magnetismus gilt, so bleibt dieser vollständig wirkungslos. Um den durch die Umkehrung des temporären magnetischen Moments inducirten Strom allein zu erhalten, ist es also nöthig, einmal mit der Spirale allein, dann mit der Spirale und eingeschobenem Ellipsoid zu operiren.

Bezeichnen wir mit resp. J und i die Ströme, welche mittelbar durch die Umkehrung des magnetischen Moments und durch directe Induction erregt worden, mit α und β die Ablenkungswinkel der Galvanometernadel, so besteht die Beziehung:

$$J : i = \sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\beta}{2} : \sin\frac{\beta}{2}.$$

Digitized by Google

Nun ist:

$$i = 2\,\frac{\varepsilon}{w}\,F\,.\,X,$$

wo ε die Inductionsconstante,
w der Widerstand des Stromkreises,
F die von den Spiralwindungen umschlossene Fläche,
X die inducirende Componente

und

$$J = 8\pi\,\frac{\varepsilon}{w}\,S\,.\,M,$$

wo S eine durch die Dimensionen der Spirale und des Ellipsoids bestimmte Constante und
M das magnetische Moment des Ellipsoids in der Richtung seiner Hauptaxe.

Durch Einsetzen dieser Werthe von J und i in die erste Gleichung folgt:

$$M = G\,.\,X,$$

$$G = \frac{1}{4\pi}\,.\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\,.\,\frac{F}{S}\,.$$

Zur Berechnung der Magnetisirungsfunction k dient endlich die Neumann'sche Formel:

$$M = k\,.\,v\,.\,\frac{X}{1 + k\,C},$$

wo v das Volumen des Ellipsoids und
C die früher genannte von der Excentricität abhängige Constante

$$k = \frac{G}{v - G\,C}.$$

Schliefslich ist das zugehörige Argument:

$$K = \frac{X}{1 + k\,C}\,.$$

§ 4. Der Inductor bestand aus einer Messingröhre, 547^{mm} lang und 43,5^{mm} im Durchmesser, auf welche vier Lagen isolirten Kupferdrahts gewickelt waren. Die von den Windungen umschlossene Fläche ist

$$F = 1735000^{\square mm}.$$

Digitized by Google

Die von den Dimensionen der Spirale und des Ellipsoids abhängige Gröfse S ist für die fünf Ellipsoide ziemlich constant: ihre Werthe liegen zwischen 1,4537 und 1,4533. Die Gröfse der Componenten der erdmagnetischen Kraft ist der Variationsformel von Kohlrausch[1]) entnommen: Für die Mitte des Monats Februar 1874 ergeben sie sich danach:

$$V = 4{,}314,$$
$$H = 1{,}866.$$

Nach diesen Angaben kann man G und daraus k und K berechnen, sobald durch die Beobachtung die Winkel α und β ermittelt sind.

Hierzu dienten jedesmal drei Beobachtungsreihen, indem vor und nach jeder Beobachtung mit eingeschobenem Ellipsoid immer durch Drehung der Spirale allein der dem directen Inductionsstrom entsprechende Winkel β ermittelt wurde. Jede dieser drei Reihen bestand aus zwei Sätzen von je 12 Umkehrpunkten der Galvanometernadel, welche zur Hälfte dem einen, zur Hälfte dem andern Endpunkt des Multiplicationsbogens zugehörten. Die Umkehrpunkte wurden folgeweise zu dreien verbunden und aus jedem der acht entstehenden Tripel der Multiplicationsausschlag auf der Scala berechnet.

Beispielsweise gebe ich das Protocoll einer Beobachtung vollständig wieder.

Montag, den 2. März 1874, Abends. Temperatur 7° C. Ellipsoid I, 5.

Inducirend: die horizontale Componente.

Spirale.

a	b	a	b
784,3	740,3	785,3	741,0
784,6	740,6	785,0	740,8
784,9	740,8	785,3	741,0
784,9	740,7	785,1	741,0
785,0	740,8	785,0	741,0
785,0	741,0	785,0	741,1

1) Nachrichten von der Gesellsch. d. Wissensch. zu Gött. 1868, S. 159.

Digitized by Google

$a-b$	$a-b$
44,15	44,15
44,2	44,4
44,25	44,05
44,1	44,0
44,175	44,15

$$n = \frac{a-b}{2} = 22{,}0813.$$

Spirale plus Ellipsoid.

b'	a'	b'	a'
711,6	814,9	711,0	814,6
711,2	814,8	710,8	814,5
711,0	814,7	710,5	814,2
710,9	814,7	710,2	813,8
710,7	814,8	710,1	813,8
711,0	814,8	710,1	813,8

$a'-b'$	$a'-b'$
103,5	103,7
103,75	103,85
103,9	103,65
103,8	103,7
103,7375	103,725

$$n' = \frac{a'-b'}{2} = 51{,}8656.$$

Spirale.

b	a	b	a
739,0	783,2	739,9	783,0
739,3	783,0	739,7	782,7
739,1	783,3	738,5	782,5
738,9	783,0	738,7	782,6
739,1	783,0	738,4	782,4
738,9	782,8	738,4	782,4

Digitized by Google

$a-b$	$a-b$
44,05	44,2
44,05	44,1
44,0	44,05
44,0	44,0
44,025	44,0875

$$n = \frac{a-b}{2} = 22{,}0281.$$

Im Mittel $n = 22{,}0547$.

Da die Entfernung von Spiegel zu Skala

$$r = 3317{,}006 \text{ Skalentheilen}$$

war, so konnte, bei der hieraus folgenden Kleinheit der Winkel, nach der Formel

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{4r}\left(n - \frac{11}{32}\frac{n^3}{r^2}\right)$$

gerechnet werden.

Es folgt:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = 0{,}00390877,$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = 0{,}00166222$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\beta}{2} = 0{,}00224655.$$

$$G = 130218,$$
$$k = 9{,}6467,$$
$$K = 0{,}53107.$$

Die grofse Uebereinstimmung der Einzelwerthe von $a-b$ ist nicht etwa nur diesem Beispiel eigen, sie zeigte sich in überraschender Weise bei fast allen Beobachtungen.

Zugleich sieht man aber, wie ungeheuer klein die Winkel α und β sind, selbst bei einem so empfindlichen Galvanometer, wie das benutzte war. Dasselbe hatte anfänglich — später ist sie etwas geringer gewesen — eine Schwingungsdauer von nahe 37 Secunden.

Die Schwierigkeit der Beobachtung wächst, wenn Ellipsoide von geringerer Excentricität, wie die Nummern

Digitized by Google

(1) und (2) verwandt werden. Es betrug unter Wirkung der Horizontalcomponente der Unterschied von n und n' bei (1) noch nicht fünf, bei (2) neun Skalentheile.

Während der vier Wochen, welche die Beobachtungen ausfüllten, variirte die Temperatur des Beobachtungsraumes nur zwischen $2^0,5$ und 8^0 C., eine Schwankung, die selbstverständlich ohne jede Einwirkung war.

Nachdem zuerst für jedes der Ellipsoide mit Hülfe der Verticalcomponente zum Theil zwei Werthpaare von k und K ermittelt waren, mufste, als eben erst auf Ell. I, 4 und I, 5 die Horizontalcomponente gewirkt hatte, der Inductor einer Reparatur unterzogen werden. Als der durch Verletzung der Isolirung hervorgerufene Schaden ausgebessert war, wurden die Beobachtungen fortgesetzt, indem nun jedes der Ellipsoide zweimal der horizontalen, sodann noch einmal der verticalen Componente unterworfen wurde.

In Tabelle II sind die Werthe von G, k und K zusammengestellt, doch habe ich die vor der Reparatur erhaltenen Werthe durch Bezeichnung mit einem (*) von den übrigen abgesondert.

§ 5. Betrachten wir vor der Hand nur die nach Reparatur des Inductors erhaltenen Werthe von k und K.

Im Mittel sind dieselben:

	Verticalcomponente		Horizontalcomponente	
	k	K	k	K
I, 1.	15,9974	0,2003	23,5034	0,0610
2.	11,8461	0,3991	18,0285	0,1062
3.	10,4328	0,5777	12,6030	0,2121
4.	9,8564	0,8311	11,4105	0,3189
5.	8,6826	1,3222	9,6467	0,5311
II, 1.	6,1380	0,5039	11,8347	0,1199
2.	6,3318	0,6890	7,7361	0,2511
3.	5,9333	0,9601	6,4746	0,3879
4.	6,4917	1,1539	6,9191	0,4762
5.	5,8772	1,6867	5,9691	0,7228

Digitized by Google

Tabelle II.

Verticale Componente.					Horizontale Componente.				
Ellipsoid	Beobachtungstag	G	k	K	Ellipsoid	Beobachtungstag	G	k	K
I, 1.	* 11./2.	20560	52,8676	0,06265	I, 1.	25./2.	20272	26,7246	0,05286
	11./3.	19894	15,9974	0,20034		2./3.	20091	20,2821	0,06904
2.	* 11. 2.	40080	16,1767	0,29970	2.	26./2.	40202	16,9155	0,12437
	2./3.	39108	11,9152	0,39702		2./3.	40516	19,1414	0,08798
	6./3.	39066	11,7770	0,40124					
3.	* 12./2.	69133	13,0048	0,47583	3.	26./2.	68522	12,0320	0,22062
	2./3.	67269	10,3936	0,57958		2./3.	69232	13,1742	0,20358
	6./3.	67336	10,4720	0,57583					
4.	* 12./2.	121205	10,8965	0,76583	4.	* 19./2.	117364	9,2002	0,37995
	5./3.	118976	9,8564	0,83108		2./3.	122182	11,4105	0,31893
5.	* 12./2.	128615	9,2420	1,26561	5.	* 19./2.	124688	8,3458	0,58778
	5./3.	126230	8,6826	1,32220		2./3.	130219	9,6467	0,53107
II, 1.	* 17./2.	19478	10,4216	0,31173	II, 1.	26./2.	19691	12,2567	0,11585
	11./3.	18487	6,1368	0,50396		1./3.	19601	11,4126	0,12392
	12./3.	18543	6,1393	0,50379					
2.	* 17./2.	38388	7,8257	0,57256	2.	26./2.	38665	8,2729	0,23599
	11./3.	37648	6,8163	0,64467		1./3.	37950	7,1993	0,26617
	12./3.	36738	5,8473	0,73335					
3.	* 17./2.	63603	6,6521	0,87750	3.	27./2.	63397	6,5477	0,38442
	11./3.	62073	5,9333	0,96014		1./3.	63100	6,4014	0,39136
4.	* 13./2.	110936	6,9167	1,07686	4.	27./2.	110845	6,8945	0,47748
	* 18./2.	109107	6,4903	1,15408		1./3.	111046	6,9437	0,47500
	11./3.	109113	6,4917	1,15390					
5.	* 13./2.	109893	6,0267	1,62438	5.	27./2.	109223	5,9322	0,72553
	* 18./2.	110178	6,0674	1,65407		1./3.	109747	6,0060	0,72006
	11./3.	108827	5,8772	1,68666					

Digitized by Google

Aus den jedem Ellipsoid entsprechenden beiden Werthen ergiebt sich, daſs

„*k* abnimmt mit wachsender magnetisirender Kraft, oder dass diese rascher wächst, als das magnetische Moment.“

Dasselbe folgt, wenn man die Ellipsoide einer Sorte als untereinander vergleichbar betrachtet, aus den beiden durch die verticale und horizontale Componente erhaltenen Werthreihen der Sorte I, weniger gut, wegen II, 4, aus der zweiten Werthreihe der Sorte II, gar nicht aus der ersten Reihe derselben.

Man wird sich also von dem Verlaufe der Magnetisirungsfunction *k* unter der Wirkung schwacher Kräfte, welche keinen bemerkbaren remanenten Magnetismus hinterlassen, folgende Vorstellung bilden können:

„Von einem groſsen Anfangswerthe an nimmt *k* mit wachsender magnetisirender Kraft zuerst rasch, dann langsamer ab und erreicht sehr bald ein Minimum, dessen Eintritt von der specifischen Natur des Stahls abhängig ist. Es tritt bei einem desto kleineren Werthe der Kraft ein, je härter der Stahl ist.“

So scheint bei der härteren Sorte das Minimum unter Wirkung der Verticalcomponente erreicht oder vielleicht bereits überschritten zu seyn.

„Daher erhalten auch verschieden gestreckte Ellipsoide derselben Sorte bei constanter *äuſserer* magnetisirender Kraft verschiedene Werthe, welche sich in eine mit wachsender Excentricität, d. h. mit wachsender auf jedes Theilchen wirkender Kraft fallende Reihe ordnen.

„Diese abweichenden Werthe convergiren aber mit wachsender Kraft gegen einen gemeinschaftlichen (Minimal-) Gränzwerth.“

Ordnet man alle mit Sorte I erhaltenen Werthe von *k* in eine nach den Argumenten *K* wachsende Reihe:

Digitized by Google

k		K	
23,5034		0,0610	
18,0285		0,1062	
15,9974		0,2003	
12,6030		0,2121	
11,4105	11,6283	0,3189	0,3590
11,8461		0,3991	
9,6467	10,0398	0,5311	0,5544
10,4328		0,5777	
9,8564		0,8311	
8,6826		1,3222	

so entspricht, wenn man nur die angedeuteten beiden Mittel nimmt, der Reihe mit wachsenden K eine Reihe mit regelmäfsig abnehmenden k. Es folgt hieraus, dafs die Sorte I in ihren verschiedenen Stücken durchgängig die gleiche Magnetisirungsfunction — für das Bereich der angewandten Kräfte und für den permanenten Magnetismus gleich Null — besitzt, indem einem gleichen Argument K bei verschiedenen Ellipsoiden das gleiche k zugehört,

> „dafs demnach die Neumann-Kirchhoff'schen Entwicklungen in dem vorliegenden Fall, wie für weiches Eisen, so auch für Stahl Gültigkeit haben."

Für Sorte II kann man eine so regelmäfsige Reihe nicht aufstellen, wohl aus dem zweifachen Grunde, weil die Sorte erstens weniger homogen war, und zweitens hauptsächlich defshalb, weil sich die Werthe von k in der Nähe des Minimums befinden, wo die Unterschiede der Werthe und die Veränderlichkeit jedes einzelnen mit wachsender Kraft zu gering sind.

Was nun endlich die vor Reparatur des Inductors erhaltenen Werthe betrifft, so zeigt der erste Blick, dafs sie sich in zwei Punkten von den eben betrachteten unterscheiden.

1) Die mit der Verticalcomponente erhaltenen Werthe von k sind gröfser als die vorigen, während die beiden der Horizontalcomponente entsprechenden kleiner sind.

Digitized by Google

2) Die Abweichungen zwischen den Werthen für die Ellipsoide *einer* Sorte sind gröfser: so ist die Differenz von I, 1 bis I, 5 43,6 gegen 7,3, die von II, 1 bis II, 5 4,35, während nachher eine solche regelmäfsige Abweichung gar nicht mehr nachweisbar ist, die Werthe von k ganz durcheinander gehen und sich nicht im Entferntesten in eine Reihe ordnen.

Wenn man nun auch hierauf keine Schlüsse bauen wird, da sich gegen eine Vergleichbarkeit der beiderseitigen Werthreihen doch sehr viel einwenden läfst, so wird man immerhin soviel sagen können, dafs nach dem vorhin Behaupteten eine Vergröfserung der verticalen und eine Verkleinerung der horizontalen Componente bei den zweiten Werthreihen die beobachteten Abweichungen hervorgebracht haben würde.

Durch Eintragung der mit I erhaltenen Werthreihen in ein Coordinatensystem, K als Abscisse, k als Ordinate genommen, erhält man sehr regelmäfsige Curven und zwar sowohl bei Benutzung der Einzel- als der Mittelwerthe. Die beiden der verticalen und der horizontalen Componente entsprechenden Curven laufen sehr gut parallel. Die Curven von II verlaufen gerade so wie die von I, wenn man nur II, 4 von vorn herein ausschliefst.

§ 6. Nach Beendigung der Beobachtungen mit dem Erdinductor wurde der Versuch gemacht, die Maxwell'sche Theorie in der Weise einer Prüfung zu unterziehen, dafs man durch ganz allmählige Steigerung der magnetisirenden Kraft — eines constanten galvanischen Stroms — von einem sehr kleinen Anfangswerthe an denjenigen Werth zu ermitteln trachtete, bei welchem nach Maxwell zuerst remanenter Magnetismus auftreten soll.

Die Ellipsoide wurden in der Mitte einer Spirale befestigt, welche bezüglich ihrer Weite und ihrer Länge den Bedingungen einer auf alle Punkte des Stahlkörpers constanten magnetisirenden Kraft genügte. Die Spirale war senkrecht zum magnetischen Meridian nördlich von einem an Cocon hängenden Magnetometer, aus einem

Digitized by Google

magnetisirten Stahlreif mit Spiegel bestehend, aufgestellt. Die ablenkende Wirkung der Magnetisirungsspirale auf das Magnetometer war durch eine südlich von demselben gelegene Compensationsspirale aufgehoben. Der Stromkreis bestand ferner noch aus einer Tangentenbussole mit zwei Windungen und Spiegelablesung derselben, welche Kohlrausch, Pogg. Ann. Bd. 138, bei Mittheilung einer Messung mit dem Bifilargalvanometer beschreibt — und einem Quecksilbercommutator zum Wechseln des Stroms zugleich in den Spiralen und der Bussole.

Ich bemerke noch, dafs durch passende Aufstellung der Apparate ein Einfluſs des Stroms in den Spiralen und des magnetisirten Stahlkörpers auf die Nadel der Tangentenbussole fast ganz vermieden wurde. Wo ein solcher, bei Anwendung stärkerer Ströme, stattfand, ist er niemals über eine Ablenkung der Nadel von höchstens einem Skalentheil hinausgegangen und dann immer durch besondere Versuche ermittelt worden. Bei den jetzt zu beschreibenden Versuchen war eine Correction niemals nöthig.

Der Abstand von Bussole zu Skala betrug 1350,58, der des Magnetometers von der Skala 1303,96 der zugehörigen Skalentheile.

Die Magnetisirungsspirale stand bei allen diesen Versuchen, welche den angegebenen besonderen Zweck hatten, in der gleichen Entfernung von 200,11^{mm} vom Magnetometer. Die constante Entfernung war bei den geringen Gröſsen, die hier gemessen werden sollten, wegen der Vergleichbarkeit der einzelnen Beobachtungen nöthig, die kleine Entfernung, weil die Ablenkung des Magnetometers sonst zu unbedeutend wurde.

Hierbei erwuchs jedoch, wenn man sich nicht mit vergleichenden Messungen der remanenten Momente, in Skalentheilen ausgedrückt, begnügen, sondern auch Beobachtungen der temporären Momente machen und dieselben zu quantitativen Messungen, zur Berechnung der Magnetisirungsfunction, verwenden wollte, die Schwierig-

Digitized by Google

keit, daſs der Polabstand der Ellipsoide mit einem zu der Entfernung 200,11^{mm} zum Theil sehr groſsen relativen Werth in die Rechnung einging.

Nun hat Riecke[1]) vom theoretischen Standpunkte aus einen Ausdruck für den Polabstand gleichförmig magnetisirter Körper entwickelt und denselben besonders einfach gefunden für den Fall, daſs der Magnet ein Rotationskörper ist.

Macht man die Voraussetzung, daſs die fünfte Potenz der halben Länge des Magnets vernachlässigt werden kann gegen die fünfte Potenz der Entfernung von dem afficirten Punkt, so ist der Polabstand eines verlängerten Rotationsellipsoids, dessen Rotationsaxe a zusammenfällt mit seiner magnetischen Axe, wenn b die kleine Axe bedeutet,

$$L = \sqrt{\tfrac{2}{3}(a^2 - b^2)}.$$

Eine Prüfung dieser Formel, welche in der Weise vorgenommen wurde, daſs man die Ablenkung des Magnetometers bei verschiedenen Entfernungen des mit einem gewissen permanenten Magnetismus rersehenen Ellipsoids untersuchte, ergab eine gute Uebereinstimmung der hieraus mit Hülfe der Polabstandsformel berechneten magnetischen Momente. Es wurde daher die Formel von Riecke immer unbedenklich benutzt.

Das Ein- resp. Ausschieben des Ellipsoids aus der Spirale geschah immer bei geschlossenem Strom, um das Entstehen von Inductionsströmen möglichst auszuschlieſsen.

Die Tabelle III (S. 308, 309) giebt die temporären Momente TM, die Stromstärke i, die äuſsere magnetisirende Kraft X und soweit es möglich war, dieselbe zu berechnen, die Magnetisirungsfunction k und deren Argument K, sodann in Skalentheilen ausgedrückt, den ursprünglichen Magnetismus UM und den remanenten RM.

§ 7. Ehe wir die sich aus der Tabelle ergebenden Folgerungen ziehen, wollen wir uns die Alternative, welche

1) Nachr. von d. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen 1872. No. 12. Pogg. Ann. Bd. 149.

Digitized by Google

hier entschieden werden soll, noch einmal vorlegen. Es sind zwei Fälle möglich: Entweder convergirt der remanente Magnetismus gleichzeitig mit der magnetisirenden Kraft gegen Null, oder aber der remanente Magnetismus erreicht den Werth Null schon für einen endlichen Werth der Kraft.

Die Tabelle zeigt nun, dafs sich wenigstens bei den gestreckteren Ellipsoiden annähernd ein Werth der magnetisirenden Kraft feststellen läfst, bei welchem der schon vorhandene Magnetismus (UM) sieh zuerst um eine die Beobachtungsfehler übersteigende Gröfse vermehrt. Es ist remanenter Magnetismus zuerst nachweisbar für folgende Werthe des Arguments K und der Stromstärke i:

	K	i		K	i
I, 1.			II, 1.		
2.	2,3	1,3	2.	2,0	0,7
3.	2,0	0,8	3.	2,2	0,5
4.	2,3	0,6	4.	2,1	0,4
5.	2,8	0,5	5.	2,2	0,3
Mittel	2,35			2,13	

„Remanenter Magnetismus tritt bei einer desto kleineren magnetisirenden Kraft ein, je härter der Stahl ist.“

Dieses Resultat war im Voraus zu erwarten nach der Vorstellung, welche sich die Theorie der drehbaren Molecularmagnete von dem Vorgang der Magnetisirung bildet.

Die Molecularkräfte stehen der Einstellung der Molecule in magnetische Gleichgewichtslagen entgegen, wenn magnetisirende Kräfte auf dieselben einwirken, aber, indem sie durch die Drehung der Molecule selbst eine Aenderung erfahren haben, widersetzen sie sich auch dem Zurückschwingen derselben in ihre unmagnetischen Lagen und halten sie in gewissen magnetischen fest, nachdem die Kraft schon zu wirken aufgehört hat. Da die Molecularkräfte nun beim härteren Stahl stärker sind, als beim weichen, so fällt die temporäre Magnetisirung bei ersterem

Digitized by Google

Ta-

	TM	*i*	*X*	*k*	*K*	*UM*	*RM*
I, 1.	249660	0,7668	13,284	7,074	1,318	1,0	1,0
	294350	0,9019	15,625	7,249	1,516	1,0	1,05
	388120	1,175	20,35	8,293	1,748	1,0	1,05
	441880	1,332	23.08	8,645	1,908	1,0	1,25
	600743	1,810	31,35	8,770	2,557	1,05	1,3
	668050	2,015	34,90	8,653	2,882	1,15	1,25
I, 2.	58720	0,0995	1,7236	—	—	0,75	0,75
	88998	0,1373	2,3806	—	—	0,5	0,5
	530875	0,7931	13,74	10,53	1,414	0,5	0,7
	766030	1,129	19,56	12,13	1,770	0,5	0,8
	956700	1,420	24,60	11,24	2,386	0,7	1,0
	1035500	1,536	26,61	11,307	2,568	1,0	1,2
I, 3.	109420	0,1004	1,739	6,863	0,3309	2,1	2,0
	153300	0,1392	2,411	7,255	0,4385	1,95	2,1
	247440	0,2195	3,803	8,303	0,6186	1,95	1,9
	904100	0,789	13,67	9,219	2,036	1,85	2,5
	972900	0,8448	14,636	9,544	2,116	2,1	2,45
	1230200	1,075	18,62	9,154	2,79	2,1	2,5
	1523250	1,322	22,897	9,595	3,296	2,5	3,1
I, 4.	182767	0,0999	1,7313	5,939	0,4911	0,9	0,9
	257900	0,1352	2,342	6,956	0,5917	0,9	0,95
	432200	0,2231	3,865	7,402	0,9320	0,75	0,9
	628500	0,3141	5,441	8,527	1,180	0,75	1,0
	730750	0,3614	6,261	8,959	1,306	0,9	0,85
	1154840	0,5719	9,909	8,889	2,073	0,9	1,1
	1293200	0,6406	11,008	8,888	2,322	0,9	1,2
	1392000	0,6932	12,01	8,666	2,563	1,05	1,3
	1594740	0,781	13,223	9,392	2,710	1,15	1,4
	1848000	0,905	15,68	9,395	3,139	1,4	1,75
I, 5.	210886	0,0964	1,670	8,695	0,5113	11,05	10,85
	288800	0,1370	2,373	7,745	0,786	11,0	10,85
	320250	0,1521	2,636	7,706	0,8762	10,85	11,0
	472256	0,2285	3,872	7,791	1,277	11,15	11,2
	668500	0,3087	5,349	8,408	1,676	11,1	11,3
	789200	0,3645	6,315	8,408	1,979	11,05	11,15
	947901	0,4457	7,722	7,949	2,514	11,35	11,23
	1226500	0,5697	9,87	8,253	3.131	11,15	11,65
	1386560	0,6423	11,13	8,328	3,509	11,3	11,7

Digitized by Google

belle III.

	TM	*i*	*X*	*k*	*K*	*UM*	*RM*
II, 1.	133900	0,4412	7,644	4,089	1,266	0,5	0,5
	179100	0,5724	9,916	4,998	1,386	0,4	0,5
	218825	0,6942	12,03	5,277	1,603	0,25	0,45
	252470	0,7957	13,79	5,542	1,761	0,2	0,5
	280600	0,8979	15,555	4,953	2,19	0,45	0,55
	331860	1,04	18,03	5,78	2,22	0,45	0.5
	371200	1,17	20,27	5,557	2,583	0,55	0,65
	422930	1,331	23,06	5,608	2,915	0,65	0,7
	490050	1,535	26,59	5,83	3,25	0,5	0,75
II, 2.	63010	0,1013	1,755	—	—	4,9	4,95
	88245	0,1423	2,466	—	—	4,8	4,85
	269400	0,4452	7,714	4,48	1,627	4,8	5,05
	363200	0,5728	9,924	5,72	1,718	4,95	5,1
	398300	0,62	10,742	6,181	1,743	5,0	5,25
	453540	0,7124	12,342	5,857	2,095	5,35	5,55
	581800	0,8988	15,57	6,488	2,426	5,25	5,45
	708100	1,094	18,95	6,494	2,95	5,35	6,2
II, 3.	96770	0,0999	1,731	—	—	2,35	2,35
	142920	0,1401	2,427	4,773	0,637	2,15	2,25
	229010	0,2204	3,818	5,128	0,934	2,1	2,2
	460300	0,4452	7,714	5,025	1,949	2,35	2,35
	601100	0,5719	9,909	5,372	2,38	2,25	3,0
	661600	0,6241	10,81	5,571	2,526	2,25	2,75
II, 4.	166360	0,0999	1,731	4,308	0,6144	2,15	2,25
	219200	0,1379	2,388	3,805	0,9166	2,15	2,2
	420900	0,2226	3,857	6,497	1,031	2,45	2,35
	673500	0,3618	6,268	6,136	1,746	2,65	2,65
	819500	0,4435	7,683	5,978	2,181	2,7	3,0
	1056300	0,5715	9,901	5,982	3,537	2,65	3,4
II, 5.	178900	0,1	1,724	5,229	0,723	0,95	0,8
	247120	0,1383	2,396	5,15	1,013	0,85	0.8
	273930	0,153	2,651	5,173	1,118	0,8	0,75
	398010	0,2226	3,857	5,158	1,63	1,3	1,0
	564000	0,3078	5,333	5,471	2,177	0,85	1,05
	647100	0,3542	6,136	5,431	2,515	1,25	1,6
	766500	0,4194	7,265	5,439	2,976	1,2	2,25
	825300	0,4448	7,706	5,642	3,161	1,8	2,25
	975900	0,5345	9,26	5,425	3,79	2,0	3,1

Google

geringer aus, und indem sie sich bei der Drehung der Molecule auch stärker ändern, so ist der remanente Magnetismus dagegen gröfser.

Dafs bei den gestreckteren Ellipsoiden der remanente Magnetismus früher auftritt, als bei den weniger gestreckten derselben Stahlsorte, erklärt sich daraus, dafs bei gleicher *äufserer* magnetisirender Kraft die auf jeden Molecularmagneten in Summa wirkenden Kräfte bei jenen gröfser sind. Je mehr die Längsdimension eines Körpers gegen seine Querdimensionen hervortritt, desto mehr verschwindet derjenige Theil der gegenseitigen Einwirkung der Molecularmagnete, welcher der äufseren magnetisirenden Kraft entgegengerichtet ist, während gleichzeitig der sie unterstützende und in demselben Sinne wirkende wächst.

Zwischen den Werthen des Arguments K scheint dagegen keine bestimmte Beziehung zu bestehen. Man wird schliefsen dürfen, dafs der remanente Magnetismus bei dem gleichen Werth des Arguments K der Magnetisirungsfunction, wenigstens bei verschieden gestreckten Ellipsoiden der *gleichen* Sorte, eintritt. Anm. Nur I, 5 zeigt einen bedeutend gröfseren Werth des Arguments. Siehe hierüber § 9.

Da man nun aber bei solchen Untersuchungen immer an eine Gränze gelangen mufs, bei welcher eine gesetzmäfsige Veränderlichkeit der zu messenden Gröfsen durch die unvermeidlichen Beobachtungsfehler ganz verdeckt wird, so mufs man bei Aufstellung des Satzes, dafs die Gränze des remanenten Magnetismus einem endlichen Werthe der magnetisirenden Kraft entspricht, immerhin die Beschränkung hinzufügen, dafs bei weiterer Verfeinerung unserer Beobachtungsmittel diese Gränze sich mehr gegen die Null hinausschieben und vielleicht einmal ganz verschwinden wird.

Unter der besagten Beschränkung werden dann die gewonnenen Resultate als experimentelle Bestätigung der Maxwell'schen Theorie des remanenten Magnetismus dienen können.

Digitized by Google

Indefs will ich hier gleich erwähnen, dafs durch die Resultate nachher mitzutheilender Versuche die Theorie noch ein bedeutendes Argument zu ihren Gunsten erhält, so dafs mir die Richtigkeit ihrer Voraussetzungen fast zur Gewifsheit geworden ist.

Auf Grund dieser Versuche bemerke ich aber gleich im Voraus, dafs man von *einer* Gränze des remanenten Magnetismus eigentlich nur dann sprechen kann, wenn man frisch ausgeglühte, *vollkommen unmagnetische* Stahlkörper voraussetzt: Ein — auch nur wenig — permanent magnetischer Körper zeigt eine andere Gränze des remanenten Magnetismus je nach der Gröfse dieses.

Ein *vollkommen unmagnetisches* Stahlstück gehört jedoch in die Reihe der idealen Vorstellungen, und darum wird es auch unmöglich seyn, einen wirklichen experimentellen *Beweis* der Maxwell'schen Annahme zu geben. S. § 9.

Auf eine Discussion der Werthe von k verzichte ich, weil ich dieselben zum grofsen Theil für zu wenig genau halte, um aus ihnen Folgerungen zu ziehen oder gar sie mit den durch den Erdinductor ermittelten zu vergleichen.

Da ich glaubte, dafs durch die bis dahin angewandten Kräfte der magnetische Zustand der Ellipsoide nur sehr wenig geändert seyn könnte, so unterwarf ich nun die Stücke der Sorte I noch einmal der Induction durch die verticale Componente des Erdmagnetismus. Es ergaben sich als Beweis der Richtigkeit dieser Annahme folgende Werthe von k, welche von den in der Tabelle II gegebenen nur unmerkbar differiren:

I,	1.	15,592
	2.	11,596
	3.	10,702
	4.	10,004
	5.	8,965.

§ 8. Die Ellipsoide wurden nun succ. wachsenden, immer im gleichen Sinne magnetisirenden Kräften unterworfen, welche das remanente Moment auf immer gröfsere Werthe erhoben.

Digitized by Google

Wiedemann[1]) hat schon bemerkt, dafs wenn ein Stahlstab zum 1. Mal durch galvanische Ströme magnetisirt wird, die während der Einwirkung der Ströme in demselben erzeugten temporären Momente anfangs schneller wachsen als die Intensitäten der Ströme und erst später einem Maximum sich zu nähern anfangen. Dies Verhalten sollte auch nach wiederholten Magnetisirungen und Entmagnetisirungen der Stäbe bei neuer Magnetisirung stattfinden.

Die Versuche zeigen nun, dafs in diesem Verhalten auch dann keine Aenderung eintritt, wenn der Stab nicht nach jeder Beobachtung von seinem remanenten Magnetismus befreit, sondern dieser durch aufsteigende Kräfte immer mehr erhöht wird.

Als Beispiel diene eine Versuchsreihe mit Ellipsoid II, 4.

Es bedeutet X die magnetisirende Kraft der Spirale, TM das temporäre Moment, RM das ganze nach Aufhören der Wirkung der Kraft zurückbleibende Moment, also das ursprüngliche (UM), vermehrt um das durch die Kraft erzeugte.

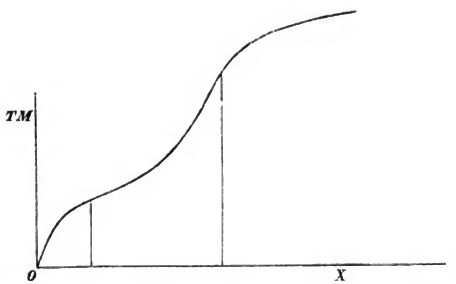
X	$\frac{TM}{X}$	$\frac{TM}{RM}$
13,32	103600	46,7
22,82	103800	41,0
71,31	107800	23,8
94,65	108700	17,7
111,2	109100	15,9

Während also die temporären Momente schneller wachsen als die magnetisirenden Kräfte, wachsen wiederum die remanenten rascher als die temporären. Hieraus folgt demnach auch, dafs die remanenten Momente schneller wachsen als die magnetisirenden Kräfte und zwar nach dem Product der Verhältnisse $\frac{TM}{X}$ und $\frac{RM}{TM}$.

1) Galvanismus, 2. Aufl. II. S. 350.

Digitized by Google

Fassen wir nun alle den temporären Magnetismus des Stahls betreffenden Resultate zusammen, so ergiebt sich, dafs derselbe zuerst langsamer, dann rascher und schliefslich, wie andere Beobachter schon gefunden haben, wieder langsamer als die magnetisirende Kraft wächst, somit eine graphische Darstellung der Abhängigkeit des temporären Magnetismus von der magnetisirenden Kraft eine folgendermafsen gestaltete Curve liefern mufs:



Die beiden gezeichneten Ordinaten entsprechen den beiden Wendepunkten der Magnetisirung.

§ 9. Bei Gelegenheit dieser Versuche wurde ich nun auf Verhältnisse aufmerksam, die mir ganz neu waren und im höchsten Grade interessant schienen, so dafs ich dieselben weiter zu verfolgen beschlofs. Erst nachdem ich einen grofsen Theil dieser Untersuchungen, die nun im Folgenden mitgetheilt werden sollen, beendet hatte, bemerkte ich bei einer Durchsicht der Literatur, dafs derselbe Gegenstand schon vor einer Reihe von Jahren die Aufmerksamkeit Frankenheim's auf sich gezogen hatte. Seine Resultate sind in Pogg. Ann. Bd. 123, S. 49ff. veröffentlicht.

Frankenheim constatirt, dafs die *Dauer* der Einwirkung einer magnetisirenden Kraft von gar keinem Einflufs auf die Gröfse des remanenten Magnetismus ist, von sehr grofsem dagegen die *Anzahl* der Einwirkungen derselben

Digitized by Google

Kraft. Hat man dieselbe nur einmal wirken lassen, so ist dadurch nicht das remanente Moment erreicht, welches dieselbe Kraft überhaupt, d. h. bei wiederholter Einwirkung zu erzeugen im Stande ist. Vielmehr wächst der remanente Magnetismus durch jede folgende Einwirkung und nähert sich einem Gränzwerth, über welchen hinaus dieselbe Kraft ihn nicht zu steigern vermag.

Hieraus ziehe ich nun die bedeutsame, durch den Versuch bestätigte Folgerung, dafs, wenn der remanente Magnetismus durch wiederholte Wirkung der Kraft P seinen Gränzwerth — die dieser Kraft entsprechende Sättigung mit remanentem Magnetismus — erreicht hat, eine kleinere Kraft p denselben zu verändern nicht im Stande ist.

> „Gegenüber allen Kräften, von der Null an bis zu der Kraft P, diese eingeschlossen, verhält sich ein auf den der Kraft P entsprechenden Gränzwerth des remanenten Magnetismus gebrachter Stahlstab wie ein Eisenstab ohne jede Coërcitivkraft."

Dieser Sats läfst sich auch so aussprechen:

> „Für *jedes* permanente Moment eines Stahlstabs existiren von der Null an eine Reihe von magnetisirenden Kräften, gegenüber welchen dieser die Eigenschaften eines weichen Eisenstabs besitzt,"

oder, indem man die Ansicht von drehbaren Molecularmagneten zu Grunde legt und danach annimmt, dafs bei einem ganz weichen Eisenstab die Molecularmagnete nur *eine* Gleichgewichtslage, bei einem Stahlstab dagegen unzählig viele haben, in der Sprache der Mechanik ausgedrückt:

> „Eine jede der unzählig vielen Gleichgewichtslagen der Molecularmagnete des Stahls ist jede für ein gewisses Gebiet von deformirenden Kräften *stabil*. Das Gebiet der anwendbaren Kräfte ist desto ausgedehnter, je weniger die Einstellung der Molecularmagnete von der Richtung der Kräfte abweicht."

Digitized by Google

Hieraus läfst sich nun zwar kein *Beweis* der Maxwell'schen Theorie, aber doch ein Argument zu ihren Gunsten ableiten. Wenn nämlich selbst für die gröfsten Deformationen die Molecularmagnete, sobald nur ihre Gleichgewichtslagen einem möglichst starken permanenten Magnetismus entsprechen, die Stabilität ihres Gleichgewichts bewahren, so ist nicht abzusehen, warum nicht auch die dem unmagnetischen Zustand entsprechende Anordnung der Molecüle für gewisse, sehr kleine Kräfte eine Stabilität der Gleichgewichtslagen aufweisen sollte.

Es leuchtet aber ferner ein, dafs dann für einen Stahlstab, welcher nicht gänzlich von permanentem Magnetismus befreit ist, nach Maafsgabe der Gröfse desselben, auch das Bereich der Kräfte, welche keinen remanenten Magnetismus hinterlassen, sich erweitern mufs. Durch den bedeutenden permanenten Magnetismus, welchen I, 5 schon bei den § 6 u. 7 beschriebenen Versuchen hatte, ist vielleicht der gröfsere Werth des Arguments K, bei welchem remanenter Magnetismus zuerst auftritt, hervorgerufen. S. die Anm. § 7.

Der Vorgang bei der wiederholten Magnetisirung eines Stahlstabs durch eine constante magnetisirende Kraft P ist nun endlich folgender: der erste Impuls erzeugt ein remanentes Moment M_1. Es entspricht dieses einer gewissen Kraft $p_1 < P$ als Sättigungsmoment. Der 2. Impuls vergröfsert das remanente Moment um $M_2 - M_1$, wo M_2 einer Kraft p_2 als Sättigungsmoment entspricht, $p_2 > p_1$.

Bei dem n-Impuls, durch welchen das der Kraft P entsprechende Sättigungsmoment hervorgerufen seyn möge, ist $p_n = P$. Es folgt hieraus, dafs das durch einen Impuls I_m erregte Moment noch durch eine Reihe von Kräften, welche zwischen p_m und $p_n = P$ liegen, eine Aenderung erfahren kann.

§ 10. Die Thatsache, dafs ein Stahlstab mit grofser Coërcitivkraft sich unter Umständen wie ein Eisenstab ohne alle Coërcitivkraft verhalten kann, schien mir von so grofser Wichtigkeit, dafs ich einige Versuche zur Be-

Digitized by Google

rechnung der Magnetisirungsfunction k für solche Kräfte, bei welchen dies eintritt, anzustellen beschlofs.

Nachdem die Ellipsoide zum 1. Mal ausgeglüht waren, machte ich zuerst wieder eine Versuchsreihe mit der Verticalcomponente des Erdmagnetismus für die Ellipsoide der Sorte I.

	k	K
I, 1.	———	———
2.	23,7041	0,20943
3.	18,6999	0,34211
4.	16,2162	0,54715
5.	11,3674	1,09090.

Diese Werthe sind — die Beobachtung mit I, 1 war mifslungen — vermöge der durch das Ausglühen verringerten Härte alle gröfser als die früher erhaltenen. Darauf wurden die Ellipsoide durch constante magnetisirende Kräfte auf das diesen zugehörige Sättigungsmoment des remanenten Magnetismus gebracht und dann für absteigende Kräfte die Magnetisirungsfunction berechnet.

Die Tabelle IV giebt die Stromstärken i, die magnetisirenden Kräfte X, den bei jeder Versuchsreihe constanten permanenten Magnetismus RM, dessen Unveränderlichkeit nach jeder einzelnen Beobachtung untersucht wurde, die temporären Momente TM und die Magnetisirungsfunction k mit ihrem Argument K.

Die Sorgfalt, mit welcher die Versuche angestellt sind, werden die Werthe von k mit ihren geringen Differenzen bezeugen.

Digitized by Google

Tabelle IV.

Ell.	i	X	TM	k	K
I, 1.		$RM = 15860$			
	4,774	82,71	1663600	25,34	2,453
	2,262	39,19	789060	26,3	1,121
		$RM = 79320$			
	10,29	178,2	3606000	31,86	4,231
	8,047	139,4	2819800	31,19	3,379
	4,765	82,56	1666100	28,53	2,183
	2,255	39,07	787840	27,74	1,062
I, 2.		$RM = 255800$			
	9,921	171,9	7076400	27,25	7,287
	7,348	127,3	5162600	20,02	7,237
	5,721	99,12	4035000	21,44	5,281
	3,857	66,82	2708600	19,86	3,828
	1,795	31,09	1255500	18,64	1,891
I, 3.		$RM = 133500$			
	5,763	99,84	7029000	16,42	8,9
	4,433	76,8	5408400	16,47	6,826
	3,303	57,23	4004600	15,35	5,421
		$RM = 256300$			
	8,444	146,3	10286700	16,2	13,2
	6,916	119,8	8454000	16,82	10,446
	5,11	88,53	6236000	16,52	7,847
	3,4	58,9	4144000	16,28	5,291
	1,477	25,58	1794300	15,74	2,37
I, 4.		$RM = 132400$			
	3,497	60,58	7603600	13,69	8,874
	2,979	51,61	6484400	13,78	7,516
	2,284	39,57	4954800	13,46	5,879
	1,792	31,05	3862000	12,87	4,792
		$RM = 546150$			
	6,785	117,55	14914500	14,76	16,14
	5,753	99,68	12594700	14,34	14,03
	4,411	76,42	9641400	14,18	10,86
	3,461	59,96	7556500	14,07	8,582
	2,124	36,8	4608200	13,47	5,467
	1,106	19,15	2388100	13,09	2,915

Digitized by Google

Ell.	i	X	TM	k	K
I, 5.		$RM = 539600$			
	3,509	60,8	8266600	11,4	15,31
	2,58	44,7	6041000	11,13	11,46
		$RM = 957000$			
	6,326	109,6	14957600	11,57	27,29
	5,428	94,05	12800000	11,44	23.62
	4,231	73,31	9935000	11,25	18,64
	3,284	56,89	7690000	11,14	14,57
	2,055	35,6	4785300	10,90	9,265
	1,108	19,19	2563000	10,88	5.003
II, 1.		$RM = 27480$			
	7,582	131,35	2635000	17,81	5,73
	5,962	103,3	2063300	16,21	4,931
	4,424	76,64	1528800	15,74	3,762
	2,488	43,1	858000	15,12	2,198
		$RM = 43350$			
	10,127	175,45	3541000	20,66?	6,638
	9,049	156,78	3144000	17,65	6,898
	8,324	144,2	2885200	16,775	6,662
	7,213	124,96	2498400	16,524	5,856
	6,196	107,35	2140000	15,547	5,332
	5,096	88,29	1758000	15,226	4,472
	4,117	71,33	1418700	14,86	3,698
	2,996	51,91	1033300	15,13	2,646
II, 2.		$RM = 139720$			
	8,34	144,48	5784300	11,48	13,65
	7,01	121,44	4838400	10,92	12,00
	5,51	95,45	3798000	10,776	9,551
	4,11	71,21	2843100	11,16	6,902
	2,732	47,33	1884400	10,84	4,709
	1,638	28,38	1125900	10,483	2,911
		$RM = 138030$			
	10,15	175,84	7043300	11,54	16,54
	9,358	162,13	6487700	11,423	15,39
	8,492	147,12	5881500	11,308	14,09
	7,474	129,48	5164000	11,034	12,68
	6,542	113,33	4510200	10,797	11,32
	5,396	93,49	3709800	10,495	9,58
	4,401	76,24	3022000	10,379	7,89
	3,47	60,11	2373000	9,988	6,44
	2,41	41,75	1648000	9,973	4,48

Digitized by Google

Ell.	i	X	TM	k	K
II, 3.		$RM = 270600$			
	6,465	112,0	7649000	10,35	15,79
	4,831	83,69	5691400	10,045	12,11
	3,394	58,8	4248700	9,961	8,57
	2,128	36,86	2484500	9,464	5,61
		$RM = 514000$			
	10,112	175,2	12111000	11,312	22,88
	8,906	154,3	10655000	11,224	20,29
	7,79	134,96	9297000	11,02	18,03
	6,624	114,77	7867600	10,63	15,82
	5,536	95,92	6562000	10,476	13,39
	4,389	76,04	5182500	10,2	10,86
	3,329	57,68	3916000	9,925	8,434
	2,32	40,19	2717400	9,66	6,013
II, 4.		$RM = 578800$			
	6,51	112,8	14195000	13,01	17,44
	5,308	91,95	11541000	12,78	14,43
	4,147	71,85	8981600	12,455	11,53
	3,027	52,45	6538300	12,25	8,533
	1,986	34,415	4243000	11,47	5,914
		$RM = 1190000$			
	10,026	173,7	22210000	14,48	24,52
	8,635	149,6	19065000	14,143	21,54
	7,457	129,2	16386000	13,69	19,13
	6,136	106,3	13413000	13,23	16,2
	4,895	84,81	10646000	12,79	13,31
	3,722	64,48	8045000	12,315	10,44
	2,739	47,46	5886000	11,875	7,922
	1,865	32,31	3975000	11,313	5,615
II, 5.		$RM = 1056400$			
	6,254	108,3	14253000	10,4	29,07
	5,37	93,04	12196000	10,26	25,2
	4,174	72,32	9404000	9,965	20,02
	3,257	56,43	7260000	9,592	16,06
	2,044	35,41	4500500	9,201	10,38
		$RM = 1931000$			
	8,137	140,97	18805000	10,965	36,38
	7,106	123,1	16310000	10,679	32,36
	6,072	105,2	13815000	10,33	28,36
	4,957	85,88	11212000	10,114	23,515
	3,667	63,53	8194400	9,682	17,95
	2,254	39,05	4961200	9,183	11,46

Digitized by Google

Ell.	i	X	TM	k	K
			$RM = 6213000$		
	7,979	138,23	18737000	11,684	34,01
	7,183	124,45	16746000	11,345	31,31
	6,377	110,47	14776000	11,076	28,30
	5,457	94,54	12542000	10,738	24,78
	4,650	80,56	10606000	10,43	21,57
	3,836	66,46	8672000	10,096	18,22
	3,021	52,35	6754000	9,921	14,78

§ 11. Aus Tabelle IV ergeben sich leicht einige Analogien mit den durch den Erdinductor ermittelten Werthen von k:

Bei der Sorte I ordnen sich auch hier wieder die den Ellipsoiden mit verschiedener Excentricität entsprechenden Werthe in eine mit wachsender Excentricität fallende Reihe, bei der Sorte II dagegen lassen sich die Werthe von k nicht in eine Reihe ordnen, sondern während II, 2, II, 3 und II, 5 ziemlich gleiche Werthe der Magnetisirungsfunction haben, liefert II, 4 wieder, wie früher, gröfsere Werthe. Aber auch II, 1 hat jetzt eine merklich gröfsere Magnetisirungsfunction.

Hiernach bilden wir uns, in Verbindung mit dem früher Gefundenen, von dem Verlauf von k folgende Vorstellung: Nachdem die verschieden gestreckten Ellipsoide das gleiche früher bezeichnete Minimum ihrer Magnetisirungsfunction erreicht haben, entfernen sich mit wachsender magnetisirender Kraft X und gleichzeitig wachsendem permanenten Magnetismus beim weicheren Stahl die Werthe von k wieder von einander, indem wieder den weniger gestreckten Ellipsoiden die gröfseren k zukommen. Beim härteren Stahl dagegen scheint k ziemlich den gleichen Werth zu besitzen — die gröfseren Werthe von II, 1 und II, 4 können immerhin durch Verschiedenheiten der Structur hervorgerufen angesehen werden. — Dafs k eine gewisse Veränderlichkeit besitzt, daran ist wohl gar nicht zu zweifeln. Doch läfst sich, wenn auch die permanenten

Digitized by Google

Magnetismen nicht hinreichend variirt sind, soviel ersehen, daſs diese Veränderlichkeit bei Sorte II nicht sehr groſs ist. Bei verdoppeltem permanenten Magnetismus lassen II, 3 und II, 4 keine Veränderung der einer gleichen magnetisirenden Kraft X entsprechenden k wahrnehmen, während bei II, 5, als RM von 1931000 auf 7213000 wuchs, eine Zunahme von k wohl zu bemerken ist. Umgekehrt verhält es sich bei II, 1, welches sein k verringert.

Da die verschiedenen Beobachtungsreihen nicht unter absolut gleichen äuſseren Verhältnissen angestellt sind, namentlich nicht bei gleicher Entfernung der Spirale vom Magnetometer, so wird aus solchen geringen Veränderungen, die noch dazu nicht in demselben Sinne stattfinden, kein Schluſs auf das Verhalten von k zu ziehen seyn, wir werden k für die härtere Sorte II als constant ansehen können.

Mit gröſserer Sicherheit läſst sich bei Sorte I constatiren, daſs I, 1 bei verfünffachtem RM sein k erheblich vergröſsert, ebenso I, 3 bei verdoppeltem RM, während für I, 4 und I, 5 sich nichts Sicheres aussagen läſst.

Betrachten wir die vorliegenden Resultate in ihrem Verhältniſs zu den Neumann-Kirchhoff'schen Entwicklungen, so bemerken wir, daſs diese jetzt nicht mehr gültig sind: dem gleichen Argument K entsprechen bei den verschiedenen Ellipsoiden die allerverschiedensten k.

> „Die Neumann-Kirchhoff'schen Entwicklungen haben nur Gültigkeit für Stahlstäbe, welche keinen permanenten Magnetismus besitzen und geringen magnetisirenden Kräften unterworfen werden; sie werden sofort ungültig, sobald der Stahl permanent magnetisch ist.“

Dies tritt bedeutend mehr hervor beim weicheren als beim härteren Stahl.

Indem wir nun endlich die Beobachtungsreihen der Tabelle IV einzeln in's Auge fassen, sehen wir die Ana-

Digitized by Google

logie mit dem weichen Eisen auch in dem Verhalten der Magnetisirungsfunction durchgeführt:

> „Es nimmt für die Kräfte, welche den permanenten Magnetismus eines Stahlstabs zu verändern aufser Stande sind, die Zahl k mit abnehmender Kraft ebenfalls ab, die Magnetisirungsfunction des Stahls zeigt dasselbe Verhalten, wie die des weichen Eisens unter Wirkung der immerhin geringen magnetisirenden Kräfte, welche hier zur Anwendung gekommen sind."

(Für stärkere Kräfte müfste, wie beim weichen Eisen, eine Zunahme von k mit abnehmender Kraft eintreten.)

In welcher Weise diese Abnahme von k stattfindet, habe ich durch eine graphische Darstellung der Abhängigkeit von k von seinem Argument K zu ermitteln gesucht. Dabei fand ich jedoch ziemlich complicirte Curven mit mehreren Wendepunkten, die mir desto regelmäfsiger, nämlich zu geraden Linien, zu werden schienen, je mehr ich den permanenten Magnetismus vergröfserte.

Da nun hierdurch wegen der verminderten Beständigkeit der Gröfse des permanenten Magnetismus die Schwierigkeiten der Beobachtung wachsen und defshalb eigentlich ein noch unregelmäfsigerer Verlauf der Curven zu erwarten gewesen wäre, da ich ferner die Ein- und Ausbiegungen der einen Curve auch bei den anderen wieder zu finden glaubte, so bin ich der Ansicht, dafs diese Verschiedenheiten wirklich in der Natur der Sache begründet sind,

> „dafs also für Kräfte, welche den permanenten Magnetismus eines Stahlstabs nicht verändern, k ein desto regelmäfsigeres Verhalten zeigt, je gröfser die permanente Magnetisirung ist, je mehr die Molecularmagnete untereinander orientirt sind."

§ 12. Um nun wieder auf den Ausgangspunkt der in den beiden vorhergehenden §§ mitgetheilten Versuche zurückzukommen: die Thatsache, dafs bei wiederholter Anwendung der nämlichen magnetisirenden Kraft der Stahl

Digitized by Google

ein Maximum des remanenten Magnetismus erreicht, welches man als das dieser Kraft entsprechende Sättigungsmoment bezeichnen kann — so würde jetzt festzustellen seyn, ob sich die *Anzahl* der zur Erreichung des Maximums nöthigen Impulse in eine präcise Beziehung zu den beeinflussenden Factoren bringen läfst. Eine solche würde sich wohl finden lassen, wenn man einen Stahlstab mit fortwährend gleichen äufseren und Molecularverhältnissen verschiedenen magnetisirenden Kräften unterwerfen könnte. Da nun aber eine jede frühere magnetisirende Kraft den Zustand des Stabs veränderte und also eine jede folgende den Stab in einem anderen Zustande vorfindet, durch Ausglühen zwar der remanente Magnetismus sich beseitigen läfst, dafür aber der Stab in Härte und äufserer Gestalt geändert wird, so habe ich nur im Allgemeinen den Satz aufstellen können, dafs

„das Sättigungsmoment schneller bei der weicheren als bei der härteren Stahlsorte erreicht wird."

An die Stelle dieser Regel kann man jedoch die allgemeinere setzen, dafs

„die Zahl der Impulse wächst mit dem Verhältnifs des erreichbaren remanenten Moments (Sättigungsmoments) zu dem ursprünglichen, vor Einwirkung der Kraft bereits vorhandenen,"

denn dieses Verhältnifs ist im Allgemeinen gröfser beim härteren Stahl.

Durch eine empirische Formel hat Hr. Bouty[1]) in einer Arbeit, welche mir nach Schlufs dieser Untersuchungen zu Gesicht kam, die Gröfse des remanenten magnetischen Moments nach jedem einzelnen Impuls darzustellen gesucht.

Er magnetisirt dünne Stahlnadeln sowohl durch constante, als durch Inductionsströme, und glaubt je nachdem das Anwachsen des remanenten Magnetismus auch durch eine andere empirische Formel ausdrücken zu müssen.

1) Bouty, *études sur le magnetisme. Annales de l'école normale* 1875, No. 1. Auch Phil. Mag. 1875.

Digitized by Google

Für die Magnetisirung durch einen constanten Strom wählt er die Formel

(1) $$y = A - \frac{B}{x},$$

durch welche das magnetische Moment y nach dem $x$ten Impulse durch die Anzahl derselben, das Sättigungsmoment A und den Zuwachs B des Moments von dem ersten bis zum letzten (Sättigungs-) Impuls bestimmt wird.

Der Magnetisirung durch Inductionsströme dagegen soll die Formel

(2) $$y = A + B\,(1 - e^{-\alpha x}),$$

wo A, B und α Constante, d. i. A das ursprünglich vorhandene Moment, B das gesammte durch Wirkung der Kraft hinzukommende,

e die Basis des natürlichen Logarithmensystems,

Genüge leisten.

Diese zweite Formel entspricht einem viel schnelleren Anwachsen des remanenten Magnetismus als die erste.

Während der Verfasser die Verschiedenheit der Formeln aus der Verschiedenheit der Magnetisirungsmethoden herleiten will, möchte ich dieselbe, nach den von ihm angeführten Beispielen zu urtheilen, eher in den verschiedenen anfänglichen magnetischen Zuständen der Stahlstäbchen suchen. Zwei seiner Beispiele mögen mir zum Belege dienen.

Zu (1)		Zu (2)	
Nombre des passages à la spirale	*Moment magnétique*	*Nombre des passages à la spirale*	*Moment magnétique*
1.	51,46	0.	71,55
2.	54,55	1.	75,30
3.	55,43	2.	78,55
4.	56,10	3.	80,50
5.	55,95	4.	80,80
10.	56,48	8.	81,05
20.	57,68	16.	81,05
30.	57,92		
50.	57,75		

Digitized by Google

Während also in dem ersten Beispiel das Stäbchen den ursprünglichen Magnetismus Null hatte, „*vierge de toute aimantation antérieure*“ war, und am Schluſs den remanenten Magnetismus 57,75 besaſs, hatte es im zweiten Beispiel den bedeutenden ursprünglichen Magnetismus 71,55, der dann durch Wirkung der magnetisirenden Kraft nur auf 81,05 anstieg. Dann muſs aber nach dem vorhin aufgestellten Satze die Anzahl der nöthigen Impulse geringer seyn und das Anwachsen des remanenten Magnetismus schneller erfolgen.

§ 13. Die Untersuchung von Frankenheim war zu dem bemerkenswerthen Resultat gelangt, daſs bei frisch ausgeglühten Stäben das durch einen Impuls x erreichte remanente Moment R_x zu dem Sättigungsmoment R in einem constanten Verhältniſs steht, welches unabhängig ist von den Dimensionen der Stäbe, von ihrer Härte und der Stärke der einwirkenden Kraft.

Es scheinen meine Versuche nun zu beweisen, daſs dies auch für nicht frisch ausgeglühte, mit einem ursprünglichen Magnetismus U versehene Stäbe gilt, sobald man diesen dem remanenten Magnetismus immer zuzählt.

Die Versuche sind enthalten in Tabelle V. Wenngleich nun diese keinen Anspruch auf Vollständigkeit machen kann, da von mehreren Ellipsoiden zu wenige Versuche vorliegen, dann aber auch die Dimensionen und Härten der Stäbe zu wenig variirt sind, so läſst sich doch soviel ersehen, daſs $\frac{U+R_1}{U+R}$ als ziemlich constant gelten kann.

Dagegen ergiebt sich zweifellos, daſs

„$\frac{R_1}{R}$ abnimmt, wenn die magnetisirende Kraft, oder, was hier dasselbe heiſst, vom U wächst.“

Uebrigens ist diese Abnahme von $\frac{R_1}{R}$ mit wachsendem U nach der gefundenen Constanz von $\frac{U+R_1}{U+R}$ schon selbstverständlich.

Digitized by Google

Tabelle V.

Ellipsoid	U	$\frac{U+R_1}{U+R}$	$\frac{R_1}{R}$	Ellipsoid	U	$\frac{U+R_1}{U+R}$	$\frac{R_1}{R}$
I, 1.	14100	0,955	0,942	II, 1	31730	0,893	0,865
2.	38530	0,941	0,916		142200	0,936	0,828
	126300	0,945	0,859	2.	158750	0,931	0,928
	195400	0,940	0,839		313300	0,938	0,933
3.	51540	0,930	0,901		431400	0,934	0,795
	150850	0,947	0,895	3.	276650	0,958	—
	293600	0,932	0,868		397600	0,973	—
	589800	0,932	0,795		448100	0,931	0,822
4.	287200	0,968	0,930		698600	0,928	0,783
5.	1049200	0,929	0,827		990400	0,917	0,732
	1754700	0,918	0,789	4.	706000	0,955	0,833
	2802000	0,906	0,670		897400	0,962	0,826
	Mittel	$\frac{U+R_1}{U+R}$	$\frac{U+R_1}{U+R}$		1039000	0,958	0,811
					1 519000	0,922	0,785
					2 317000	0,942	0,733
					2 865400	0,912	0,648
		I, 1. 0,955?	II, 1. 0,910	5.	962300	0,951	0,836
		2. 0,942	2. 0,934		1287000	0,965	0,824
		3. 0,935	3. 0,941		1807800	0,928	0,762
		4. 0,968?	4. 0,942		2497400	0,896	0,757
		5. 0,918	5. 0,928		4205000	0,902	0,592
		0,944	0,931				

Digitized by Google

„Der fortschreitenden Drehung der Molecularmagnete in magnetische Gleichgewichtslagen steht also ein *wachsender* Widerstand entgegen.“

Eine Abhängigkeit der Abnahme von $\frac{R_1}{R}$ von der Gröfse der Differenz $R-U$ oder des Verhältnisses $\frac{R}{U}$ ergiebt sich nicht.

Dem entgegen hat nun Hr. Bouty in einer neueren Notiz[1]) auf Grund einiger Versuchsreihen, von denen ich die von ihm als Beispiel angeführte folgen lasse, behauptet, dafs sein Verhältnifs $\frac{A}{A-B}$, welches ja dem meinigen $\frac{R}{R_1}$ entspricht, mit wachsender magnetisirender Kraft abnimmt, wonach also $\frac{R_1}{R}$ zunehmen würde. (Ob seine Stahlnadeln vor jeder Versuchsreihe ausgeglüht worden oder ob sie mit einem ursprünglichen Magnetismus benutzt sind, wird nicht angegeben.)

Nadel von 0,553^{mm} Durchmesser.

Magnetisirende Kraft	$\frac{A}{A-B}$
10	1,280
14	1,246
18	1,165
22	1,150
26	1,115
30	1,085
34	1,058
38	1,036
42	1,025.

Wenn auch hiernach eine Abnahme von $\frac{A}{A-B}$ nicht bezweifelt werden kann, so irrt sich der Verfasser doch gründlich oder drückt sich wenigstens ganz falsch aus, da er von dem Verhältnisse behauptet: „*Il tend vers zéro.*“

1) *Comptes rendus*, 1875. No. 13.

Digitized by Google

Von einer Annäherung an die Null kann wohl keine Rede seyn, sondern höchstens von einer Annäherung an Eins.

Während also nach Hrn. Bouty's Versuchen R_1 und R sich immer mehr nähern, so dafs schliefslich ein einziger Impuls das Sättigungsmoment hervorrufen wird, entfernen sie sich nach den meinigen immer mehr von einander, so dafs das einer Kraft entsprechende Sättigungsmoment immer schwer zu erreichen ist.

Welche Ursachen diesen entgegengesetzten Resultaten zu Grunde liegen, läfst sich bis dahin nicht sagen. Die Gröfsen des Hrn. Bouty sind nicht in absoluten Maafsen ausgedrückt, und es läfst sich nach seinen Angaben auch keine Reduction auf dieselben herstellen. Doch gebe ich die Hoffnung nicht auf, dafs sich Hrn. Bouty's und meine Resultate nicht nur nicht widersprechen, sondern vielleicht gegenseitig ergänzen werden.

Aus leicht begreiflichen Gründen, die ich nicht weiter zu erörtern brauche, kann man nicht wohl annehmen, dafs das Verhältnifs $\frac{R_1}{R}$ in fortwährender Abnahme bis zur *Null* gelangt, vielmehr ist eine mit wachsender magnetisirender Kraft wieder eintretende Zunahme nicht unwahrscheinlich. Hr. Bouty hat aber mit sehr dünnen, der Verf. mit ziemlich dicken Stahlstäben gearbeitet, und hieraus ergiebt sich wirklich, dafs dort im Vergleich zu meinen Beobachtungen viel gröfsere magnetisirende Kräfte im Spiel gewesen sind.

Jedenfalls ist der Gegenstand wohl einer weiteren Prüfung werth, und werde ich darauf abzielende Versuche in der nächsten Zeit beginnen.

§ 14. In § 9 ist der Satz aufgestellt worden, dafs eine Kraft von bestimmter Stärke remanenten Magnetismus nicht über eine bestimmte Gränze hinaus erzeugen könne. Derselbe ist streng genommen nicht ganz richtig, wenigstens nicht in dem Sinne, wie er dort aufgefafst worden ist.

Bringt man nämlich einen Stahlstab durch wiederholte

Digitized by Google

Einwirkung einer constanten Kraft auf das zugehörige Maximum seines remanenten Magnetismus, läfst man ihn darauf durch Erschütterungen oder auch durch blofses ruhiges Liegen, also durch die Wirkung der Zeit, einen Theil desselben verlieren, und bringt man dann dieselbe Kraft wieder zur Anwendung, so wächst jetzt der remanente Magnetismus über die frühere Gränze hinaus.

Wiederholt man nun dasselbe Verfahren noch mehrere Mal, so mufs schliefslich eine Gränze erreicht werden, die auch durch fernere Verluste und neue Magnetisirung nicht überschritten wird. Erst diesen Werth des remanenten Moments wird man als das eigentliche Sättigungsmoment der betreffenden Kraft bezeichnen können.

Es ist selbstverständlich und bestätigt sich auch durch meine Versuche, dafs in dem Falle, wo ein Verlust an remanentem Magnetismus eingetreten ist bei einem Stabe, der zuvor durch eine Kraft P gesättigt war, auch eine Kraft p, welche vorher bei erreichtem Maximum so wenig als P selbst eine Steigerung hervorbringen konnte, das verminderte remanente Moment zu heben und bei hinreichender Stärke auf das der Kraft P entsprechende Maximum zurückzubringen vermag.

§ 15. Wir haben bis dahin von dem Vorgang der wiederholten Magnetisirung eines Stahlstabs durch eine constante Kraft nur den einen Theil, nämlich die Veränderung des remanenten Magnetismus betrachtet.

Aehnliche Fragen, wie nach dem remanenten, lassen sich nun aber auch nach dem temporären Magnetismus stellen. Wir können hierbei drei Fälle unterscheiden.

Der erste, einfachste, ist der der wiederholten Magnetisirung durch den nämlichen Strom, welcher aber vorher niemals auf den Stab gewirkt haben soll (§ 9). Es fragt sich: Nimmt bei jedem folgenden Impuls der temporäre Magnetismus gleich dem remanenten zu, bleibt er constant oder nimmt er ab?

Zur richtigen Beurtheilung des Grades von Genauigkeit, welchen eine Antwort auf solche den temporären

Digitized by Google

Magnetismus betreffende Fragen besitzen kann, möchte ich daran erinnern, dafs derselbe bekanntlich auch bei einem ganz constanten Strom immer innerhalb gewisser, beim weichen Eisen ja ziemlich weiter, Gränzen schwanken kann.

Dennoch glaube ich auf Grund zahlreicher Versuche behaupten zu dürfen, dafs

> „der temporäre Magnetismus eines Stahlstabs bei wiederholter Magnetisirung durch einen constanten Strom abnimmt, so jedoch, dafs der ganze Magnetismus unverändert bleibt, also genau das, was an remanentem Magnetismus gewonnen, an temporärem eingebüfst wird."

Der zweite Fall ist bereits im § 11 behandelt worden. Wir hatten dort das gleiche Ellipsoid in verschiedenen magnetischen Zuständen, mit verschiedenem RM, der gleichen Kraft unterworfen und fragten, wie sich die Magnetisirungsfunction bei wachsender permanenter Magnetisirung verhält. Wir haben auf diese Frage keine bestimmte Antwort ertheilen können, k und damit der temporäre Magnetismus verhielt sich zum Theil constant, zum Theil nahm es zu, zum Theil auch ab.

Hieraus läfst sich nun schon ersehen, dafs eine Antwort auf den dritten Fall, der sich aus dem vorigen § ergiebt, erst recht schwierig seyn mufs. In der That habe ich, als ich einige Versuche anstellte, widersprechende Resultate, zum Theil gröfsere, zum Theil kleinere temporäre Momente erhalten, während der remanente Magnetismus nach dem im vorigen § aufgestellten Satze immer gröfser ausfiel.

Göttingen, im September 1875.

Digitized by Google

III. *Ueber die galvanische Ausdehnung der Metalldrähte;*

von Dr. F. Exner,

Privatdocent der Physik an d. Univ. in Wien.

(Aus Bd. LXXI der Sitzungsberichte der Wiener Akademie vom Herrn Verfasser mitgetheilt.)

Es hat E. Edlund in zwei aufeinanderfolgenden Arbeiten[1]) die Frage zu lösen gesucht, ob der galvanische Strom das Volumen der von ihm durchflossenen Leiter direct zu verändern im Stande sey oder nicht, d. h. ob auch unabhängig von der auftretenden Wärme sich in Leitungsdrähten Volumsänderungen nachweisen lieſsen. Es ist bei der fundamentalen Bedeutung, welche diese Frage für die Elektricitätslehre hat, und bei der Schwierigkeit so kleine Volumsänderungen, wie die in Rede stehenden jedenfalls sind, gesondert von den Wirkungen der gleichzeitig auftretenden Wärme darzustellen, um so wünschenswerther nur solche Methoden in Anwendung zu bringen, welche die Berücksichtigung möglichst weniger Fehlerquellen von nöthen machen. Wenn auch die Versuche in den beiden citirten Abhandlungen von Edlund mit der gröſstmöglichen Sorgfalt und Vorsicht ausgeführt sind, so scheinen mir doch die erhaltenen Resultate, die allerdings eine Verlängerung der Leitungsdrähte durch den galvanischen Strom auch unabhängig von der auftretenden Wärme ergeben, möglicherweise noch zweifelhaft, und zwar hauptsächlich wegen der Kleinheit des erhaltenen Effectes einerseits und der Schwierigkeit des Experimentirens andererseits, um bei der getroffenen Anordnung der Versuche so kleine Aenderungen noch mit Sicherheit nachzuweisen.

Es hat Edlund zwei Methoden in Anwendung gebracht; die erste bestand darin, daſs der zu untersuchende

1) Diese Ann. Bd. CXXIX, S. 15 und Bd. CXXXI, S. 337.

Digitized by Google

Draht (Platin, Eisen und Messing) durch Gewichte horizontal gespannt wurde und sein galvanischer Widerstand bestimmt, dann liefs man durch denselben einen Strom gehen und beobachtete mittelst Spiegelablesung die Totalverlängerung, welche der Draht dadurch erfuhr, indem gleichzeitig nochmals sein Widerstand bei der nun erhöhten Temperatur gemessen wurde, was allerdings einen ziemlich complicirten Nebenapparat erforderte. Die gemessene Totalverlängerung des Drahtes ist nun die Summe von der durch die Wärme bewirkten und von der galvanischen Ausdehnung. Erstere kann man gesondert berechnen, wenn man den Ausdehnungscoëfficienten des Metalles und die Temperatur des Drahtes im Momente der Ablesung kennt; um letztere zu bestimmen, diente eben die zweite Widerstandsmessung. Denn ist das Gesetz der Aenderung des Widerstandes mit der Temperatur für den betreffenden Draht bekannt — und dieses wurde von Edlund jeweilig durch Separatversuche ermittelt — so ist dadurch die Temperatur gegeben. Die Versuche haben nun ergeben, dafs die aus der so gefundenen Temperatur derselben berechnete Verlängerung des Drahtes stets etwas kleiner ist, als die wirklich beobachtete, also ein wenn auch sehr geringer Ueberschufs zu Gunsten einer galvanischen Ausdehnung resultirt.

Um von der Kenntnifs der Function, welche der Widerstand von der Temperatur ist, bei den Versuchen unabhängig zu seyn, hat Edlund noch eine zweite Methode angewendet. Es wurde der Draht in dem Hohlraume eines heizbaren Zinkkastens ausgespannt und die Temperatur in demselben auf die Siedetemperatur des Wassers gebracht; war dies erreicht, so wurde der Widerstand (w) des Drahtes und seine Verlängerung gemessen. Nachdem dann Zinkkasten und Draht wieder bis zur Zimmertemperatur abgekühlt waren, wurde ein Strom von solcher Intensität durch den Draht geschickt, dafs dessen Widerstand abermals genau (w) wurde, der Draht also jedenfalls dieselbe Temperatur hatte als zuvor, und wiederum die

Digitized by Google

Verlängerung gemessen. Die Versuche ergaben, dafs diese zweite Verlängerung stets um etwas gröfser war, als die erste. So ergab z. B. ein Versuch mit Platindraht:

Skalastrich im Fernrohr bei Zimmertemperatur = 694,0,
$w = 26{,}42$[1])
„ „ „ „ Siedetemperatur = 564,2,
$w = 32{,}098$
„ „ „ „ Durchleiten des
Stromes . . . . . = 555,0,
$w = 32{,}098$.

Die Verlängerung, ausgedrückt in Skalentheilen, welche durch die Erwärmung allein bewirkt wurde, betrug somit 129,8, die Verlängerung bei Erwärmung durch den Strom bis zu gleichem Widerstande also gleicher Temperatur betrug aber 139,0, also käme auf die Wirkung des Stromes eine Verlängerung von 9,2, welche durch die vielfachen Correctionen, die an der directen Ablesung anzubringen sind, auf 8,4 Skalentheile reducirt wird.

Es beläuft sich somit die gefundene ausdehnende Wirkung des galvanischen Stromes auf 6,5 Proc. der Wirkung der gleichzeitig auftretenden Wärme, und mit diesem Resultate stimmen auch die Ergebnisse der übrigen Versuche von Edlund meist überein, obwohl sich manchmal noch viel geringere Werthe — bei einem Eisendraht z. B. nur 2,8 Proc. — ergeben.

Aufser den Arbeiten von Edlund liegt noch eine weitere Untersuchung über diese Frage von Streintz[2]) vor, deren Resultat ebenfalls eine Bestätigung der Edlund'schen Ansicht über das Ausdehnungsvermögen des galvanischen Stromes ist. Auffallend ist nur, dafs Streintz — allerdings nach einer anderen Methode — bei weitem gröfsere Werthe für die galvanische Ausdehnung erhält als Edlund, Werthe, die sich z. B. beim Eisen, sogar bis auf 27 Proc. der Wirkung der gleichzeitig auftretenden

1) Die Widerstände sind in einer beliebigen Einheit angegeben.
2) Wiener Akad. LXVII. Diese Ann. Bd. CL, S. 368.

Digitized by Google

Wärme belaufen. Die Methode, nach welcher Streintz beobachtete, war im Wesentlichen die folgende:

Der zu untersuchende Draht wurde, mit einem feinen Stearinüberzug versehen, vertical aufgehängt und zum Schutze vor Luftströmungen mit einer Glasröhre umgeben. Nachdem derselbe durch Gewichte gespannt war, wurde ein Strom durch ihn hindurch geleitet, dessen Intensität sich mittelst eines Rheostaten allmälig steigern liefs, bis der Stearinüberzug zu schmelzen begann; in diesem Momente wurde die Verlängerung des Drahtes mittelst Spiegelvorrichtung und Fernrohr abgelesen und diese Verlängerung wäre dann die Summe von der Ausdehnung durch die Erwärmung bis zur Schmelztemperatur des Stearins und von der galvanischen Ausdehnung.

Es wurde dann derselbe Draht in ein Röhrensystem gehängt (die innerste hatte 2 Mm., die mittlere 40 Mm., die äufserste 60 Mm. lichten Durchmesser), bei welchem der Raum zwischen der innersten und mittleren Röhre mit Stearin, der Raum zwischen der mittleren und äufseren mit Wasser von 60 bis 80° angefüllt wurde. Da das Stearin bei 55,5° schmolz, so ward bald die ganze Masse flüssig und dann wurde das Wasser abgelassen und die Verlängerung des in der mittelsten Röhre hängenden Drahtes in dem Momente wieder gemessen, als die ganze Stearinmasse zu erstarren begann. Die so gemessene Verlängerung sollte dann, nach Anbringung mehrerer Correctionen, die allein von der Wärme herrührende Ausdehnung seyn, wenn der Draht bis zur Schmelztemperatur des Stearins erwärmt wird. Die Differenz der so gefundenen Verlängerung und der früher bei Erwärmung des Drahtes durch den Strom erhaltenen wird dann „galvanische Ausdehnung“ genannt.

Wenn nun auch nach dieser Methode von vorneherein keine verläfslichen Resultate zu erwarten sind, so mufs es doch auffallen, dafs Streintz für die galvanische Ausdehnung so aufserordentlich grofse Werthe gefunden, während Edlund bei seinen so exact durchgeführten Ver-

Digitized by Google

suchen nur vielmal kleinere erhalten konnte. Es hat mir darum auch nicht überflüssig geschienen, an die bisher bekannten Versuche über die galvanische Ausdehnung der Drähte noch eine weitere Versuchsreihe anzufügen, welche hauptsächlich den Zweck hatte, die Frage zu beantworten, ob eine solche galvanische Ausdehnung, wenn sie überhaupt existirt, wirklich als in dem Maſse auftretend nachweisbar ist, wie dies Streintz gefunden; bevor ich zur Mittheilung der Beobachtungen selbst übergehe, will ich noch die von Streintz gefundenen Resultate in der nachfolgenden Tabelle wiedergeben. Die erste Columne enthält die untersuchten Drähte (ihre Länge variirte von 530 bis 538 Mm., ihre Dicke von 0,331 bis 0,967 Mm., ihre Belastung war bei Platin 1 Kgr., bei allen anderen 2 Kgr.). Die Zahlen der zweiten Columne drücken die galvanische Ausdehnung in Procenten der durch die Erwärmung allein verursachten Verlängerung aus, also jene Gröſse, welche sich bei den Versuchen von Edlund ungefähr zu 2,8 bis 6,5 Proc. ergeben hatte.

Metall.	Galv. Ausdehnung.
Messing hart	14,5 Proc.
Kupfer „	15,4
„ „	19,2
„ weich	11,2
Platin, hart	25,5
Eisen, weich	27,3
„ „	17,8
„ hart	12,5
„ „	14,1
Stahl, weich	21,5
„ hart	— 0,8
„ „	3,8
„ „	2,9

Man sieht, daſs Streintz für alle untersuchten Metalle eine bedeutende galvanische Ausdehnung findet, nur mit Ausnahme des harten Stahls, auf welche Ausnahme

Digitized by Google

später noch zurückzukommen Gelegenheit seyn wird. Welche Genauigkeit den in der Tabelle aufgeführten Zahlen beizulegen ist, ist schwer zu bestimmen, da dieselben die einzelnen Resultate der sämmtlichen von Streintz mitgetheilten Beobachtungen sind und sich darunter nur sehr wenige Wiederholungen finden, bei denen sich jedoch keine Uebereinstimmung erkennen läfst.

Da mir daher die Existenz so grofser Werthe der galvanischen Ausdehnung noch zweifelhaft schien, so habe ich versucht, auf folgende Weise diese Zweifel zu beheben. Es wurden zwei ungefähr gleich lange Stücke *a* und *b* desselben Drahtes vertical übereinander aufgehängt, wie dies schematisch in Fig. 1, S. 441, dargestellt ist; das untere Stück *b* ging central durch eine Glasröhre *c*, welche oben ganz offen, unten aber mit einem Korke verschlossen war, der nur durch ein eingesetztes Stückchen einer etwa 2 Mm. weiten Glasröhre dem Drahte *b* Durchlafs gewährte. An dem unteren Ende des Drahtes *b* hing mittelst einer Klemme der zur Aufnahme der Belastungsgewichte bestimmte Teller *d*; dieser war an seiner Basis mit einer scharfen Eisenspitze versehen zu dem Zwecke, damit auf den einen Arm eines um *e* drehbaren Hebels zu wirken, dessen anderer Arm senkrecht gegen seine Axe, also in verticaler Ebene den Spiegel *f* trug. Beobachtete man in diesem Spiegel das Bild einer verticalen Skale mit dem Fernrohr, so konnte dadurch die geringste Längenänderung in dem Systeme *a*, *b* bemerkbar gemacht werden. Von der Verbindungsklemme zwischen *a* und *b* ging noch eine Drahtleitung zur Batterie *g*; der andere Pol der Batterie war mit dem Stromwechsel *h* in Verbindung, und konnte so der Strom entweder durch den Rheostaten *i* zum Aufhängepunkte des Drahtes *a* und durch denselben zurück zur Batterie geleitet werden oder nach der anderen Seite zum Quecksilbernapf *k*, in welchen das umgebogene Ende eines kurzen an den Teller *d* angelötheten Kupferdrahtes eintauchte und so die leitende Verbindung zwischen dem Wechsel *h* und dem Drahte *b*

Digitized by Google

herstellte; durch letzteren ging dann der Strom zur Batterie zurück. Man konnte auf diese Weise leicht den Strom hintereinander durch jedes der beiden Drahtstücke *a* und *b* separat schicken und so die Verlängerung, welche jedes für sich erfuhr, beobachten. Da die beiden Stücke *a* und *b* nicht genau gleich lang waren, so waren auch ihre Verlängerungen nicht ganz gleich; um diese gleich zu machen, war der Rheostat *i* eingeschaltet, mittelst dessen der Widerstand in der Schliefsung *ghiag* ebenso regulirt wurde, dafs bei unveränderter Batterie die nacheinander beobachteten Verlängerungen von *a* und *b* gleich wurden. Als Maafs der Verlängerung diente direct die Ablesung an der verticalen Millimeterskale, die mit dem Fernrohr in einer Entfernung von etwa 3 Metern vom Spiegel aufgestellt war. Es wurde auch darauf geachtet, dafs das Fernrohr und der im Fernrohr erscheinende Theil der Skale möglichst nahe aneinander aufgestellt wurden, was übrigens bei den vorkommenden nur sehr kleinen Verlängerungen kaum nöthig wäre; der Hebelarm, mit welchem die Stahlspitze die Drehung des Spiegels bewirkte, hatte eine Länge von 30 Mm. und war aus einem horizontalen Glasstreifen, auf welchen die Stahlspitze drückte, gefertigt. Wenn durch den Rheostaten die Verlängerungen von *a* und *b* für eine bestimmte Intensität der Batterie gleichgemacht wurden, dann bleibt diese Gleichheit auch noch bestehen, wenn sich die Batterie in ihrer Stärke ändert. So wurden z. B., nachdem der Rheostat eingestellt war, versuchsweise die folgenden Zahlen gefunden:

Nullpunkt	Verl. v. *a*	Verl. v. *b*
0	121	121
0	121	121
0	120	120
0	120	120

Es wurde hierauf die Intensität der Batterie geändert, und es ergab sich:

Digitized by Google

Np.	*a*	*b*
0	81	81
0	81	81
0	81	81
0	$80\frac{1}{2}$	$80\frac{1}{2}$

Nach einer nochmaligen Schwächung der Batterie ergaben sich die folgenden Verlängerungen:

Np.	*a*	*b*
0	50	50
0	49	49
0	48	48
0	48	48

wie man sieht, immer bei *a* und *b* die gleichen Werthe. Der Draht *a* war bei diesen, sowie bei allen folgenden Versuchen gleichfalls von einer Glasröhre (18 Mm. Durchmesser, unten und oben ganz offen) umgeben, was zur Abhaltung störender Luftströmungen unumgänglich nothwendig ist. Die Zahlen sind die im Fernrohre abgelesenen Theilstriche der Millimeterskale und wurden je drei zusammengehörige, in einer Horizontalreihe stehende unmittelbar hintereinander beobachtet; zuerst der Nullpunkt, wenn gar kein Strom durchging, dann, wenn der Strom durch *a* und dann, wenn er durch *b* ging, hierauf zur Wiederholung nochmals der Nullpunkt etc.

Um nun Versuche über die fragliche galvanische Ausdehnung anzustellen, wurde die Glasröhre, welche den Draht *b* umgab, so eingerichtet, dafs man aus einem gröfseren im Zimmer aufgestellten Reservoir beständig Wasser durch dieselbe hindurchfliefsen lassen konnte, der Draht *b* also vollkommen von Wasser umspült war; es sollte dies bezwecken, dem Drahte *b* möglichst viel von der Wärme, welche durch Hindurchleiten eines Stromes in ihm erzeugt wird, zu benehmen, denn die Verlängerung, welche dann noch an demselben wahrzunehmen ist, ist jedenfalls eine obere Gränze für die galvanische Ausdehnung, vorausgesetzt natürlich, dafs der ganze Strom wirklich durch den

Digitized by Google

Draht und nicht etwa mittelst Verzweigung auch durch das Wasser geht.

Da es sich darum handelt, das Verhältniſs der galvanischen Ausdehnung zu der gleichzeitig auftretenden Wärmeausdehnung zu bestimmen, so müſste man zuerst bei einer gewissen Intensität des Stromes die Verlängerung des Drahtes *b* in Luft bestimmen und hierauf bei gleichbleibender Intensität die Verlängerung von *b*, wenn derselbe mit Wasser umgeben ist. Um die Beobachtungen rascher hintereinander machen zu können und zugleich unabhängig zu seyn von allenfalls auftretenden Schwankungen in der Intensität des Stromes, dazu diente eben der Draht *a*; denn da derselbe, wenn der Rheostat *i* einmal eingestellt ist, immer dieselbe Verlängerung erfährt wie der Draht *b* — wenn sich letzterer gleichfalls in Luft befindet — so ist man in jedem Momente durch eine Umschaltung bei *h* im Stande, die Verlängerung zu bestimmen, welche *b* erfahren würde, wenn es eben nicht in Wasser, sondern in Luft hinge.

Die Versuche wurden demnach folgendermaſsen angestellt. Nachdem das System *a*, *b* durch Gewichte gespannt war, wurden zunächst bei beliebiger Intensität des Stromes die Ausschläge von *a* und *b* allein durch den Rheostaten gleich gemacht; dann wurde *b* mit flieſsendem Wasser umgeben und nun abwechselnd unmittelbar hintereinander durch Umschaltung bei *h* wieder die Ausschläge von *a* und *b* allein beobachtet. Da die Drähte sich sehr rasch wieder abkühlen und auf die ursprüngliche Länge zusammenziehen, so ist es leicht, im Laufe nur weniger Minuten eine Reihe solcher zusammengehöriger Werthe von *a* und *b* zu beobachten, in welchen Wiederholungen man eben eine Controle für die Leistungsfähigkeit der Methode hat. Man ist auf diese Weise vollkommen unabhängig 1. von der Intensität des Stromes, 2. von dem absoluten Werthe der Spiegelablesung und den Dimensionen des Apparates und 3. von der Temperatur der Drähte selbst; aufserdem kann man bei allen möglichen Strom-

Digitized by Google

intensitäten und somit auch bei den verschiedensten Temperaturen der Drähte operiren.

Ich will hier nur einen kurzen Vorversuch anführen, um zu zeigen, in welcher Weise die Resultate gewonnen wurden. Die Drähte *a* und *b* waren Stücke desselben Kupferdrahtes, ungefähr 420 Mm. lang, 0,139 Mm. dick und mit 100 Grm. belastet. Es wurden zunächst die einzelnen Verlängerungen, wenn beide in Luft hingen, gleich gemacht, so dafs sich ergab:

Nullpunkt	Verl. v. *a*	Verl. v. *b*
0	101	101
0	101	101
0	100	99½

Dann wurde *b* mit Wasser umgeben und die Beobachtung wiederholt; es ergab sich jetzt bei viermaliger Wiederholung:

Np.	*a*	*b*
0	102	2
0	103	2
0	102	2
0	102	2

Zur Controle wurde darauf abermals *a* und *b* in Luft beobachtet und gefunden:

Np.	*a*	*b*
0	102	102
0	101	102
0	101	101

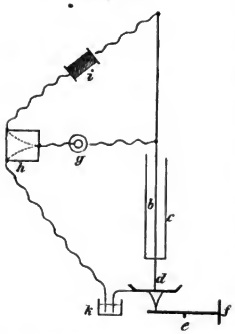
also wieder beide Drähte ganz gleich. Während also der Draht *b* sich unter übrigens gleichen Umständen in Luft um 102 Skalentheile verlängert hätte, war der beobachtete Effect, wenn dem Drahte seine Wärme durch das Wasser entzogen wurde, nur zwei Skalentheile, so dafs die obere Gränze der galvanischen Ausdehnung nur 2 Proc. der Wärmeausdehnung beträgt.

Vor Mittheilung der weiteren Versuche will ich noch der Umstände erwähnen, welche diesen Werth der galvanischen Ausdehnung in dem einen oder anderen Sinne

Digitized by Google

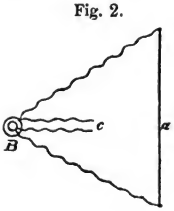
möglicherweise zu alteriren im Stande wären. Dafs der Werth zu klein beobachtet würde, das wäre nur in einem

Fig. 1.



Falle möglich, wenn nämlich der im Zweige *gbkhg* (Fig. 1) circulirende Strom zwischen *b* und dem umgebenden Wasser sich theilte, so dafs ein Theil durch letzteres seinen Weg nähme, und in Folge dessen die Intensität in *b* selbst nicht mehr so grofs ist, als wenn *b* in Luft hängen würde. Allein eine Ueberlegung der Leitungsverhältnisse von reinem Wasser (Quellenwasserleitung) einerseits und dem Metalldrahte andererseits zeigt schon, dafs hierin keinesfalls ein Fehler begründet seyn kann. Ich habe übrigens, um ganz sicher zu gehen, mich auf eine sehr einfache Weise von dem Abhandenseyn einer solchen

Fig. 2.



Stromverzweigung überzeugt. Wenn man die Batterie *B*, Fig. 2, mit den beiden Enden des Drahtes *a* verbindet, der übrigens, wie in Fig. 1, in seiner Verbindung mit dem Drahte *b*, den Gewichten, Spiegel etc. bleibt, und aufserdem von den Polen der Batterie weg eine Nebenschliefsung so anbringt, dafs dieselbe durch zwei Kupferbleche *c*, die in Wasser tauchen, hergestellt wird, so kann man sich leicht davon überzeugen, dafs eine derartige Nebenschliefsung an der Intensität des durch *a* circulirenden Stromes absolut nichts Merkliches ändert. Denn hat man zuerst die Nebenschliefsung bei *c* unterbrochen und beobachtet die Verlängerung, welche *a* durch den ganzen Strom erfährt, im Fernrohre wie früher, stellt hierauf die Nebenschliefsung bei *c* her, so ändert sich die Verlängerung von *a* absolut nicht, was beweist, dafs der

Digitized by Google

Widerstand des Drahtes *a* verschwindet gegen den Widerstand in *c*, obgleich ich in *c* zwei Kupferbleche von 15 □Ctm. Oberfläche und in einem Abstande von nur 2 bis 3 Mm. von einander verwendete, also jedenfalls noch einen gegen die fragliche Nebenschliefsung im Versuchsapparate sehr kleinen Widerstand. Ich will gleich hier für alle folgenden Versuche bemerken, dafs ich der Vorsicht halber diesen Nebenschliefsungsapparat mit dem Hauptapparate in Verbindung liefs und bei jeder Versuchsreihe auch einen Controlversuch in der eben beschriebenen Weise mit der Nebenschliefsung anstellte; es hat sich jedoch niemals irgend ein Einfluſs dieser Nebenschliefsung bemerkbar gemacht.

Nicht nur der Widerstand des Metalldrahtes hat sich als verschwindend im Vergleiche mit dem des reinen Wassers ergeben, sondern auch noch der Widerstand des angesäuerten Wassers, wie es in Voltametern verwendet wird. Ich habe an Stelle des Drahtes *a*, Fig. 2, in den Stromkreis der Batterie ein Voltameter mit angesäuertem Wasser und Platinelektroden und eine Tangentenbussole eingeschaltet; war die Nebenschliefsung bei *c* unterbrochen, so zeigte die Tangentenbussole — während im Voltameter Wasserzersetzung eintrat — eine Ablenkung von $22\frac{1}{2}^{\circ}$.

Wurde nun die Schliefsung bei *c* geschlossen, so konnte an der Nadel der Bussole nicht die geringste Bewegung bemerkt werden, was wieder beweist, dafs sogar gegen angesäuertes Wasser die Leitungsfähigkeit des reinen Wassers noch ganz unmerklich bleibt. Schliefslich habe ich auch den Durchmesser der Glasröhre, welche den Draht *b* umgab, variirt (7 Mm., 18 Mm. und 52 Mm.), ohne dafs dadurch in den Versuchsresultaten die geringste Aenderung eintrat, was doch zu erwarten wäre, wenn man es hier mit einer Nebenschliefsung durch das Wasser zu thun hätte. Es wirken aber bei der angewendeten Versuchsmethode mehrere Umstände mit, welche die erhaltenen Werthe für die galvanische Ausdehnung jedenfalls zu

Digitized by Google

grofs erscheinen lassen. Zunächst ist es klar, dafs die im Drahte *b* durch den Strom erzeugte Wärme nicht vollständig durch das Wasser abgeleitet werden kann, jedenfalls also noch eine Ausdehnung in Folge von Wärme an demselben bemerkbar bleiben mufs, welche sich aber jeder Schätzung entzieht und daher bei den Versuchen auch als galvanische Ausdehnung erscheint. Auch ist klar, dafs, da der Draht *b* durch das Wasser nahezu auf der Temperatur desselben — d. i. der Zimmertemperatur — gehalten wird, sein Widerstand ein kleinerer ist, als wenn er in Luft hinge, wo er durch den Strom merklich erwärmt wurde; die Intensität des bei den Versuchen durch ihn hindurchgehenden Stromes ist daher eine gröfsere als unter gleichen Umständen in Luft und die gefundene galvanische Ausdehnung wird abermals zu grofs seyn.

Es ist ferner zu berücksichtigen, dafs der Draht *a* jedenfalls einen Theil seiner Wärme an die mit ihm verbundenen Zuleitungsdrähte abgiebt, die beobachtete Wärmeausdehnung desselben also zu klein und somit die beobachtete galvanische Ausdehnung im Verhältnifs zu ihr wieder zu grofs gefunden wird.

Alle diese Umstände wirken also dahin, dafs die für die galvanische Ausdehnung nach dieser Methode gefundenen Werthe nur eine obere Gränze desselben sind; um wieviel unterhalb derselben der wahre Werth liegen mag, das mufs dahingestellt bleiben, und insofern konnte diese Methode auch nur auf negative Resultate abzielen, deren Erreichung, wie mir scheint, durch die nun folgenden Beobachtungen dargethan wird.

I. Kupfer, hart.

Die Stücke *a* und *b* hatten eine Länge von 426,9 Mm. resp. 421,8 Mm., ihr Durchmesser betrug 0,139 Mm. Sowohl *a* als *b* waren mit den früher erwähnten Glasröhren (18 Mm. weit) umgeben; als Batterie dienten zwei Smee'sche Elemente, deren Intensität durch einen einfachen

Digitized by Google

Mechanismus rasch geändert werden konnte. Die Belastung der Drähte war 200 Grm.

Beobachtung 1.

Es wurden zunächst beide Drähte in Luft beobachtet und ihre Verlängerungen durch den Rheostaten gleichgemacht, so dafs sich ergab:

Np.	*a*	*b*
0	106	106
0	106	106
0	105½	106

Dann wurde *b* mit Wasser umgeben und beobachtet:

Np.	*a*	*b*
0	103	2
0	104	2
0	104	2
0	104	2
0	103½	2

a und *b* wieder in Luft ergab:

Np.	*a*	*b*
0	105½	106
0	105	106
0	106	106

Aus dieser Beobachtungsreihe würde sich demnach die galvanische Ausdehnung in Procenten der Wärmeausdehnung zu 2 Proc. ergeben, wenn man einfach das Mittel aus den Wiederholungen je zweier zusammengehöriger Werthe von *a* und *b* nimmt.

Beobachtung 2.

a und *b* in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	105	105
0	104½	104½
(Die Intensität der Batterie geändert.)		
0	85	85
0	85	85

Digitized by Google

a in Luft, *b* in Wasser.

Np.	*a*	*b*
0	106	$2\frac{1}{2}$
0	106	2
0	$105\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
0	105	$2\frac{1}{2}$

(Intensität geändert.)

0	74	$1\frac{1}{2}$
0	75	2
0	75	2
0	75	$1\frac{1}{2}$

(Intensität geändert.)

0	40	1
0	40	1
0	40	1
0	40	1

a und *b* wieder in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	40	$39\frac{1}{2}$
0	$39\frac{1}{2}$	$39\frac{1}{2}$

Aus diesem Versuche würden sich die Werthe 2,5, 2,2 und 2,5 ergeben.

Beobachtung 3.

Diese und die folgende Beobachtung wurden bei nur 100 Grm. Belastung gemacht, um zu zeigen, dafs nicht etwa eine durch Erwärmung hervorgerufene Aenderung der Elasticität des Drahtes *a* die Resultate beeinflusse.

a und *b* in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	120	120
0	120	120
0	119	119

a in Luft, *b* in Wasser.

Np.	*a*	*b*
0	116	$2\frac{1}{2}$
0	117	$2\frac{1}{2}$
0	116	$2\frac{1}{2}$
0	116	$2\frac{1}{2}$
	(Intensität geändert.)	
0	48	1
0	$47\frac{1}{2}$	1
0	47	1
0	47	1

a und *b* wieder in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	47	46
0	46	46

Diese Beobachtung liefert somit die Werthe 2,1, 2,1, also ebenso wie bei 200 Grm. Belastung.

Beobachtung 4. Belastung 100 Grm.

a und *b* in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	107	107
0	107	107

a in Luft, *b* in Wasser.

Np.	*a*	*b*
0	104	2
0	104	2
0	104	2
0	103	2
0	103	2
0	102	2
0	102	2
	(Intensität geändert.)	
0	64	$1\frac{1}{2}$
0	65	$1\frac{1}{2}$
0	65	$1\frac{1}{2}$
0	64	$1\frac{1}{2}$

Digitized by Google

a und *b* wieder in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	106	106
0	106	106

Als Werthe der galvanischen Ausdehnung ergiebt diese Beobachtung 2,0 und 2,3.

Beobachtung 5.

a und *b* in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	101	101
0	101	$100\frac{1}{2}$
0	100	100

a in Luft, *b* in Wasser.

Np.	*a*	*b*
0	107	2
0	106	2
0	107	2
0	106	2
0	105	2
0	105	2
0	105	2

a und *b* in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	105	105
0	105	105

Aus dieser Beobachtung ergiebt sich die galvanische Ausdehnung zu 1,9 Proc.

Die erhaltenen Werthe derselben am Drahte I sind demnach:

2,0	2,5	2,0
2,5	2,1	2,3
2,2	2,1	1,9

Im Mittel = 2,2 Proc.

Digitized by Google

II. Kupfer weich.

Die Stücke *a* und *b* waren 419,2 Mm. und 414,6 Mm. lang und 0,305 Mm. dick. Die Belastung betrug 200 Grm. Die Batterie bestand aus drei Smee'schen Elementen.

Beobachtung 1.

a und *b* in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	63	63
0	$62\frac{1}{2}$	63
0	$62\frac{1}{2}$	$62\frac{1}{2}$

Dann wurde *a* in Luft und *b* in Wasser beobachtet.

Np.	*a*	*b*
0	61	$1\frac{1}{2}$
0	61	$1\frac{1}{4}$
0	62	$1\frac{1}{4}$
0	61	$1\frac{1}{4}$
	(Intensität geändert.)	
0	47	$\frac{3}{4}$
0	47	$\frac{3}{4}$
0	47	$\frac{3}{4}$

a und *b* wieder in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	66	65
0	$66\frac{1}{2}$	$66\frac{1}{2}$
0	66	66
	(Intensität geändert.)	
0	41	41
0	41	41
	(Intensität geändert.)	
0	$23\frac{1}{2}$	23
0	23	23

also *a* und *b* in Luft wieder vollkommen gleich.

Es ergiebt diese Beobachtung für die galvanische Ausdehnung die Werthe 3,2 und 1,6.

Digitized by Google

Beobachtung 2.

a und *b* in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	$67\frac{1}{2}$	68
0	68	68

a in Luft, *b* in Wasser.

Np.	*a*	*b*
0	$67\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$
0	68	$1\frac{1}{4}$
0	68	$1\frac{1}{4}$
0	68	$1\frac{1}{4}$
0	$67\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$
	(Intensität geändert.)	
0	42	$\frac{1}{2}$
0	$41\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	42	$\frac{3}{4}$
0	42	$\frac{1}{2}$

a und *b* wieder in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	69	68
0	68	68

Diese zweite Beobachtung giebt somit die Werthe 1,8 und 1,3, so dafs im Ganzen beim Drahte II gefunden wurde:

2,2 Proc.
1,6 „
1,8 „
1,3 „
Im Mittel = 1,7 Proc.

III. Kupfer, weich.

Länge von $a = 443{,}0$ Mm., Länge von $b = 433{,}8$ Mm. Durchmesser derselben = 0,450 Mm. Die Versuche wurden bei einer Belastung von 900 Grm. und mit dem Strome von sechs Smee'schen Elementen vorgenommen.

Digitized by Google

Beobachtung 1.

a und *b* in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	97	97½
0	98	98
0	98	98

a in Luft, *b* in Wasser.

Np.	*a*	*b*
0	81	1
0	80	1
0	81	1
0	80	1
	(Intensität geändert.)	
0	41	½
0	40	½
0	41½	½
0	41½	½

a und *b* wieder in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	73	72½
0	73	73

Daraus ergiebt sich für beide Versuche übereinstimmend die galvanische Ausdehnung zu 1,2 Proc.

IV. Platin, hart.

Länge von $a = 441{,}3$ Mm., von $b = 428{,}9$ Mm., ihr Durchmesser $= 0{,}300$ Mm. Belastung $= 100$ Grm. Batterie $= 6$ Smee'sche Elemente.

Beobachtung 1.

a und *b* in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	100	100
0	100	100½
0	100	100

Digitized by Google

a in Luft, *b* in Wasser.

Np.	*a*	*b*
0	100	2
0	100	2
0	98	2
0	99	2
0	98	2

a und *b* wieder in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	100	100
0	$100\frac{1}{2}$	100

Der Werth der galvanischen Ausdehnung wäre hiernach 2,0 Proc.

Beobachtung 2.

a und *b* in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	100	100
0	$99\frac{1}{2}$	100

a in Luft, *b* in Wasser.

Np.	*a*	*b*
0	99	2
0	100	2
0	99	2
	(Intensität geändert.)	
0	70	$1\frac{1}{2}$
0	70	$1\frac{1}{2}$
0	70	$1\frac{1}{2}$
	(Intensität geändert.)	
0	54	1
0	54	1
0	$54\frac{1}{2}$	1
0	$54\frac{1}{2}$	1

Digitized by Google

(Intensität geändert.)

Np.	*a*	*b*
0	38	$\frac{1}{2}$
0	38	$\frac{3}{4}$
0	38	$\frac{3}{4}$
0	$37\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

a und *b* wieder in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	38	39
0	$38\frac{1}{2}$	38

Nach dieser zweiten Beobachtungsreihe ergeben sich die Werthe 2,0, 2,1, 1,9, 2,0; aus beiden Beobachtungen also:

2,0
2,0
2,1
1,9
2,0

Im Mittel = 2,0 Proc.

V. Eisen, weich.

Länge von *a* = 433,0 Mm., von *b* = 422,1 Mm. Durchmesser derselben = 0,245 Mm. Belastung = 200 Grm. Batterie = 6 Elemente.

Beobachtung 1.

a und *b* in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	$122\frac{1}{2}$	123
0	$120\frac{1}{2}$	$120\frac{1}{2}$
0	121	121

a in Luft, *b* in Wasser.

Np.	*a*	*b*
0	120	$2\frac{1}{2}$
0	120	$2\frac{1}{2}$
0	$120\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
0	$120\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$

Digitized by Google

(Intensität geändert.)

Np.	*a*	*b*
0	90	2
0	90	$1\frac{3}{4}$
0	91	$1\frac{3}{4}$

(Intensität geändert.)

0	51	1
0	51	1
0	51	1

(Intensität geändert.)

0	121	$2\frac{1}{2}$
0	121	$2\frac{1}{2}$
0	$121\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
0	121	$2\frac{1}{2}$

a und b wieder in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	120	120
0	120	120

Diese erste Beobachtung liefert somit die Resultate 2,1, 1,9, 2,0, 2,1.

Beobachtung 2.

Bei diesen Versuchen wurde die Belastung bei gleichbleibender Intensität der Batterie nur halb so groſs genommen als bei dem vorhergehenden, nämlich 100 Grm., die Resultate blieben jedoch dieselben.

a und *b* in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	131	131
0	130	130
0	130	130

a in Luft, *b* in Wasser.

Np.	*a*	*b*
0	129	3
0	129	3

Digitized by Google

(Intensität geändert.)

Np.	a	b
0	97	2
0	95	2

(Intensität geändert.)

0	$56\frac{1}{2}$	1
0	57	1

a und b wieder in Luft.

Np.	a	b
0	57	57
0	56	$56\frac{1}{2}$

Hieraus ergeben sich die Werthe: 2,3, 2,1, 1,8, also wie bei Beobachtung 1 mit doppelter Belastung. Im Ganzen wurde also für den Draht V gefunden:

2,1	2,1
1,9	2,3
2,0	2,1
	1,8

Im Mittel = 2,0 Proc.

VI. Eisen, weich.

Länge von a = 421,6 Mm., von b = 416,6 Mm. Durchmesser derselben = 0,525 Mm. Belastung = 400 Grm. Batterie = 6 Elemente.

Beobachtung 1.

a und b in Luft.

Np.	a	b
0	$133\frac{1}{2}$	134
0	133	133

a in Luft, b in Wasser.

Np.	a	b
0	130	$1\frac{3}{4}$
0	$129\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$
0	130	$1\frac{1}{2}$
0	130	$1\frac{1}{2}$

Digitized by Google

(Intensität geändert.)

Np.	*a*	*b*
0	76	$\frac{3}{4}$
0	75	$\frac{3}{4}$
0	76	$\frac{3}{4}$

a und *b* wieder in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	77	77
0	$76\frac{1}{2}$	77

Beobachtung 2.

Die Belastung war bei diesem Versuche wieder nur die Hälfte der vorigen, nämlich 200 Grm.

a und *b* in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	146	146
0	$145\frac{1}{2}$	145

a in Luft, *b* in Wasser.

Np.	*a*	*b*
0	140	2
0	140	2
0	$140\frac{1}{2}$	2
0	140	2

a und *b* wieder in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	140	140
0	$140\frac{1}{2}$	141

Diese beiden Versuche ergeben somit für die galvanische Ausdehnung die Werthe

1,2
1,0
1,4

Im Mittel = 1,2 Proc., ohne dafs bei einer Aenderung in der Belastung eine wesentliche Aenderung im Resultate

Digitized by Google

zu bemerken wäre, wie dies auch bei den früheren diesbezüglichen Versuchen der Fall war.

VII. Stahl, hart (Englische Zithersaite).

Länge von $a = 406{,}2$ Mm., von $b = 408{,}2$ Mm. Durchmesser derselben $= 0{,}275$ Mm. Belastung $= 900$ Grm. Batterie $= 6$ Elemente.

a und b in Luft.

Np.	a	b
0	$107\frac{1}{2}$	$107\frac{1}{2}$
0	108	108
0	108	108

a in Luft, b in Wasser.

Np.	a	b
0	108	2
0	107	2
0	108	2
0	$108\frac{1}{2}$	2
0	$108\frac{1}{2}$	2
	(Intensität geändert.)	
0	$72\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$
0	72	$1\frac{1}{2}$
0	72	$1\frac{1}{2}$

a und b wieder in Luft.

Np.	a	b
0	$72\frac{1}{2}$	73
0	73	73

Dieser Versuch ergiebt also für harten Stahl die Werthe 1,9 und 2,1.

Im Mittel $= 2{,}0$ Proc.

VIII. Stahl, hart (Müller'sche Claviersaite).

Länge von $a = 430{,}8$ Mm., von $b = 431{,}5$ Mm., ihr Durchmesser $= 0{,}335$ Mm. Belastung $= 900$ Grm. Batterie $= 6$ Elemente.

Digitized by Google

a und *b* in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	121	122
0	221	121

a in Luft, *b* in Wasser.

Np.	*a*	*b*
0	122½	1½
0	122	1½
0	120	1½
0	121	1½
	(Intensität geändert.)	
0	69	1
0	68	1
0	69	1
0	69	1
	(Intensität geändert.)	
0	134	2
0	134	2
0	134	1¾
0	134½	2

a und *b* wieder in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	134	133
0	134	134

Es ergeben sich somit die Werthe 1,3, 1,4 und 1,5.
Im Mittel = 1,4 Proc.

IX. Stahl, weich.

Es wurde der Draht VIII durch Ausglühen weich gemacht; die Dimensionen sind daher wie bei VIII. Belastung = 400 Grm. Batterie = 6 Elemente.

a und *b* in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	114½	114
0	114½	114½
0	114	114

Digitized by Google

x in Luft, *y* in Wasser.

Nr.	*x*	*y*
1	[illegible]	[illegible]
1	[illegible]	[illegible]
1	[illegible]	[illegible]
1	[illegible]	[illegible]

Intensität geändert.

1	46	[illegible]
0	45	[illegible]
0	45	[illegible]
0	45½	[illegible]

x und *y* wieder in Luft.

Nr.	*x*	*y*
0	45½	66
0	45	66

Dieser Versuch giebt für die galvanische Ausdehnung des weichen Stahles die Werthe 1,3 und 1,5, im Mittel = 1,35 Proc., also nicht wesentlich verschieden vom harten Stahl.

X. Messing, hart (Zithersaite).

Länge von *a* = 414,5 Mm., von *b* = 422,5 Mm. Durchmesser derselben = 0,450 Mm. Belastung = 800 Grm. *Batterie* = 4 Elemente.

a und *b* in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	136	137
0	136½	136

a in Luft, *b* in Wasser.

Np.	*a*	*b*
0	134	2
0	133	2
0	133	2
0	133	2

Digitized by Google

(Intensität geändert.)

Np.	*a*	*b*
0	60	1
0	$59\frac{1}{2}$	1
0	60	1
0	$59\frac{1}{2}$	1

a und *b* wieder in Luft.

Np.	*a*	*b*
0	60	61
0	61	$61\frac{1}{2}$

Für hartes Messing findet sich demnach die galvanische Ausdehnung zu 1,5 und 1,7 Proc.

Im Mittel = 1,6 Proc.

In der folgenden Tabelle sollen nun die Resultate dieser 10 Versuchsreihen nochmals übersichtlich zusammengestellt werden; die erste Columne enthält die untersuchten Drähte, die zweite die fragliche galvanische Ausdehnung derselben ausgedrückt in Procenten der Wärmeausdehnung, und in der dritten Columne sind des besseren Vergleiches halber nochmals die Werthe beigesetzt, welche Streintz für die galvanische Ausdehnung derselben Metalle gefunden:

I.	Kupfer, hart . . .	2,2	15,4, 19,2
II.	„ weich . .	1,7	11,2
III.	„ „ . .	1,2	
IV.	Platin, hart . . .	2,0	25,5
V.	Eisen, weich . . .	2,0	27,3, 17,8
VI.	„ „ . . .	1,2	
VII.	Stahl, hart	2,0	— 0,8, 3,8, 2,9
VIII.	„ „	1,4	
IX.	„ weich . . .	1,6	21,5
X.	Messing, hart . .	1,6	14,5

Es halten sich demnach die Werthe der galvanischen Ausdehnung zwischen 1,2 und 2,2 Proc., ohne dafs ein Zusammenhang derselben mit der Art des untersuchten

Digitized by Google

Metalles erkennbar wäre. Wenn man bedenkt, dafs diese Werthe jedenfalls nur eine obere Gränze seyn können, indem die Wärme des Drahtes durch das umgebende Wasser doch nur zum Theile abgeleitet wird, so scheint Angesichts der Kleinheit des erhaltenen Effectes die Ansicht von einer besonderen galvanischen Ausdehnung denn doch gewagt, umsomehr, als sowohl Edlund wie Streintz bei ihren Versuchen bemerkten, dafs die sogenannte galvanische Ausdehnung in ihrem Auftreten und Verschwinden ganz die Eigenthümlichkeiten der Wärmeausdehnung, nämlich allmäliges Auftreten und Verschwinden, zeigt. Ich glaube, es kann kaum ein Zweifel darüber seyn, dafs die geringe Ausdehnung, welche der im Wasser hängende Draht noch zeigt, einzig und allein auf Kosten der in demselben zurückbleibenden Wärme zu schreiben ist.

Wenn die bei den vorliegenden Versuchen angewendete Methode auch nicht im Stande ist, für die eine oder andere Ansicht endgültig zu entscheiden, so zeigt sie doch, dafs für die Annahme eines besonderen Ausdehnungsvermögens des galvanischen Stromes keine genügenden Gründe vorhanden sind, diese Annahme daher vorläufig als ungerechtfertigt erscheint.

Was nun die Beobachtungen von Edlund und Streintz anlangt, so liegen deren Werthe für die galvanische Ausdehnung sämmtlich oberhalb der von mir gefundenen oberen Gränze, doch so, dafs Edlund hiebei viel näher dieser Gränze kommt als Streintz. Während die Werthe Edlund's sich ungefähr in den Gränzen von 2,8 Proc. bis 6,5 Proc. halten, erreichen die von Streintz gefundenen eine Höhe von 27,3 Proc., ein Unterschied, der sich nur durch die Wahl der bei den Versuchen angewendeten Methoden erklären läfst[1]).

1) Streintz hat zwar für seine Methode die möglichen Fehler berechnet und giebt an, dafs seine Resultate weit oberhalb dieser liegen, was auch der Fall ist; dafs seine Resultate dennoch unrichtig sind, ist darum nicht auffällig, weil bei einer Methode, bei welcher die unberechenbaren Fehlerquellen die weitaus überwiegenden sind, eine berechnete Fehlergränze überhaupt keinen Sinn hat.

Digitized by Google

Wenn daher Streintz glaubt, „seinen Resultaten mit Recht mehr Gewicht beilegen zu müssen als denen Edlund's“, so scheint mir das insofern nicht richtig, als die vorliegenden Versuche gerade das Gegentheil beweisen, indem sie zeigen, um wieviel weniger fehlerhaft die Resultate Edlund's sind.

Es erübrigt noch, auf die exceptionelle Stellung zurückzukommen, welche Streintz für die harten Stahldrähte unter den übrigen Metallen gefunden hat. Nach Streintz ist harter Stahl das einzige Metall, welches keine galvanische Ausdehnung zeigt; es soll jedoch ein solcher harter Stahldraht, wenn man ihn durch Ausglühen weich macht, sofort in die Reihe der übrigen Metalle treten und eine ganz bedeutende Ausdehnung durch den Strom zeigen. Ich habe dieses abnorme Verhalten nicht bestätigt gefunden, obwohl ich vorsichtshalber dieselbe Stahldrahtsorte (Müller'sche Claviersaite) verwendete wie Streintz; die vorhergehende Tabelle zeigt, dafs weder der harte noch der ausgeglühte Draht eine merkliche galvanische Ausdehnung besitzt, dafs überhaupt Stahl sich gegen den galvanischen Strom gerade so verhält wie alle anderen Metalle. Was schliefslich die theoretischen Ansichten über die galvanische Ausdehnung anlangt, welche Streintz eben auf Grundlage dieses abnormen Verhaltens des Stahles entwickelt, und denen zufolge die galvanische Ausdehnung in Zusammenhang stehen soll mit einer Drehung der Molecüle, Polarisation der erzeugten Wärmeschwingungen u. dgl., so entbehren dieselben mit Hinblick auf das eben Gesagte jeder thatsächlichen Grundlage.

Digitized by Google

IV. *Ueber die Zersetzung einiger Ammoniumsalze in wässeriger Lösung durch Kalium- und Natriumsalze;*
von Dr. H. C. Dibbits.

§ 1. Einleitung.

In einer früheren Abhandlung[1]) habe ich zu zeigen versucht, dafs verschiedene Ammoniumsalze, beim Kochen ihrer wässerigen Lösung, eine gewisse Quantität Ammoniak verlieren, welche, aufser von der Quantität und der Concentration der Lösung und von der Quantität des verdampften Wassers, von der Natur des Salzes abhängt. Kennt man einmal die Quantität Ammoniak, welche unter verschiedenen Umständen aus verschiedenen Ammoniumsalzen entweicht, so wird man aus der Quantität des verdampften Ammoniaks, bei gegebenem Salze, auf dessen Quantität, oder, wenn die Quantität bekannt ist, auf die Natur des Salzes schliefsen können.

Ich habe jetzt versucht davon eine Anwendung zu machen, indem ich die Quantität des entweichenden Ammoniaks bestimmt habe aus Lösungen, welche, neben einem gegebenen Ammoniumsalze, verschiedene Quantitäten eines andern, von einer andern Säure abgeleiteten Metallsalzes enthielten. Ich that dies in der Absicht daraus abzuleiten, ob die beiden Salze, falls sich keine unlösliche Verbindung formt, sich wechselseitig zersetzen oder nicht. Dazu wählte ich Combinationen, bei denen die beiden Ammoniumsalze, deren Bildung in der Lösung möglich ist, möglichst verschiedene Quantitäten Ammoniak verlieren. Ammoniumsulphat z. B. giebt beim Kochen seiner Lösung viel mehr NH^3 ab als Ammoniumchlorid; durch Combination von Ammoniumsulphat mit Kaliumchlorid wollte ich aus der im Destillate gefundenen Quantität NH^3 ableiten,

1) Diese Ann. 150, S. 260.

Digitized by Google

ob die genannten Salze als solche in der kochenden Lösung bestehen, oder ob sie sich zu Ammoniumchlorid und Kaliumsulphat umsetzen.

Bei der Wahl der zu prüfenden Combinationen waren die Salze der schweren Metalle ausgeschlossen. Denn ich wünschte nur mit klaren Lösungen zu arbeiten, und bei Anwesenheit eines der letztgenannten Salze würde das durch Dissociation frei gewordene Ammoniak zersetzend darauf einwirken und ein basisches Salz oder Hydroxyd präcipitiren. Ich war also genöthigt, meine Versuche auf einige Salze der Alkali- und Erdalkali-Metalle einzuschränken. Bei Anwendung von Ammoniumsulphat und Ammoniumoxalat waren auch die Salze der Erdalkali-Metalle ausgeschlossen.

Die Einrichtung dieser Versuche war dieselbe wie bei meinen früheren Destillationen. Die abgewogenen Salze wurden immer in der gleichen Quantität kalten Wassers (200 CC.) gelöst; die Lösung wurde in einer mit einem Liebig'schen Kühlapparate versehenen Retorte gekocht; das untere Ende des Kühlapparates tauchte in eine bekannte Quantität titrirter Schwefelsäure; vom Destillate wurden immer zweimal 50 CC. aufgefangen und jede Portion wurde mit verdünntem Ammoniak zurücktitrirt. Durch Subtraction wurde so die Quantität des verdampften Ammoniaks gefunden. Die Concentration der beiden Titrirlösungen, sowohl der Schwefelsäure als des Ammoniaks, war ungefähr die sogenannte zehntel-normale.

§ 2. Die Bereitung der Salze.

A. Die Ammoniumsalze.

In diesen Versuchen wandte ich dieselben fünf Ammoniumsalze an, welche ich früher hinsichtlich ihrer Dissociation untersucht habe. Ich hielt es indessen für unnöthig, dieselben von etwa darin vorkommenden, zusammengesetzten Ammoniaken zu reinigen, habe mir aber die gröfste Mühe gegeben, sie möglichst neutral darzustellen.

Digitized by Google

Das *Ammoniumchlorid* wurde, nach vollkommener Entfernung des Eisens mittelst Ammoniak, wiederholt umkrystallisirt und unmittelbar vor jedem Versuche (unmittelbar vor dem Abwägen) bis zum anfangenden Verdampfen erhitzt.

Das *Ammoniumnitrat* wurde aus dem käuflichen kohlensauren Salze mit einer zur Neutralisation nicht ganz genügenden Menge reiner Salpetersäure bereitet. Die aus der ersten Krystallisation erhaltenen Krystalle wurden noch einmal umkrystallisirt. Unmittelbar vor jedem Versuche wurde das Salz bei 130°—140° getrocknet.

Das *Ammoniumsulphat* erhielt ich, indem ich das käufliche Salz mittelst Schwefelammonium von Eisen befreite, den Ueberschufs des Schwefelammoniums durch verdünnte Schwefelsäure zersetzte und die Lösung mit reinem Ammoniak alkalisch machte. Das Salz wurde dann zweimal umkrystallisirt und die zuletzt erhaltenen Krystalle in wenig Wasser gelöst und mit starkem Alkohol praecipitirt. Der erhaltene Krystallbrei wurde mit demselben Alkohol wiederholt ausgewaschen und gleich darauf über Schwefelsäure getrocknet.

Das *Ammoniumoxalat*, aus dem Carbonate und reiner Oxalsäure bereitet, wurde zweimal umkrystallisirt, zuletzt aus einer mit Ammoniak schwach alkalisch gemachten Lösung. Die Krystalle wurden schnell zwischen Filtrirpapier getrocknet.

Das *Ammoniumacetat* wurde, wie bei meinen früheren Versuchen, durch Zusammenfügung aequivalenter Mengen krystallisirten Baryumacetates ($Ba\,C^4\,H^6\,O^4 + 3\,H^2\,O$) und des oben genannten Ammoniumsulphats. Zur Vermeidung jeden Verlustes an Ammoniak wurden die Lösungen beider Salze in der Retorte selbst mit einander vermengt.

B. Die andern Salze.

Kaliumchlorid wurde aus zweimal umkrystallisirtem Kaliumchlorat bereitet. Letztgenanntes Salz wurde in kleinen Portionen in einem Porzellantiegel *langsam* erhitzt,

Digitized by Google

in der Absicht, der Entstehung eines alkalischen Salzes vorzubeugen[1]). Das Salz wurde darauf in einem Platintiegel geschmolzen und auf einer Porzellanplatte ausgegossen. — Obgleich die Zersetzung des Chlorats sehr langsam gewesen war, zeigte das erhaltene Chlorid doch eine alkalische Reaction. Letzteres wurde deshalb noch einmal aus salzsäurehaltigem Wasser umkrystallisirt, und die jetzt aus schwach saurer Lösung erhaltenen Krystalle wurden, nachdem sie getrocknet waren, in Portionen in einem Platintiegel über einer Spiritusflamme bis zum anfangenden Schmelzen geglüht[2]).

Natriumchlorid wurde bereitet durch Auflösen von Natriumhydrocarbonat, das vollkommen sulphatfrei war, in einem geringen Ueberschufs von reiner Salzsäure. Das beim Eindampfen krystallisirte Salz wurde in einem Platintiegel bis zum anfangenden Schmelzen geglüht.

Baryumchlorid wurde durch zweimalige Umkrystallisation des käuflichen Salzes aus einer grofsen Quantität Wasser erhalten.

1) Siehe J. S. Stas, Untersuch. über die Gesetze der chem. Proport., übersetzt von L. Aronstein, S. 250.

2) Bei dieser, sowie bei allen andern Erhitzungen wurde immer, anstatt einer Glasflamme, eine Spiritusflamme benutzt, weil das mir zu Dienste stehende Leuchtgas sehr merkbar Schwefel- und Ammoniakhaltig war. Auf das Vorkommen von Schwefel und Ammoniak im Leuchtgase und die daraus hervorgehende Bildung von Ammoniumsulphat ist schon von J. W. Gunning (Scheik. Bydragen, I, S. 71) hingewiesen. Ich fand, dafs Kalium- und Natriumchlorid, welche völlig Sulphat-frei waren, nach dem Glühen über einer Flamme dieses Leuchtgases während weniger als einer Viertelstunde in geringem, aber doch sehr merkbarem Maafse Sulphat enthielten. Ebenso wurden mehrere Chloride, Nitrate, Acetate u. s. w., als ich sie in einem gewöhnlichen kupfernen Luftbade bei 100° oder einer etwas höheren Temperatur trocknete, sehr bald mit Sulphat verunreinigt, ohne Zweifel in Folge der Diffusion der Verbrennungsproducte durch die Ritzen des Luftbades. Mehrere Versuche, welche aus diesem Grunde kein Vertrauen verdienten, habe ich deshalb, unter Anwendung einer Spiritusflamme, wiederholen müssen. Weil diese Unreinheiten im Leuchtgase auch anderswo vorkommen können, scheint es mir nicht überflüssig, darauf aufmerksam zu machen.

Digitized by Google

Kaliumnitrat wurde durch zweimalige Umkrystallisation des käuflichen Salzes als Salpetermehl dargestellt, das durch Decken mit Wasser von der Mutterlauge getrennt wurde. Das erhaltene Salz war vollkommen chloridfrei.

Natriumnitrat wurde bereitet durch Auflösen von reinem, krystallisirtem Natriumhydrocarbonat in einem geringen Ueberschusse von reiner Salpetersäure. Die erhaltenen, chloridfreien Krystalle wurden in einem mit einer Spiritusflamme erwärmten Luftbade längere Zeit bei 140° bis 150° getrocknet.

Baryumnitrat wurde wie Baryumchlorid dargestellt.

Kaliumsulphat desgleichen.

Natriumsulphat wurde aus reinem Natriumcarbonat und reiner, verdünnter Schwefelsäure im Verhältnifs der Moleculargewichte bereitet und zweimal aus einer grofsen Quantität Wasser umkrystallisirt.

Die Lösungen der acht letztgenannten Salze reagirten weder auf rothes noch auf blaues Lackmuspapier. Um jedoch die Neutralität dieser Salze auf eine noch empfindlichere Weise zu prüfen, stellte ich folgende Versuche an. Von jedem Salze wurden 10 Gramme (wasserfrei berechnet) in 50 CC. Wasser gelöst, wenn die Löslichkeit des Salzes zu klein war unter Erwärmen mit Abschlufs der Luft, sonst ohne Erwärmen. Nachdem die Lösungen die Temperatur des Zimmers wieder angenommen hatten, wurde zu jeder, so wie auch zu 50 CC. Wasser ohne Salz, die gleiche Anzahl Tropfen einer alkoholischen Tinctur von St. Marthaholz hinzugesetzt. So ergab sich, dafs die Farbe bei allen Lösungen nicht dieselbe war; während das Wasser ohne Salz gelbbraun gefärbt war, hatten die Salzlösungen eine entweder mehr in's Rothe, oder mehr in's Gelbe spielende Farbe. Ich fügte dann zu jeder der Lösungen so viele Tropfen äufserst verdünnten Ammoniaks oder äufserst verdünnter Schwefelsäure, dafs alle Lösungen eine möglichst gleiche Farbe bekamen. Das Ammoniak und die Schwefelsäure waren dermafsen verdünnt, dafs 1 Tropfen von jedem mit nur 0,01 Milligr.

Digitized by Google

NH^3 übereinkam. Durch Zählung der Tropfen konnte also die saure oder alkalische Reaction quantitativ bestimmt werden. Ich fand nun, dafs zu keiner der Lösungen mehr als 6 Tropfen entweder des Ammoniaks oder der Schwefelsäure zugesetzt zu werden brauchten, um die gleiche Farbe zu erhalten, und dafs demnach die Abweichung von der absoluten Neutralität bei allen nur äufserst gering war. Die Resultate waren:

10 Grm.	K Cl	enthielten	eine	Quantität	freier	Säure	= — 0,02	Milligr.	NH^3
10 „	Na Cl	„	„	„	„	„	= — 0,02	„	„
10 „	$BaCl^2$	„	„	„	„	„	= — 0,01	„	„
10 „	KNO^3	„	„	„	„	„	= — 0,01	„	„
10 „	$NaNO^3$	„	„	„	„	Base	= + 0,04	„	„
10 „	BaN^2O^6	„	„	„	„	„	= + 0,05	„	„
10 „	K^2SO^4	„	„	„	„	„	= + 0,06	„	„
10 „	Na^2SO^4	„	„	„	„	Säure	= — 0,03	„	„

Diesen kleinen Zahlen will ich keineswegs ein grofses Gewicht beilegen, weil die Schätzung kleiner Unterschiede in der Farbe immer unsicher ist und das Finden so kleiner Mengen Ammoniak oder deren aequivalenter Basen, trotz aller Vorsorgen, leicht durch fremde Einflüsse verursacht seyn kann. Die Zahlen zeigen aber, dafs die in NH^3 ausgedrückte alkalische oder saure Reaction, auf 10 Gramme wasserfreies Salz, immer viel weniger als 0,1 Milligr. NH^3 betrug. Ich glaubte deshalb, diese Salze zu den folgenden Versuchen ohne Bedenken anwenden zu können.

Weiter habe ich geprüft, ob diese Salze beim Kochen ihrer Lösungen auch selbst zersetzt werden. Mit jedem der acht genannten Salze wurde deshalb ein Destillationsversuch angestellt, welcher fortgesetzt wurde, bis das Salz in der kochenden Lösung zu krystallisiren anfing. Die Concentration der Lösung war also immer viel gröfser als bei allen folgenden Versuchen. Das in Portionen aufgefangene Destillat reagirte aber bei allen diesen Salzen vollkommen neutral, und daraus folgt, dafs keines derselben in der siedenden Lösung in merkbarer Weise zer-

Digitized by Google

setzt ist, oder wenigstens, dafs keines derselben die Reaction des Destillates beeinflussen kann.

Das zu den folgenden Versuchen angewandte Wasser war auf die früher[1]) angegebene Weise mit *Chamäleon minerale* destillirt worden. Keine Spur von Ammoniak oder andern Basen war in demselben nachzuweisen.

§ 3. Destillationsversuche.

Zu den folgenden Versuchen wurden die Salze immer in aequivalenten Quantitäten oder in deren einfachen Multiplis zusammengefügt. Die mit Krystallwasser krystallisirenden Salze wurden als solche abgewogen, das angegebene Gewicht aber ist überall das des wasserfreien Salzes, während das Krystallwasser zum Lösungswasser in Rechnung gebracht wurde.

Die zur Lösung angewandte Quantität Wasser war bei allen Versuchen 200 CC.

Die von mir untersuchten Combinationen sind:

I. *Ammoniumsulphat mit einigen Chloriden und Nitraten.*
II. *Ammoniumoxalat* „ „ „ „ „
III. *Ammoniumacetat* „ „ „ „ „

I. Ammoniumsulphat mit Chloriden und Nitraten.

Zu diesen Versuchen wurde genommen:

1 Aeq.	NH^4Cl	=	5,35	Grm.
1 „	$(NH^4)NO^3$	=	8,0	„
1 „	$\frac{1}{2}(NH^4)^2SO^4$	=	6,6	„
1 „	KCl	=	7,46	„
1 „	KNO^3	=	10,11	„
1 „	$\frac{1}{2}K^2SO^4$	=	8,71	„
1 „	$NaCl$	=	5,85	„
1 „	$NaNO^3$	=	8,5	„
1 „	$\frac{1}{2}Na^2SO^4$	=	7,1	„ [2])

1) Diese Ann. 150, S. 264.

2) Abgewogen als $\frac{1}{2}[Na^2SO^4 + 10H^2O]$ = 16,1 Grm.

Digitized by Google

Ich fing an mit einer genauen Bestimmung der Quantität NH^3, welche jedes der drei genannten Ammoniumsalze für sich beim Kochen abgiebt. Die Versuche sind fortlaufend numerirt. Die angegebenen Zahlen bedeuten *Milligramme* NH^3, — *a.* in den ersten 50 CC., *b.* in den zweiten 50 CC. des Destillates.

Ammoniumchlorid für sich (1 Aeq.).

	No. 1.	No. 2.	Mittel.
a.	1,05	1,15	1,1
b.	0,6	0,6	0,6
Total	1,65	1,75	1,7

Ammoniumnitrat für sich (1 Aeq.).

	No. 3.	No. 4.	Mittel.
a.	1,0	1,0	1,0
b.	0,6	0,6	0,6
Total	1,6	1,6	1,6

Ammoniumsulphat für sich (1 Aeq.).

	No. 5.	No. 6.	Mittel.
a.	5,7	5,9	5,8
b.	3,9	3,9	3,9
Total	9,6	9,8	9,7

Darauf untersuchte ich die folgenden Combinationen.

Ammoniumsulphat mit Kaliumchlorid.

1 Aeq. $\frac{1}{2}(NH^4)^2SO^4$.

	No. 7. Mit 1 Aeq. KCl.	No. 8. Mit 2 Aeq. KCl.	No. 9. Mit 5 Aeq. KCl.
a.	5,2	4,8	4,1
b.	3,3	3,1	2,9
Total	8,5	7,9	7,0

No. 10.

1 Aeq. NH^4Cl mit 1 Aeq. $\frac{1}{2}K^2SO^4$.

a. 5,2

b. 3,3

Total 8,5. Also dasselbe wie in No. 7.

Digitized by Google

Ammoniumsulphat mit Natriumchlorid.
1 Aeq. $\frac{1}{2}(NH^4)^2SO^4$.

	No. 11. Mit 1 Aeq. NaCl.	No. 12. Mit 2 Aeq. NaCl.	No. 13. Mit 5 Aeq. NaCl.
a.	5,1	4,7	4,0
b.	3,4	2,8	2,3
Total	8,5	7,5	6,3

No. 14.
1 Aeq. NH^4Cl mit 1 Aeq. $\frac{1}{2}Na^2SO^4$.

a.	5,0
b.	3,4
Total	8,4

Also dasselbe wie in No. 11.

Ammoniumsulphat mit Kaliumnitrat.
1 Aeq. $\frac{1}{2}(NH^4)^2SO^4$.

	No. 15. Mit 1 Aeq. KNO^3.	No. 16. Mit 2 Aeq. KNO^3.	No. 17. Mit 5 Aeq. KNO^3.
a.	5,4	5,0	4,5
b.	3,5	3,4	3,2
Total	8,9	8,4	7,7

No. 18.
1 Aeq. $(NH^4)NO^3$ mit 1 Aeq. $\frac{1}{2}K^2SO^4$.

a.	5,2
b.	3,6
Total	8,8

Also dasselbe wie in No. 15.

Ammoniumsulphat mit Natriumnitrat.
1 Aeq. $\frac{1}{2}(NH^4)^2SO^4$.

	No. 19. Mit 1 Aeq. $NaNO^3$.	No. 20. Mit 2 Aeq. $NaNO^3$.	No. 21. Mit 5 Aeq. $NaNO^3$.
a.	5,0	4,5	3,7
b.	3,4	2,9	2,6
Total	8,4	7,4	6,3

Digitized by Google

No. 22.

1 Aeq. $(NH^4)NO^3$ mit 1 Aeq. $\frac{1}{2}Na^2SO^4$.

a.	5,0
b.	3,3
Total	8,3

Also dasselbe wie in No. 19.

Aus diesen Versuchen ergiebt sich Folgendes.

1) Vergleicht man Versuch No. 7 mit No. 10, so sieht man, dafs eben so viel NH^3 verdampft, wenn man entweder $\frac{1}{2}(NH^4)^2SO^4$ mit KCl oder NH^4Cl mit $\frac{1}{2}K^2SO^4$ combinirt. Es ist also gleichgültig, ob man die Salze *AB* und *CD* oder *AC* und *BD* zusammen bringt. In der Lösung geben sie immer dasselbe, wie auch schon auf andere Weisen gefunden wurde. — Zu demselben Schlusse führt die Vergleichung von No. 11 mit No. 14, von No. 15 mit No. 18 und von No. 19 mit No. 22.

2) Bei den Versuchen No. 7—9 wurde *weniger* NH^3 gefunden als beim Ammoniumsulphat allein (9,7 Milligr.), aber *mehr* als beim Ammoniumchlorid allein (1,7 Milligr.). Daraus folgt, dafs nicht Alles $(NH^4)^2SO^4$ geblieben ist, sondern auch nicht Alles NH^4Cl geworden ist.

Zufügung von 1 Aeq. KCl zu 1 Aeq. $\frac{1}{2}(NH^4)^2SO^4$ vermindert die Quantität NH^3 von 9,7 auf 8,5 Milligr. Berücksichtigt man nun, dafs Hinzufügung von vielen Salzen, auf welche NH^3 nicht zersetzend einwirken kann, das Verdampfen des NH^3 befördert[1]), so läfst sich diese Abnahme von 9,7 auf 8,5 nur dadurch erklären, dafs ein Theil des Ammoniumsulphats in Ammoniumchlorid verwandelt ist. Aber nur ein *Theil* des Salzes ist auf diese Weise umgesetzt; denn wäre die Umsetzung in NH^4Cl und $\frac{1}{2}K^2SO^4$ *vollständig*, so hätte ich, anstatt 8,5, nur 1,7 Milligr. NH^3 gefunden haben müssen. Daraus ergiebt sich weiter, dafs, wenn die Lösung zu gleicher Zeit $(NH^4)^2SO^4$ und NH^4Cl enthält, weil die ursprünglichen Salze im Aequivalent-Verhältnisse zusammen gebracht sind, auch K^2SO^4 und KCl zugegen seyn müssen und

1) Siehe unten, § 5.

Digitized by Google

dafs die Lösung also *vier* Salze enthält. — Fügt man 2 Aeq. KCl hinzu, so nimmt die Quantität des verdampften NH^3 noch mehr ab; ein noch gröfserer Theil des Ammoniumsulphats ist in Chlorid und also auch ein gröfserer Theil des Kaliumchlorids in Sulphat verwandelt. Und endlich bei 5 Aeq. KCl ist diese Umsetzung noch ansehnlicher.

Ganz dieselbe Ueberlegung läfst sich auf die Versuche No. 11—13 anwenden, und daraus geht also hervor, dafs $(NH^4)^2SO^4$ durch Hinzufügung von NaCl sich *theilweise* umsetzt in NH^4Cl und Na^2SO^4; je gröfser die Quantität des NaCl, um so gröfser ist die Umsetzung.

Ebenso folgt aus den Versuchen No. 15—17 und No. 19—21, dafs die *Nitrate* des Kaliums und Natriums das Ammoniumsulphat theilweise in Ammoniumnitrat umsetzen. Die Umsetzung ist nur partiell, aber um so gröfser, je nachdem die Quantität des hinzugefügten Kalium- oder Natriumnitrats gröfser ist.

Wir gelangen also zu dem Schlusse, dafs Ammoniumsulphat, bei 100° in Wasser gelöst, durch Hinzufügung eines der genannten Chloride oder Nitrate *theilweise* umgesetzt wird. Die wechselseitige Umsetzung ist um so gröfser, je nachdem die Quantität des hinzugefügten Chlorids oder Nitrats gröfser ist. In allen Fällen enthält die Lösung *vier* Salze, deren relative Quantitäten abhängen vom Verhältnisse, in welchem die zwei ursprünglichen Salze zusammen gebracht sind.

II. Ammoniumoxalat mit Chloriden und Nitraten.

Der gröfseren Quantitäten NH^3 wegen, welche das Oxalat und das Acetat des Ammoniums abgeben, nahm ich zu diesen und zu den unter III. erwähnten Versuchen die als 1 Aeq. angedeuteten Quantitäten Salz 10 mal kleiner als zu den vorigen. Die angewandten Quantitäten, welche auf Milligramme genau abgewogen wurden, sind also:

Digitized by Google

1 Aeq.	NH^4Cl	= 0,535	Grm.	
1 „	$(NH^4)NO^3$	= 0,80	„	
1 „	$\frac{1}{2}(NH^4)^2C^2O^4$	= 0,62	„	[1])
1 „	$(NH^4)C^2H^3O^2$	= 0,77	„	[2])
1 „	KCl	= 0,746	„	
1 „	KNO^3	= 1,011	„	
1 „	$NaCl$	= 0,585	„	
1 „	$NaNO^3$	= 0,85	„	
1 „	$NaC^2H^3O^2$	= 0,82	„	[3])
1 „	$\frac{1}{2}BaCl^2$	= 1,04	„	[4])
1 „	$\frac{1}{2}Ba(NO^3)^2$	= 1,305	„	
1 „	$\frac{1}{2}Ba(C^2H^3O^2)^2$	= 1,275	„	[5])

Ich erhielt folgende Quantitäten NH^3, ausgedrückt in *Milligrammen*: — *a.* in den ersten 50 CC., *b.* in den zweiten 50 CC. des Destillates.

Ammoniumchlorid für sich (1 Aeq.).

	No. 23.	No. 24.	Mittel.
a.	0,4	0,5	0,45
b.	0,3	0,3	0,3
Total	0,7	0,8	0,75

Ammoniumnitrat für sich (1 Aeq.).

	No. 25.	No. 26.	Mittel.
a.	0,35	0,35	0,35
b.	0,15	0,15	0,15
Total	0,5	0,5	0,5

1) Abgewogen als $\frac{1}{2}[(NH^4)^2C^2O^4 + H^2O] = 0{,}71$ Grm.
2) Abgewogen als $\frac{1}{2}[Ba(C^2H^3O^2)^2 + 3H^2O] = 1{,}545$ Grm. und $\frac{1}{2}(NH^4)^2SO^4 = 0{,}66$ Grm.
3) Abgewogen als $NaC^2H^3O^2 + 3H^2O = 1{,}36$ Grm.
4) Abgewogen als $\frac{1}{2}[BaCl^2 + 2H^2O] = 1{,}22$ Grm.
5) Abgewogen als $\frac{1}{2}[Ba(C^2H^3O^2)^2 + 3H^2O] = 1{,}545$ Grm.

Digitized by Google

Ammoniumoxalat für sich (1 Aeq.).

	No. 27.	No. 28.	Mittel.
a.	6,9	7,0	6,95
b.	4,9	5,0	4,95
Total	11,8	12,0	11,9

Die Combinationen des letztgenannten Salzes mit den Chloriden und den Nitraten des Kaliums und Natriums gaben mir folgende Resultate.

Ammoniumoxalat mit Kaliumchlorid.
1 Aeq. $\frac{1}{2}(NH^4)^2 C^2 O^4$.

	No. 29. Mit 1 Aeq. KCl.	No. 30. Mit 5 Aeq. KCl.	No. 31. Mit 10 Aeq. KCl.	No. 32. Mit 20 Aeq. KCl.
a.	6,8	6,0	5,3	4,6
b.	4,6	3,6	3,3	2,8
Total	11,4	9,6	8,6	7,4

Ammoniumoxalat mit Natriumchlorid.
1 Aeq. $\frac{1}{2}(NH^4)^2 C^2 O^4$.

	No. 33. Mit 1 Aeq. NaCl.	No. 34. Mit 5 Aeq. NaCl.	No. 35. Mit 10 Aeq. NaCl.	No. 36. Mit 20 Aeq. NaCl.
a.	6,8	5,5	4,5	3,9
b.	4,6	3,5	2,9	2,4
Total	11,4	9,0	7,4	6,3

Ammoniumoxalat mit Kaliumnitrat.
1 Aeq. $\frac{1}{2}(NH^4)^2 C^2 O^4$.

	No. 37. Mit 1 Aeq. KNO^3.	No. 38. Mit 5 Aeq. KNO^3.	No. 39. Mit 10 Aeq. KNO^3.	No. 40. Mit 20 Aeq. KNO^3.
a.	6,6	5,5	4,7	4,5
b.	4,6	3,6	3,4	3,2
Total	11,2	9,1	8,1	7,7

Digitized by Google

Ammoniumoxalat mit Natriumnitrat.

1 Aeq. $\frac{1}{2}(NH^4)^2C^2O^4$.

	No. 41. Mit 1 Aeq. $NaNO^3$.	No. 42. Mit 5 Aeq. $NaNO^3$.	No. 43. Mit 10 Aeq. $NaNO^3$.	No. 44. Mit 20 Aeq. $NaNO^3$.
a.	6,8	5,4	4,6	4,2
b.	4,4	3,3	2,9	2,6
Total	11,2	8,7	7,5	6,8

Die sich aus diesen Versuchen ergebenden Folgerungen sind dieselben wie die auf Seite 471 erwähnten. Hinzufügung von 1 Aeq. des Chlorids oder des Nitrats von Kalium oder Natrium zu 1 Aeq. Ammoniumoxalat ist Ursache, dafs die Quantität des verdampften NH^3 *abnimmt* von 11,9 bis 11,4 oder 11,2 Milligr.; Hinzufügung von 5 Aeq. eines der erstgenannten Salze vergröfsert diese Abnahme; und bei 10 und bei 20 Aeq. des Chlorids oder des Nitrats wird die Quantität des verdampften NH^3 aufs Neue immer kleiner. Die Quantität NH^3 bleibt aber immer viel gröfser als diejenige, welche Ammoniumchlorid oder Ammoniumnitrat, auch wenn alles Ammonium in diese Verbindungen eingegangen wäre, geben würde. Daraus folgt also, dafs Ammoniumoxalat von den Chloriden und Nitraten des Kaliums und Natriums, wenn die Salze bei 100° in Wasser gelöst sind, *theilweise* zersetzt wird. Die wechselseitige Zersetzung dieser Salze ist um so gröfser, je mehr von dem Kalium- oder Natriumsalze hinzugefügt ist. Immer enthält die Lösung *vier* Salze, deren relative Quantitäten vom Verhältnisse, worin die zwei ursprünglichen Salze zusammengebracht sind, abhängen.

III. Ammoniumacetat mit Chloriden und Nitraten.

Die bei diesen Versuchen durch 1 Aeq. angedeuteten Quantitäten der Salze sind oben (Seite 473) schon erwähnt, so wie auch die Quantitäten NH^3, welche 1 Aeq. Ammoniumchlorid und 1 Aeq. Ammoniumnitrat, jedes für

Digitized by Google

sich, beim Kochen abgeben. Die Bedeutung der Buchstaben *a* und *b* ist dieselbe wie oben. Ich erhielt folgende Resultate.

Ammoniumacetat für sich (1 Aeq.).

	No. 45.	No. 46.	No. 47.	Mittel.
a.	14,6	14,4	14,6	14,5
b.	6,5	6,8	6,5	6,6
Total	21,1	21,2	21,1	21,1

Ammoniumacetat mit Kaliumchlorid.
1 Aeq. $(NH^4)C^2H^3O^2$.

	No. 48. Mit 1 Aeq. KCl.	No. 49. Mit 5 Aeq. KCl.	No. 50. Mit 10 Aeq. KCl.	No. 51. Mit 20 Aeq. KCl.
a.	14,4	13,3	12,4	11,6
b.	6,3	5,6	5,0	4,8
Total	20,7	18,9	17,4	16,4

Ammoniumacetat mit Natriumchlorid.
1 Aeq. $(NH^4)C^2H^3O^2$.

	No. 52. Mit 1 Aeq. NaCl.	No. 53. Mit 5 Aeq. NaCl.	No. 54. Mit 10 Aeq. NaCl.	No. 55. Mit 20 Aeq. NaCl.
a.	14,4	13,4	11,5	10,8
b.	6,3	5,4	4,4	4,1
Total	20,7	18,8	15,9	14,9

No. 56.
1 Aeq. NH^4Cl mit 1 Aeq. $NaC^2H^3O^2$.

a.	14,4
b.	6,4
Total	20,8

Also dasselbe wie in No. 52.

Digitized by Google

Ammoniumacetat mit Baryumchlorid.

1 Aeq. $(NH^4)C^2H^3O^2$.

	No. 57. Mit 1 Aeq. $\frac{1}{2}BaCl^2$.	No. 58. Mit 5 Aeq. $\frac{1}{2}BaCl^2$.	No. 59. Mit 10 Aeq. $\frac{1}{2}BaCl^2$.	No. 60. Mit 20 Aeq. $\frac{1}{2}BaCl^2$.
a.	13,9	11,3	10,7	8,7
b.	5,6	4,5	4,0	3,0
Total	19,5	15,8	14,7	11,7

No. 61.

1 Aeq. NH^4Cl mit 1 Aeq. $\frac{1}{2}Ba(C^2H^3O^2)^2$.

a.	13,8
b.	5,7
Total	19,5

Also dasselbe wie in No. 57.

Ammoniumacetat mit Kaliumnitrat.

1 Aeq. $(NH^4)C^2H^3O^2$.

	No. 62. Mit 1 Aeq. KNO^3.	No. 63. Mit 5 Aeq. KNO^3.	No. 64. Mit 10 Aeq. KNO^3.	No. 65. Mit 20 Aeq. KNO^3.
a.	14,3	12,9	12,4	12,1
b.	6,3	5,8	5,6	5,3
Total	20,6	18,7	18,0	17,4

Ammoniumacetat mit Natriumnitrat.

1 Aeq. $(NH^4)C^2H^3O^2$.

	No. 66. Mit 1 Aeq. $NaNO^3$.	No. 67. Mit 5 Aeq. $NaNO^3$.	No. 68. Mit 10 Aeq. $NaNO^3$.	No. 69. Mit 20 Aeq. $NaNO^3$.
a.	14,2	12,8	11,7	11,1
b.	6,3	5,6	5,0	4,5
Total	20,5	18,4	16,7	15,6

No. 70.

1 Aeq. $(NH^4)NO^3$ mit 1 Aeq. $NaC^2H^3O^2$.

a.	14,4
b.	6,1
Total	20,5

Also dasselbe wie in No. 66.

Digitized by Google

Ammoniumacetat mit Baryumnitrat.

1 Aeq. $(NH^4)C^2H^3O^2$.

	No. 71. Mit 1 Aeq. $\frac{1}{2}Ba(NO^3)^2$.	No. 72. Mit 5 Aeq. $\frac{1}{2}Ba(NO^3)^2$.	No. 73. Mit 10 Aeq. $\frac{1}{2}Ba(NO^3)^2$.
a.	14,1	11,3	10,8
b.	5,8	4,8	4,4
Total	19,9	16,1	15,2

No. 74.

1 Aeq. $(NH^4)NO^3$ mit 1 Aeq. $\frac{1}{2}Ba(C^2H^3O^2)^2$.

a.	14,0
b.	6,0
Total	20,0

Also dasselbe wie in No. 71.

Die Folgerungen, zu welchen diese Versuche führen, sind wieder dieselben wie die aus den vorigen Versuchen abgeleiteten.

Durch Vergleichung von No. 52 mit No. 56, von No. 57 mit No. 61, von No. 66 mit No. 70 und von No. 71 mit No. 74 ergiebt sich, dafs eben so viel NH^3 verdampft, ob man die Salze *AB* und *CD*, oder *AC* und *BD* zusammen auflöst.

Alle untersuchten Combinationen mit Ammoniumacetat geben *weniger* NH^3 als Ammoniumacetat allein (21,1 Milligr.), aber viel *mehr* als Ammoniumchlorid (0,75 Milligr.) oder Ammoniumnitrat allein (0,5 Milligr.). Je nachdem die zugefügte Quantität des Chlorids oder Nitrats des Kaliums, Natriums oder Baryums gröfser ist, um so kleiner ist die Quantität des verdampften NH^3. Immer wirken also die beiden, in der Lösung zusammen gebrachten Salze zersetzend auf einander ein, und diese wechselseitige Zersetzung ist um so gröfser, je gröfser die Quantität des zugefügten Chlorids oder Nitrats. Wir gelangen also auch hier zum Schlusse, dafs die Lösung *vier* Salze enthält, deren relative Quantitäten wieder abhängen vom Verhältnisse der ursprünglich zusammen gebrachten Salze.

Digitized by Google

Ich muſs hier noch bemerken, daſs die anwesenden Acetate beim Kochen der Lösungen auch eine gewisse Quantität Essigsäure verlieren, welche die im Destillate gefundene Quantität NH^3, — weil beim Titriren nur das *freie* Ammoniak bestimmt wurde, — nothwendig vermindern muſs. Was das *Ammoniumacetat* betrifft, ist aber die aus diesem Salze verdampfende Essigsäure schon in Rechnung gebracht, weil bei den Versuchen No. 45—47 (*Ammoniumacetat für sich*) auch nur das freie Ammoniak im Destillate bestimmt wurde. Und was die übrigen Acetate betrifft, deren Bildung bei den obengenannten Combinationen möglich ist (*Kalium-, Natrium-, Baryumacetat*), ist leicht einzusehen, daſs der Einfluſs der aus den Lösungen dieser Salze verdampfenden Essigsäure bei diesen Versuchen unmerkbar wird. Denn aus den angewandten Salzmengen würde sich bilden können:

Bei No. 48—51 und No. 62—65:

höchstens 0,981 Grm. $KC^2H^3O^2$.

Bei No. 52—56 und No. 66—70:

höchstens 0,82 Grm. $NaC^2H^3O^2$.

Bei No. 57—61 und No. 71—74:

höchstens 1,275 Grm. $Ba(C^2H^3O^2)^2$.

Die Quantitäten Essigsäure, welche die zwei letztgenannten Salze beim Kochen ihrer Lösungen abgeben, habe ich bestimmt, und weiter habe ich gefunden, daſs das Kaliumacetat nicht merkbar mehr Essigsäure verliert als das Natriumacetat. Ich fand, daſs, wenn 200 CC. Wasser zur Lösung angewandt und davon die Hälfte abdestillirt wird,

0,82 Grm. $NaC^2H^3O^2$ geben im Dest. 0,4 Mgr. $C^1H^4O^2$
$=$ — 0,11 Mgr. NH^3;

1,275 Grm. $Ba(C^2H^3O^2)^2$ geben im Dest. 0,16 Mgr. $C^2H^4O^2$
$=$ — 0,05 Mgr. NH^3.

Da nun gewiſs nicht die *ganze* Menge der Essigsäure als Natrium- resp. Baryumacetat in der Lösung vorkommt, ist der Einfluſs der aus diesen Salzen verdampfenden, freien Essigsäure auf die Reaction des Destillates gewiſs

Digitized by Google

kleiner als 0,1 Mgr. NH^3, und kann also bei diesen Versuchen ganz und gar unberücksichtigt bleiben.

Die übrigen Salze, deren Bildung in der Lösung denkbar ist, geben alle (siehe S. 467) ein vollkommen neutrales Destillat.

Sämmtliche in diesem § mitgetheilten Versuche führen also zu folgenden Schlüssen:

1) *Ammoniumsulphat, Ammoniumoxalat* und *Ammoniumacetat* werden, in kochender Lösung, durch Hinzufügung aequivalenter Mengen des *Chlorids* oder des *Nitrats* von *Kalium, Natrium, Baryum* theilweise zersetzt[1]).

2) Diese gegenseitige Zersetzung ist um so gröfser, je mehr von dem Chloride oder dem Nitrate hinzugefügt wird.

3) In allen Fällen enthält die Lösung bei 100° *vier* Salze.

§ 4. Annähernde Berechnung von der Gröfse der gegenseitigen Zersetzung.

Aus den mitgetheilten Versuchen läfst sich noch annähernd berechnen, wie grofs die gegenseitige Zersetzung ist. Machen wir nämlich die Voraussetzung, — welche nur für den allerersten Theil des Destillates vollkommen wahr ist, — dafs die Quantität des NH^3, welche z. B. aus dem Ammoniumsulphat entweicht, und ebenso die Quantität des NH^3, welche aus dem Ammoniumchlorid entweicht, den Quantitäten jedes dieser Salze proportional ist, und setzen wir weiter voraus, — was auch nur annähernd wahr ist, — dafs die Anwesenheit anderer Salze auf das Verdampfen des NH^3 keinen merkbaren Einfluſs ausübt (siehe unten, § 5), so läfst sich aus der gefundenen Quantität NH^3 die Quantität jedes der anwesenden Ammoniumsalze durch eine einfache Proportion berechnen.

So findet man z. B. bei No. 11 (1 Aeq. Ammoniumsulphat und 1 Aeq. Natriumchlorid), dafs

1) Die Combinationen des Ammoniumsulphates und des Ammoniumoxalates mit den Baryumsalzen sind hier natürlich ausgeschlossen.

Digitized by Google

15 Proc. geworden ist Ammoniumchlorid und Natriumsulphat,
also 85 Proc. geblieben ist Ammoniumsulphat und Natriumchlorid.

Aus No. 12 (mit 2 Aeq. NaCl) folgt, dafs
27,5 Proc. geworden ist Ammoniumchlorid,
d. h. 13,75 Proc. für jedes Aeq. NaCl.

Aus No. 13 (mit 5 Aeq. NaCl) folgt, dafs
42,5 Proc. geworden ist Ammoniumchlorid,
d. h. 8,5 Proc. für jedes Aeq. NaCl.

Auf dieselbe Weise ergeben sich aus den mitgetheilten Versuchen für die Gröfse der Zersetzung folgende Werthe, ausgedrückt *in Procenten des ursprünglichen Ammoniumsalzes.*

Ammoniumsulphat.

No. 7. Mit 1 Aeq. KCl.	No. 8. Mit 2 Aeq. KCl.	No. 9. Mit 5 Aeq. KCl.
Gebildetes *Ammoniumchlorid.*		
15,0	22,5	33,7
No. 11. Mit 1 Aeq. NaCl.	No. 12. Mit 2 Aeq. NaCl.	No. 13. Mit 5 Aeq. NaCl.
Gebildetes *Ammoniumchlorid.*		
15,0	27,5	42,5
No. 15. Mit 1 Aeq. KNO^3.	No. 16. Mit 2 Aeq. KNO^3.	No. 17. Mit 5 Aeq. KNO^3.
Gebildetes *Ammoniumnitrat.*		
9,9	16,0	24,7
No. 19. Mit 1 Aeq. $NaNO^3$.	No. 20. Mit 2 Aeq. $NaNO^3$.	No. 21. Mit 5 Aeq. $NaNO^3$.
Gebildetes *Ammoniumnitrat.*		
16,0	28,4	42,0

Ammoniumoxalat.

No. 29. Mit 1 Aeq. KCl.	No. 30. Mit 5 Aeq. KCl.	No. 31. Mit 10 Aeq. KCl.	No. 32. Mit 20 Aeq. KCl.
Gebildetes *Ammoniumchlorid.*			
4,5	20,6	29,6	40,4

Digitized by Google

No. 33.	No. 34.	No. 35.	No. 36.
Mit 1 Aeq.	Mit 5 Aeq.	Mit 10 Aeq.	Mit 20 Aeq.
NaCl.	NaCl.	NaCl.	NaCl.
Gebildetes *Ammoniumchlorid.*			
4,5	26,0	40,4	50,2

No. 37.	No. 38.	No. 39.	No. 40.
Mit 1 Aeq.	Mit 5 Aeq.	Mit 10 Aeq.	Mit 20 Aeq.
KNO^3.	KNO^3.	KNO^3.	KNO^3.
Gebildetes *Ammoniumnitrat.*			
6,1	24,6	33,3	36,8

No. 41.	No. 42.	No. 43.	No. 44.
Mit 1 Aeq.	Mit 5 Aeq.	Mit 10 Aeq.	Mit 20 Aeq.
$NaNO^3$.	$NaNO^3$.	$NaNO^3$.	$NaNO^3$.
Gebildetes *Ammoniumnitrat.*			
6,1	28,1	36,8	49,1

Ammoniumacetat.

No. 48.	No. 49.	No. 50.	No. 51.
Mit 1 Aeq.	Mit 5 Aeq.	Mit 10 Aeq.	Mit 20 Aeq.
KCl.	KCl.	KCl.	KCl.
Gebildetes *Ammoniumchlorid.*			
2,0	10,8	18,2	23,1

No. 52.	No. 53.	No. 54.	No. 55.
Mit 1 Aeq.	Mit 5 Aeq.	Mit 10 Aeq.	Mit 20 Aeq.
NaCl.	NaCl.	NaCl.	NaCl.
Gebildetes *Ammoniumchlorid.*			
2,0	11,3	25,5	30,5

No. 57.	No. 58.	No. 59.	No. 60.
Mit 1 Aeq.	Mit 5 Aeq.	Mit 10 Aeq.	Mit 20 Aeq.
$\frac{1}{2}BaCl^2$.	$\frac{1}{2}BaCl^2$.	$\frac{1}{2}BaCl^2$.	$\frac{1}{2}BaCl^2$.
Gebildetes *Ammoniumchlorid.*			
7,8	26,0	31,4	46,2

No. 62.	No. 63.	No. 64.	No. 65.
Mit 1 Aeq.	Mit 5 Aeq.	Mit 10 Aeq.	Mit 20 Aeq.
KNO^3.	KNO^3.	KNO^3.	KNO^3.
Gebildetes *Ammoniumnitrat.*			
2,4	11,6	15,0	18,0

Digitized by Google

No. 66.	No. 67.	No. 68.	No. 69.
Mit 1 Aeq.	Mit 5 Aeq.	Mit 10 Aeq.	Mit 20 Aeq.
$NaNO^3$.	$NaNO^3$.	$NaNO^3$.	$NaNO^3$.
Gebildetes *Ammoniumnitrat.*			
2,9	13,1	21,4	26,7

No. 71.	No. 72.	No. 73.
Mit 1 Aeq.	Mit 5 Aeq.	Mit 10 Aeq.
$\frac{1}{2}Ba(NO^3)^2$.	$\frac{1}{2}Ba(NO^3)^2$.	$\frac{1}{2}Ba(NO^3)^2$.
Gebildetes *Ammoniumnitrat.*		
5,8	24,3	28,6

Alle diese Werthe sind nur genäherte, weil die Voraussetzungen, auf welche die Berechnung sich gründet, nur annähernd wahr sind. Bei denjenigen Versuchen, bei welchen gröfsere Quantitäten Salz angewandt wurden, würde die Quantität des verdampften NH^3 *kleiner* gefunden seyn, wenn die Anwesenheit dieser Salze für sich keinen Einfluſs auf das Entweichen des NH^3 hätte. Da aber ein derartiger Einfluſs besteht, welcher die Quantität des verdampften NH^3 *vergröfsert*, sind die berechneten Quantitäten des zersetzten Salzes etwas *zu klein*, und um so mehr, je concentrirter die Salzlösung ist.

Weiter muſs ich bemerken, daſs ein Fehler in der Ammoniak-Bestimmung im Destillate von etwa 0,2 Milligr. (welcher in meinen Versuchen leicht stattgefunden haben kann) die berechnete Quantität des zersetzten Salzes schon um einige Procente ändert. Aus allen diesen Gründen ist auf das Ergebniſs der Berechnung kein zu groſses Gewicht zu legen. Ich habe die Resultate derselben nur erwähnt, weil sie wenigstens eine Idee geben von der Gröſse der gegenseitigen Zersetzung, und weil sie deutlich zeigen, daſs die Zersetzung *zunimmt* bei Hinzufügung *gröſserer* Quantitäten des Chlorids oder des Nitrats.

§ 5. Ueber den Einfluſs der Anwesenheit anderer Salze auf das Entweichen des Ammoniaks aus Wasser.

A. Bei der Siedetemperatur.

In der Absicht, den Einfluſs zu bestimmen, welchen die Anwesenheit anderer Salze bei den in § 3 beschriebenen

Digitized by Google

Versuchen auf das Entweichen des Ammoniaks ausgeübt haben könnte, habe ich noch folgende Versuche angestellt.

Ich combinirte Ammoniumchlorid mit andern Chloriden, Ammoniumnitrat mit andern Nitraten, Ammoniumsulphat mit andern Sulphaten. Gegenseitige Zersetzung war jetzt nicht möglich, und ich konnte also den Einfluſs prüfen, den die Salze für sich auf das Entweichen des Ammoniaks ausüben.

Die durch 1 Aeq. angedeuteten Quantitäten Salz sind bei diesen Versuchen dieselben wie die auf Seite 468[1]). Die zum Auflösen angewandte Quantität Wasser war wieder 200 CC., und die angegebenen Zahlen bedeuten wieder Milligramme NH^3, *a.* in den ersten, *b.* in den zweiten 50 CC. des Destillates.

Ammoniumchlorid mit anderen Chloriden.

1 Aeq. NH^4Cl.

	No. 75. Mit 1 Aeq. KCl.	No. 76. Mit 5 Aeq. KCl.	No. 77. Mit 5 Aeq. NaCl.	No. 78. Mit 2 Aeq. $\frac{1}{2}BaCl^2$.
a.	1,1	1,0	1,0	1,1
b.	0,5	0,6	0,6	0,5
Total	1,6	1,6	1,6	1,6

Ammoniumnitrat mit anderen Nitraten.

1 Aeq. $(NH^4)NO^3$.

	No. 79. Mit 1 Aeq. KNO^3.	No. 80. Mit 5 Aeq. KNO^3.	No. 81. Mit 5 Aeq. $NaNO^3$.	No. 82. Mit 2 Aeq. $\frac{1}{2}Ba(NO^3)^2$.
a.	1,0	1,1	1,0	1,0
b.	0,6	0,6	0,5	0,5
Total	1,6	1,7	1,5	1,5

Vergleicht man die hier gefundenen Quantitäten NH^3 mit denjenigen, welche *Ammoniumchlorid für sich* (1,7 Milli-

1) 1 Aeq. NH^4Cl = 5,35 Grm., 1 Aeq. $\frac{1}{2}(NH^4)^2SO^4$ = 6,6 Grm. u. s. w.

Digitized by Google

gramme, siehe Seite 469) oder *Ammoniumnitrat für sich* (1,6 Milligramme) im Destillate giebt, so sieht man, dafs die Differenzen nur 0,1 Milligramm betragen. Diese Differenzen sind zu klein, um einigen Schlufs zu erlauben.

Ammoniumsulphat mit anderen Sulphaten.

1 Aeq. $\frac{1}{2}(NH^4)^2SO^4$.

	No. 83. Mit 1 Aeq. $\frac{1}{2}K^2SO^4$.	No. 84. Mit 2 Aeq. $\frac{1}{2}K^2SO^4$.
a.	6,7	7,3
b.	4,3	4,8
Total	11,0	12,1

	No. 85. Mit 1 Aeq. $\frac{1}{2}Na^2SO^4$.	No. 86. Mit 2 Aeq. $\frac{1}{2}Na^2SO^4$.	No. 87. Mit 5 Aeq. $\frac{1}{2}Na^2SO^4$.
a.	6,4	7,0	7,8
b.	4,4	4,4	5,0
Total	10,8	11,4	12,8

Dieselbe Quantität *Ammoniumsulphat für sich* (siehe Seite 469) giebt im Ganzen 9,7 Milligr. NH^3. Daraus geht hervor, dafs die Quantität NH^3, welche aus einer siedenden Lösung des Ammoniumsulphats entweicht, durch Hinzufügung von Kalium- oder Natriumsulphat *vergröfsert* wird, und zwar um so mehr, je gröfser die Quantität eines der letztgenannten Salze. Es kann dies die Folge seyn entweder der gröfseren Geschwindigkeit, mit welcher das NH^3 aus einer concentrirteren Salzlösung entweicht, oder der Erhöhung des Siedepunktes, oder einer gröfseren Zersetzung des Ammoniumsalzes in Folge der Erhöhung des Siedepunktes. Ein Doppelsalz, das weniger zersetzt wird als das Ammoniumsulphat allein, wird jedenfalls nicht gebildet.

Es ergiebt sich also, dafs Hinzufügung von Salzen, welche auf das Ammoniumsalz nicht zersetzend einwirken, entweder keinen merkbaren Einfluſs auf das Entweichen des NH^3 ausübt, oder dasselbe *befördert*.

Bei den oben erwähnten Versuchen No. 75—82 waren die totalen Quantitäten des verdampften NH^3 *klein*, wie auch die gefundenen Differenzen. Es ist also wohl möglich, dafs auch bei diesen Versuchen *mehr* NH^3 verdampfte als aus dem Ammoniumsalze allein, obgleich die Differenzen zu klein sind, um sie genau bestimmen zu können.

B. Bei der gewöhnlichen Temperatur.

Auch bei der gewöhnlichen Temperatur (10° — 16°) stellte ich in Bezug auf den genannten Einfluſs einige Versuche an, die ich folgenderweise einrichtete.

Aus einer groſsen Anzahl von Bechergläsern wurden sechs ausgewählt, welche möglichst eben hoch und eben weit waren. In allen wurde die gleiche Quantität Wasser und die gleiche Quantität Ammoniak gebracht, und in einigen dazu verschiedene Quantitäten des zu untersuchenden Salzes. Die Gläser wurden, nachdem sie gewogen waren, in einen Kreis gestellt, in dessen Mitte sich eine Schale mit concentrirter Schwefelsäure befand, und das Ganze wurde mit einer groſsen, abgeschliffenen Glasglocke bedeckt, welche, luftdicht schlieſsend, auf einer darunter liegenden, ebenfalls abgeschliffenen Glasplatte stand. Nach 1 oder 2 Tagen wurde die Glocke abgenommen, die Gläser wurden von Neuem gewogen, und das in den Lösungen zurückgebliebene Ammoniak mit verdünnter Schwefelsäure titrirt. Durch Subtraction wurde also die Quantität des verdampften Ammoniaks gefunden, während aus dieser und dem Gewichtsverluste jedes Glases die Quantität des verdampften Wassers abgeleitet wurde.

Zur Vermeidung des Einflusses, den die Senkung der Temperatur beim Auflösen der Salze hätte ausüben können, wurde in jedem Glase zuerst die abgewogene Quantität Salz mit einer gewissen Quantität Wasser zusammengebracht; nachdem die Salze gelöst und die Lösungen um-

Digitized by Google

gerührt waren, wurden die Gläser, neben einem oder mehreren, worin sich nur Wasser befand, unter die Glocke gestellt und also während einiger Stunden, bisweilen eines Tages, sich selbst überlassen, damit alle Lösungen dieselbe Temperatur annehmen möchten. Erst dann wurde aus einer Burette die verdünnte Ammoniaklösung hinzugefügt, und zwar für alle Gläser die gleiche Quantität; die Lösungen wurden schnell umgerührt, gewogen, und gleich darauf unter die Glocke mit concentrirter Schwefelsäure gestellt.

Die Ammoniaklösung in der Burette enthielt pro CC. 1,80 Milligr. NH^3; das darin enthaltene Wasser wurde natürlich zum Lösungswasser in Rechnung gebracht. Dasselbe war der Fall mit dem Krystallwasser derjenigen Salze, welche wasserhaltig krystallisiren. Die angewandten Quantitäten Salz, welche überall wasserfrei angegeben sind, hingen von der Löslichkeit in kaltem Wasser ab.

Bei allen diesen Versuchen betrug die totale Quantität Wasser 50 Gramme, die Quantität des zugefügten NH^3 20 Milligramme.

Von mehreren Versuchen erwähne ich nur folgende. Das Wort *Verhältnifs* giebt die Zahl der Milligramme NH^3 an, welche mit 1 Grm. Wasser verdampften. Weil sowohl die Temperatur als die Zeitdauer, während welcher die Gläser unter der Glocke verweilten, bei den verschiedenen Versuchen verschieden waren, sind die Versuche derselben Reihe (mit demselben Salze) nur unter sich, nicht mit denen von anderen Reihen vergleichbar.

	I. *Kaliumchlorid.*			II. *Natriumchlorid.*		
Salz in Grammen	0	5	10	0	5	10
	Nach 44 Stunden:			Nach 24 Stunden:		
Verdampftes NH^3 in Milligr.	10,4	11,4	11,9	8,1	8,8	9,5
Verdampftes Wasser in Grammen	1,24	1,04	0,84	0,84	0,74	0,63
Verhältnifs	8,4	11,0	14,2	9,6	11,9	15,1

Digitized by Google

	III. *Baryumchlorid.*			IV. *Kaliumnitrat.*		
Salz in Grammen	0	5	10	0	5	10
	Nach 24 Stunden:			Nach 24 Stunden:		
Verdampftes NH^1 in Milligr.	8,7	9,8	10,2	9,5	10,0	10,8
Verdampftes Wasser in Grammen	0,90	0,87	0,73	1,07	0,98	0,98
Verhältnifs	9,7	11,3	14,0	8,9	10,2	11,0

	V. *Natriumnitrat.*				VI. *Baryumnitrat.*	
Salz in Grammen	0	5	10	20	0	3
	Nach 24 Stunden:				Nach 24 Stunden:	
Verdampftes NH^3 in Milligr.	9,5	10,3	11,0	11,9	10,5	12,2
Verdampftes Wasser in Grammen	1,07	1,03	0,98	0,98	1,22	1,21
Verhältnifs	8,9	10,0	11,2	12,1	8,6	10,1

	VII. *Kaliumsulphat.*			
Salz in Grammen	0	1	2	3
	Nach 48 Stunden:			
Verdampftes NH^3 in Milligr.	14,9	15,3	15,4	16,0
Verdampftes Wasser in Grammen	2,33	2,25	2,21	2,22
Verhältnifs	6,4	6,8	7,0	7,2

	VIII. *Natriumsulphat.*					
Salz in Grammen	0	1	2	3	4	5
	Nach 44 Stunden:					
Verdampftes NH^3 in Milligr.	13,5	13,9	14,0	14,0	14,7	15,2
Verdampftes Wasser in Grammen	1,95	1,94	1,85	1,84	1,83	1,83
Verhältnifs	6,9	7,2	7,6	7,6	8,0	8,3

Aus diesen Versuchen ergeben sich folgende Schlüsse:

1) Aus den untersuchten Salzlösungen verdampft in derselben Zeit um so weniger Wasser, je concentrirter die Lösung ist; — ein Resultat, das bei der kleineren Dampfspannung zu erwarten war.

Digitized by Google

2) Aus allen den angewandten Salzlösungen verdampft in derselben Zeit *mehr* NH^3 als aus reinem Wasser, sowohl in absoluter Quantität als im Verhältnifs zum verdampften Wasser. Das Verhältnifs zwischen verdampftem NH^3 und verdampftem Wasser nimmt bei allen Salzen zu mit wachsendem Salzgehalte der Lösung.

Schliefslich habe ich auch die Lösungen des *Strontium-* und des *Calciumchlorids* in dieser Hinsicht geprüft. Beide Salze vereinigen sich mit NH^3 zu bekannten Verbindungen. Ich fand, dafs aus diesen Lösungen in derselben Zeit, absolut genommen, *weniger* NH^3 verdampft als aus reinem Wasser. Das Wasser verdampft aber aus diesen Lösungen, insbesondere aus den concentrirteren, nur sehr langsam, und berechnet man wieder das Verhältnifs zwischen dem verdampften NH^3 und dem verdampften Wasser, so findet man auch hier, dafs dieses Verhältnifs mit zunehmendem Salzgehalte immer gröfser wird. Die folgenden Tabellen IX und X mögen dies zeigen.

Das Strontiumchlorid war erhalten durch zweimalige Krystallisation des käuflichen Salzes. Das Calciumchlorid war aus weifsem Marmor und reiner Salzsäure dargestellt; es war mittelst kaustischen Kalkes von Eisen befreit und der überschüssige Kalk durch Kohlensäure entfernt; bei Winterkälte wurde es in grofsen, wasserklaren Krystallen erhalten. Die beiden Salze gaben ganz klare Lösungen und reagirten auf Lackmus vollkommen neutral. Die angegebenen Quantitäten sind wieder die der wasserfreien Salze.

IX. *Strontiumchlorid.*

Salz in Grammen	0	5	10	20
		Nach 48 Stunden:		
Verdampftes NH^3 in Milligr.	14,9	13,5	13,0	12,6
Verdampftes Wasser in Grammen	2,44	2,08	1,75	1,56
Verhältnifs	6,1	6,5	7,4	8,1

X. *Calciumchlorid.*

Salz in Grammen	0	5	10	20
		Nach 44 Stunden:		
Verdampftes NH^3 in Milligr.	14,3	11,8	10,4	5,5
Verdampftes Wasser in Grammen	2,20	1,70	1,46	0,74
Verhältnifs	6,5	6,9	7,1	7,4

Das allgemeine Resultat der in diesem § mitgetheilten Versuche ist also, dafs die Anwesenheit von Salzen (wenigstens von den untersuchten) in der Lösung die Quantität des verdampften Ammoniaks *im Verhältnifs zum verdampften Wasser*, — sogar bei Salzen, welche mit NH^3 bekannte Verbindungen eingehen, — sowohl bei der gewöhnlichen als bei der Siedetemperatur *vermehrt*. Bei kleinen Quantitäten Ammoniak kann dieser Einfluſs unmerkbar seyn, niemals aber findet eine Abnahme dieses Verhältnisses statt.

Die auf Seite 471, 475 u. 478—480 erwähnten Folgerungen aus den Versuchen, in welchen Hinzufügung eines Chlorids oder eines Nitrats die Quantität des verdampften NH^3 *verminderte*, finden darin eine weitere Bestätigung.

Amsterdam, Mai 1875.

V. *Ueber die polarelektrische Attraction suspendirter Theilchen in Flüssigkeiten, über eine neue Art elektrischer Figuren und über ein merkwürdiges Rotationsphänomen; von W. Holtz.*

Bei Gelegenheit einer Untersuchung über die polarelektrische Wanderung suspendirter Theilchen in Flüssigkeiten machte ich eine Reihe von Beobachtungen, welche ich, soweit meine Ermittelungen reichen, für neu halten muſs,

Digitized by Google

und denen ich daher, obwohl ich ihren Zusammenhang noch nicht ganz verstehe, auch meine Versuche noch keineswegs als abgeschlossen betrachte, doch eine vorläufige Besprechung widmen möchte.

Eine Wanderung suspendirter Theilchen unter dem Einfluſs elektrischer Ströme ist längst constatirt und von Hrn. Prof. Quincke am ausführlichsten studirt worden. Ich fand nun aber, daſs in allen Fällen, wo eine solche Bewegung existirte, auch gleichzeitig ein Festkleben der betreffenden Stoffe an einem der Pole stattfand, und dies häufig mit solcher Präcision, daſs man ein hierauf gegründetes Instrument in gewissen Fällen sehr bequem als Elektroskop zur Erkennung der Polarität verwerthen könnte. Besonders auffallend ist die Eigenschaft des *Semen Lycopodii*, in isolirenden Flüssigkeiten und namentlich in Schwefeläther den negativen Pol mit einem dicken Wulst zu umgeben, während Schwefel, Zinnober, Schwefelantimon in derselben Flüssigkeit nur den positiven umkleiden. Zur Anstellung dieses Versuchs genügt sogar ein einfaches Medicingläschen, in welches man die betreffenden Stoffe thut, und durch dessen Stöpsel man einen Leiter (auch Halbleiter) steckt. Bringt man den letzteren, während man das Glas in der Hand hält, an den Conductor einer Elektrisirmaschine, so findet sofort die angedeutete Erscheinung statt. Geeigneter ist natürlich eine Durchbohrung des Bodens zur Einführung des zweiten Pols, oder ein offenes Gefäſs, in welches man beide Pole in symmetrischer Anordnung hinabsenkt. Gebraucht man nur isolirende Flüssigkeiten, wie ich es bei meinen Versuchen gethan, so kann man sich der Reibzeugmaschine so gut, wie der Influenzmaschine bedienen, da in diesem Falle die elektrische Quantität keine so wesentliche Rolle spielt. Uebrigens wandte ich bei meinen Versuchen nur offene, weite Gefäſse an, keine Capillarröhren, wie dies von Jürgensen und Quincke (Wiedemann, Galvanismus und Elektromagnetismus, S. 1079—1089) geschehen, und ebensowenig suchte ich den Querschnitt der

Digitized by Google

Flüssigkeit durch eingeschobene Thonstücke zu verringern. Dies mag der Grund seyn, weshalb sich sehr viele Substanzen, z. B. Sand, Braunstein, Zucker u. a., vollkommen indifferent zu verhalten schienen, so dafs bei diesen weder eine Wanderung, noch ein Ankleben an den Polen zu beobachten war. Bei allen diesen Stoffen aber, und dies war der Grund für die von mir getroffene Anordnung, zeigte sich eine andere interessante Erscheinung, zumal, wenn der Boden des Gefäfses recht gerade und glatt und nicht, wie es sich wohl zuweilen ereignete, durch eine aus der Luft condensirte Feuchtigkeitsschicht leitend geworden war. Die Theilchen bildeten nämlich unter dem Einfluſs der elektrischen Strömung Figuren, und zwar von sehr verschiedenem Charakter, je nach Gröfse und Structur der Körnchen und je nachdem ihre eigene oder die Leitungsfähigkeit der Flüssigkeit eine andere war. Figuren von aufserordentlicher Feinheit und Regelmäfsigkeit und ganz denjenigen Zeichnungen, welche Eisenfeilicht unter dem Einfluſs zweier Magnetpole bildet, entsprechend, erhielt ich mit fein pulverisirtem Braunstein, Smirgel und Eisenoxyd in Petroleum, Terpentinöl, Benzin und Schwefeläther. Noch feiner und aus vielfach in sich verschlungenen Linien bestehend waren die Figuren aus reducirtem Eisen, doch durfte von diesem wegen seiner grofsen Leitungsfähigkeit nur äufserst wenig genommen werden. Die Figuren, welche Holzfeilicht bildete, waren massiger und mehr baumartig verzweigt. Zinnober in Aether lieferte eine wolkenartige Bildung, welche wegen der ausgesprochenen Polarität des Zinnobers vorzugsweise den positiven Pol umgab. Zucker und Kleie bildeten meistens einzelne dicke, zusammenhängende Strähnen, durch welche die Elektricität alsdann wie durch eine leitende Brücke flofs.

In den wenigsten Fällen jedoch ist die Zeichnung während der elektrischen Bewegung eine stabile; es findet vielmehr meistens, ohne dafs sich der Charakter der Figur im Wesentlichen ändert, eine leicht zu unterscheidende

Digitized by Google

doppelte Bewegung statt; einmal nämlich eine hin und her rückende der einzelnen Theilchen innerhalb der durch sie gebildeten Linien, und diese Bewegung ist um so stärker, je gröfser die Theilchen und je glatter ihre Oberfläche ist; dann ein continuirliches Fortschieben ganzer Linien senkrecht zur Verbindungslinie der Pole, und zwar scheinbar mehr nach aufsen, wenn die elektrische Strömung eine stärkere, mehr nach innen, wenn sie eine schwächere ist. Diese letztere Bewegung aber wird manchmal einer rotirenden ähnlich, indem die zusammenhängenden Linien zuweilen zerreifsen und jeder Theil für sich den Pol, an welchem derselbe haftet, zu umkreisen strebt. Eine solche kreisförmige Bewegung findet aber in noch höherem Grade bei Zinnober, Schwefelantimon und einigen andern Stoffen, welche überhaupt gar keine zusammenhängenden Linien bilden, statt. Hier wird dieselbe durch ein eigenthümliches Zusammenballen und Fortrutschen einzelner Theile vermittelt.

Ganz besonders aber wird die kreisförmige Bewegung begünstigt, wenn man zum einen Pol einen Drahtring nimmt und in dessen Centrum den andern stellt. Durch diese Anordnung wird natürlich in jedem Falle die äufsere Form der Figuren geändert und zwar erhält man in den meisten Fällen, gleichviel, welche Polarität der centrale Leiter hat, Zeichnungen, welche in ihrem strahlenförmigen Gefüge den positiven Lichtenberg'schen Figuren ähnlich sehen. Bei denjenigen Stoffen jedoch, welche keine zusammenhängenden Linien bilden, wird die kreisförmige Bewegung nunmehr so sehr die vorherrschende, dafs die hierdurch entstehenden Zeichnungen vollkommen den negativen Lichtenberg'schen Figuren entsprechen.

Am schönsten habe ich ein derartiges Rotationsphänomen in einem Glase von 200^{mm} Höhe (zu den obigen Versuchen wurden sonst Glas- oder Porcellanschaalen gebraucht) und 100^{mm} Durchmesser beobachtet, welches aus vorzüglich isolirendem Glase bestand, einen vollkommen geraden und glatten Boden hatte und bisher noch zu kei-

Digitized by Google

nen andern Versuchen gebraucht war. In der Axe desselben wurde ein Draht befestigt, welcher mit seiner unteren Spitze die Mitte des Bodens berührte und, während das Gefäfs selbst auf einer leitenden und abgeleiteten Unterlage stand, durch einen Pol einer Influenzmaschine langsam und constant elektrisirt wurde. Während sich das Glas nun nach Art einer Leydner Flasche lud, begann sich sehr bald auf der Bodenfläche desselben, und von der Spitze in radialer Richtung auslaufend, eine kleine Walze oder Welle zu bilden, indem sich einzelne Theile des die Fläche bedeckenden Zinnobers in dem etwa 15^{mm} hoch stehenden Terpentinöl in eigenthümlicher Weise zusammenballten; und diese Welle rotirte nun bald in der einen, bald in der andern Richtung, wobei sie zugleich die Bodenfläche rein zu fegen schien. Zuweilen war die Erscheinung spurlos verschwunden, bis dann plötzlich an irgend einer Stelle eine neue Welle entstand, die bald kürzer, bald länger als die frühere war. Fand eine solche Welle irgendwo einen Widerstand, sey es in der Beschaffenheit des Glases, sey es in der gröfseren Anhäufung von Zinnobertheilchen, so kehrte sie in ihrer Bewegung entweder um, oder ging ruckweise über denselben fort. Zuweilen bildeten sich auch gleichzeitig mehrere Wellen an verschiedenen Stellen, und war ihre Bewegung alsdann eine entgegengerichtete, so gingen sie bei der Begegnung in einander auf. Zuweilen hatte die Bewegung aber auch einen andern Centralpunkt, als die Drahtspitze, doch fand dies nur auf Augenblicke statt. Hatte die Maschine während einiger Minuten langsam gewirkt, so war das Glas vollkommen geladen und ich konnte nun, indem ich dasselbe sich selbst überliefs, während der langsamen Entladung die Erscheinung von Neuem beobachten, und zwar noch weit besser als vorher, weil die elektrische Strömung eine ruhigere und die Rotation der Welle in Folge dessen eine viel stetigere war. So pflegte die Bewegung ohne neuen Antrieb wohl 5 bis 10 Minuten zu währen und am Ende derselben war alsdann die Bodenfläche mit einer

Digitized by Google

Reihe concentrischer Ringe bedeckt, deren Peripherie im Allgemeinen der Länge der vorhanden gewesenen Wellen entsprechen mochte. Es zeigte sich übrigens bald, dafs der Versuch in so vollkommener Weise nur bei sehr trockener Luft und vorzüglich isolirendem Glase, und mit Zinnober, welcher noch nicht längere Zeit mit dem Terpentinöl vermischt ist, gelingt. Auch scheint es wesentlich, dafs die Glasfläche nicht durch allzukräftiges Ueberströmen elektrischer Funken verletzt werde, sowie es überhaupt rathsam ist, die Maschine so langsam wie nur irgend möglich zu drehen.

Wenn ich auch anfangs in dieser Erscheinung das Grundphänomen für die Bildung der negativen elektrischen Figuren zu erblicken glaubte, so bin ich doch aus verschiedenen Gründen von dieser Ansicht zurückgekommen. Gleichwohl weifs ich keine erschöpfende Erklärung dafür anzugeben. Ist eine solche Welle etwa als ein Leiter zu betrachten, welcher sich gewissermaafsen in der Absicht bildet, die allmälige Ladung oder Entladung des Glases zu vermitteln? Hiefür würde der Umstand sprechen, dafs diese Bildung, wie es scheint, vornämlich bei besser leitenden Stoffen, wie es Zinnober, Schwefelantimon und Mennige sind, statt hat. Oder hat diese sonderbare Bewegung etwa einen tieferen Grund in einer bisher noch nicht bekannten Eigenschaft der Elektricität? Uebrigens kann man zuweilen bei der Bildung der negativen Lichtenberg'schen Figuren wirklich eine ähnliche Neigung zu einer rotirenden Bewegung beobachten, natürlich nur dann, wenn man die Entladung auf eine bereits bestäubte Platte übergehen läfst, und wenn ich nicht irre, auch nur dann, wenn der Leiter zur Platte geneigt ist. Aber diese Erscheinung ist so selten und mangelhaft, dafs sie leicht durch Zufälligkeiten bedingt seyn kann.

Thut man Kleie, Holzfeilicht, pulverisirten Zucker und ähnliche Stoffe von rauher Structur und halbleitender Beschaffenheit in ein Gläschen, dessen Boden und Stöpsel zur Einführung der Pole durchbohrt sind, und welches mit

Digitized by Google

Terpentinöl oder Petroleum gefüllt ist, so erhält man während der elektrischen Strömung die oben besprochenen baumartigen Gebilde in körperlicher Form und es ist interessant, ihr allmäliges Wachsthum zu beobachten. Der Strom geht am Ende durch eine solche Bildung, wie durch einen Leiter, und beim Aufhören desselben fällt diese in sich zusammen.

Eine andere, wie mir scheint, nicht uninteressante und noch nicht recht erklärliche Thatsache, welche sich bei Anstellung obiger Versuche dem Auge von selbst bietet, ist die kegelförmige Hebung der Flüssigkeit an den eingetauchten Drähten. Diese Hebung findet vorzugsweise am negativen Pole statt, ganz besonders aber ist dies in Schwefeläther der Fall. Im Uebrigen steht sie in innigem Zusammenhang mit der Polarität der suspendirten Theile, weil durch das Ankleben derselben an den einen die Hebung der Flüssigkeit am andern Pole begünstigt wird. Auch über diesen Gegenstand, worüber ich eine specielle Versuchsreihe angestellt, behalte ich mir eine ausführlichere Mittheilung vor.

A. W. Schade's Buchdruckerei (L. Schade) in Berlin, Stallschreiberstr. 47

Digitized by Google

ANNALEN
DER PHYSIK UND CHEMIE.
Band VII. ERGÄNZUNG. Stück 4.

I. *Einige Formveränderungen der Batterie und ihr Gebrauch bei Influenzmaschinen nebst Beschreibung einiger sehr schöner Entladungsphänomene; von W. Holtz.*

Die verhältnifsmäfsig geringe Elektricitätsentwicklung einer Reibzeugmaschine hat es bisher unmöglich gemacht, eine Batterie auch nur annähernd bis zu derjenigen Schlagweite zu laden, welche man unter günstigen Verhältnissen am Conductor derselben Maschine erhalten kann. Der Grund liegt einmal in der Büschelbildung zwischen den Elektroden selbst, welche unter gewissen Bedingungen um so leichter erfolgt, je langsamer die Dichtigkeit auf der sich ladenden Fläche steigt, während man andererseits durch Vergröfserung der Elektroden vielleicht die Büschelbildung verhindert, aber auch die Entstehung des Funkens erschwert[1]); ferner, und zwar namentlich in den

1) Der Einfluſs dieser Büschelbildung auf die Funkenlänge ist leicht einzusehen, da jeder Büschel, ob er nun an den Elektroden oder anderswo erfolgt, einen theilweisen Verlust der Ladung, also eine Erniedrigung ihrer Dichtigkeit zur Folge hat. Die fragliche Thatsache steht daher in durchaus keinem Widerspruch mit dem von Riefs (Riefs, Elektricitätslehre Bd. 1, S. 377) für kleinere Schlagweiten nachgewiesenen Gesetz, wonach die Funkenlänge nur eine Function der Dichtigkeit ist. Ganz anders dagegen verhält es sich mit der Erscheinung, daſs die Schlagweite innerhalb bestimmter Gränzen auch mit der Gröfse der sich entladenden Oberfläche wächst, also bei gleicher elektrischer Dichtigkeit auch noch durch die Elektricitätsmenge beeinflufst wird, eine Erscheinung, welche zwar längst bekannt, und sich nebenbei leicht durch Entfernung des grofsen Conductors von einer Reibzeug- oder der beiden kleinen Condensatoren

Digitized by Google

grofsen Verlusten, welche Leydener Flaschen wegen der unvollkommenen Isolirung ihrer Metallbekleidung zu erleiden pflegen, zumal diese Verluste mit zunehmender Dichtigkeit wachsen, so dafs von einem gewissen Punkte an die Maschine sie nicht mehr bewältigen kann. Ein dritter Umstand, welcher die Schlagweite begränzt, die sogenannten Selbstentladungen über den Rand oder durch die Masse des Glases, hat seinen Grund nicht in der Maschine, sondern allein in der Construction der Flaschen.

Nun ist zwar bekannt, dafs sich einerseits durch entsprechende Verkürzung der Belegungen die elektrischen Verluste, sowohl diejenigen, welche durch Ausströmung entstehen, als diejenigen, welche in Form von Funken über die Glaswand erfolgen, verringern, andererseits durch Wahl hinreichend starker Flaschen die Entladungen durch ihre eigene Masse verhindern lassen. Ebenso bekannt ist es, dafs man durch Anwendung dieser Mittel, welche selbstverständlich eine Schwächung der quantitativen Wirkung zur Folge haben, auch bei der Reibzeugmaschine eine gröfsere Schlagweite erhalten kann. Gleichwohl sind dieselben, wie Jedermann weifs, bisher nur in sehr beschränktem Maafse benutzt worden, was wohl seinen Grund darin hat, dafs trotz ihrer Anwendung die Verluste bei hoher Spannung immer noch bedeutend genug bleiben, um das Laden der Batterie bei einer wenig er-

von einer Influenzmaschine beweisen läfst, bisher aber, soviel ich weifs, noch keine Erklärung gefunden hat. Auch wüfste ich nicht, wie dieser sonderbare Einfluſs der Quantität auf andere Weise als durch Annahme einer successiven Funkenbildung nach Analogie der von Faraday (*Exper. research.* 1437) für die Bildung der einzelnen Büschelfäden aufgestellten Hypothese zu verstehen ist, wonach also der Funke gleichsam aus einer Büschelentladung hervorgehend, um die während seiner Weiterbilduug entstehenden Verluste zu ersetzen, zu seiner Vollendung nothwendig einer bestimmten Elektricitätsmenge bedürfte. Seit es bewiesen, dafs durch die Wirkung eines äufserst schwachen Funkens die betroffene Luftstrecke für den weiteren Verlauf einer Entladung zu einem Leiter werden kann, scheint mir diese Annahme übrigens durchaus keine Schwierigkeit zu bieten.

Digitized by Google

giebigen Elektricitätsquelle zu einer ebenso unbequemen als unzuverlässigen Aufgabe zu machen.

Dasselbe gilt von einer anderen Veränderung der Batterie, welche, wenn auch ursprünglich in anderer Absicht vorgenommen, ohne Zweifel wohl schon häufiger für den Zweck einer gröfseren Schlagweite gebraucht und doch so wenig in Aufnahme gekommen ist, dafs sie in Lehrbüchern der Physik kaum noch der Erwähnung gewürdigt wird. Ich meine die Franklin'sche Batterie, auch Cascadenbatterie oder Flaschensäule genannt, in welcher nur eine Flasche ihre Elektricität direct vom Conductor der Maschine erhält, während der Knopf jeder folgenden mit der äufseren Belegung der vorhergehenden verbunden und die äufsere Belegung der letzten abgeleitet ist. Um die Verbindungen abzukürzen, mochte es zuweilen bequem erscheinen, den Flaschen, welche sämmtlich mit Ausnahme der letzten zu isoliren sind, hierbei eine stufenförmige, einer Cascade ähnliche Aufstellung zu geben. Nothwendig ist dieselbe natürlich in keinem Falle. In Folge der innern Anordnung geschieht es nun, dafs sich die Spannungsdifferenz, deren die Maschine fähig ist, hier auf eine grofse Zahl von Flaschen vertheilt, so dafs diejenige zwischen den Belegungen jeder einzelnen Flasche kleiner und Ausströmungen oder Randentladungen selten sind. Es wird sich daher mittelst einer solchen Batterie, mag die Quantität der Ladung auch eine sehr geringe seyn (sie ist in jedem Falle geringer als diejenige, welche eine einzelne Flasche für sich geladen bei derselben Spannung annehmen würde, und zwar um so mehr, je gröfser die Zahl der Flaschen und ihre Glasstärke ist), doch eine verhältnifsmäfsig grofse Schlagweite erreichen lassen, und dies ist auch, vom theoretischen Interesse abgesehen, ihr wesentlichster Zweck[1]). Genügt die Ladung

1) Die Theorie und die Wirkungen der Franklin'schen Batterie sind, wenn ich nicht irre, zuletzt von Dove, Riefs und Knochenhauer (Pogg. Ann. Bd. 64, S. 81; Bd. 80, S. 349—363; Bd. 79, S. 354) ausführlicher studirt worden. Ihren Vorzug zur Gewinnung gröfserer

Digitized by Google

einer Flasche nicht, so hätte man in der Säule nach Analogie der galvanischen, jedes einzelne Element durch eine gröfsere Zahl von Flaschen, welche unter sich nach gebräuchlicher Manier verbunden sind, zu ersetzen. Diese letzteren Verbindungen sind indessen nicht für alle Glieder der Kette nothwendig, vielmehr genügt es, wenn sich die inneren Belegungen des ersten und die äufseren Belegungen des letzten Gliedes in Leitung befinden. Ich weifs nicht ob eine derartige Anordnung bereits vor mir von anderer Seite ausgeführt und in ihren Wirkungen geprüft ist; sie liegt indessen so sehr in der Natur der Sache, dafs ich glaube, dieses annehmen zu dürfen.

Eine dritte Aenderung der Batterie, oder richtiger gesagt, veränderte Benutzung derselben, ist jedoch bei der Reibzeugmaschine wohl noch niemals oder wenigstens nicht für einen bestimmten Zweck in Gebrauch genommen, obwohl sich hiermit gleichfalls eine höhere Schlagweite gewinnen läfst. Ich meine die gleichzeitige Isolirung der beiden Pole und der mit ihnen verbundenen Batterieflächen. Dafs nun solche Isolirung bisher überhaupt so wenig zur Geltung gelangt ist, daran meine ich, hat ausschliefslich die einseitige und für den gedachten Zweck wenig verwendbare Construction dieser Maschine Schuld[1]). Denn

Schlagweiten in Folge der wegen der Spannungsvertheilung geringeren Verluste finde ich zwar weder in diesen Arbeiten noch sonst besonders hervorgehoben, bin aber durchaus nicht im Zweifel, dafs die Batterie nicht bereits häufiger in der gedachten Absicht und aus dem gedachten Grunde zur Anwendung gelangt ist.

1) Ich glaube, dafs die Darstellung der Reibzeugmaschine in manchen Lehrbüchern der Physik die Vorstellung erweckt, als ob nothwendig einer der Pole abgeleitet werden müsse, während dies doch nicht nothwendiger ist, als bei irgend einer anderen Elektricitätsquelle, so lange es sich nur um die Spannungsdifferenz und nicht um die Spannung an einem einzelnen Pole handelt. Wunderbar ist es aber, dafs die verschiedenen Umgestalter der Reibzeugmaschine, obwohl sie dieselbe sonst nach allen Richtungen verändert, nicht auch nach *der* Seite einmal ihre Abänderungen getroffen haben, dafs man bequem und in geeigneter Weise gleichzeitig beide Pole isoliren könne. Erst nach Entstehung der Influenzmaschine, in neuerer Zeit, hat Hr. Prof.

Digitized by Google

abgesehen davon, dafs manche Phänomene, wie z. B. die Lichterscheinungen in der Luft und in Geifsler'schen Röhren, je nachdem man beide Pole, oder nur einen isolirt, eine veränderte Gestalt annehmen, so läfst sich doch auch unschwer ohne Rechnung einsehen, dafs die Spannungsdifferenz zwischen den Elektroden, welche in erster Linie die Schlagweite bestimmt, bei Isolirung beider Pole am gröfsesten ist und zwar nicht blofs wegen der erhöhten Influenzwirkung der einen auf die andere, sondern auch, weil bei der verringerten Spannung auf denjenigen mit den Elektroden verbundenen Metallflächen, welche einander entfernter sind, eine Ausströmung weniger Statt haben kann. Schon lange vor Entstehung der Influenzmaschine hatte ich bei meiner Reibzeugmaschine in vorliegender Absicht verschiedene Anordnungen getroffen und sie sind es, denen die symmetrische Construction der ersteren namentlich ihren Ursprung verdankt. Andrerseits räume ich zwar ein, dafs das Auftreten von freier Elektricität an beiden Polen für manche Untersuchung störend ist, auch wohl die mathematische Behandlung mancher Probleme bis zu einem gewissen Grade erschweren mag.

Alle die besprochenen Mittel nun zur Vergröfserung der Schlagweite, welche bei der Reibzeugmaschine so wenig Anklang gefunden, sind bei der Influenzmaschine wegen ihrer gröfseren Ergiebigkeit und symmetrischen Bauart so natürlich und gleichzeitig so nothwendig geworden, dafs Derjenige eines grofsen Theils ihrer schönsten Wirkungen entbehren würde, welcher sich hierbei einer Batterie nach Art der bisher gebräuchlichen oder in

Kundt es mit Glück versucht, auch der Reibzeugmaschine eine der ersteren analoge Form zu geben (Pogg. Ann. Bd. 135, S. 484). Aber diese Construction verfolgte nebenbei ein anderes Ziel, und ist der Apparat auch im eigentlichen Sinne keine Reibzeugmaschine zu nennen. Dafs übrigens beide Pole einer solchen recht gut abgeleitet werden können, ohne die elektromotorische Kraft ganz zu vernichten, darauf machte bereits Hr. Prof. Poggendorff bei einer anderen Gelegenheit aufmerksam (Pogg. Ann. Bd. 134, S. 603).

Digitized by Google

der bisher gebräuchlichen Manier bedienen wollte. Bevor ich indessen eine solche, wie sie mir besonders zweckmäfsig scheint, beschreibe, mögen noch einige Worte über ihre historische Entwicklung Platz finden.

Eine einzelne Leydner Flasche ist in ihrer Verbindung mit zwei gleich hoch liegenden Punkten so unbequem und so schwer vor Ausströmung zu bewahren, dafs man sich über eine verhältnifsmäfsig geringe Schlagweite oder das Auftreten einer ungleichen Spannung an beiden Polen nicht zu wundern braucht[1]). Es war daher keine Spielerei, wenn ich schon den ersten Maschinen, welche versandt wurden, eine kleine in geeigneter Weise mit Stanniol belegte Glasröhre (Fig. 1, Taf. VI) hinzufügte, welche durch einfaches Auflegen auf die beiden Hauptconductoren nach Art eines Condensators wirkte; es war vielmehr der erste Schritt bei der symmetrisch gebauten Maschine auch die Anwendung der Leydner Flasche in ein symmetrisches Gewand zu kleiden. Den zweiten ungleich wichtigeren Schritt that Hr. Prof. Poggendorff, indem er die einfache Röhrenflasche mit zwei Belegungen in eine doppelte Röhrenflasche mit vier Belegungen umwandelte, wodurch zugleich, aber in erneuter Form, das Princip der Cascadenbatterie bei der Influenzmaschine zum ersten Mal zur Anwendung gelangte. Denn wenn ich mich auch erinnere, mehr oder weniger gleichzeitig und jedenfalls, bevor der betreffende Sitzungsbericht der Berliner Akademie vom

1) Ich weifs wohl, dafs auch ohne Anwendung einer Flasche die Spannung an den Polen keine absolut gleiche ist. Nach Poggendorff waltet meistens die positive Elektricität vor (Pogg. Ann. Bd. 184, S. 603) und dies stimmt auch mit meiner Beobachtung überein, so lange sich kein allzugrofser Widerstand im Schliefsungsbogen befindet. Mit Zunahme desselben, also überhaupt mit Zunahme der Spannung, scheint dagegen die negative Elektricität, wegen des leichteren Ausströmens der positiven aus den Kanten der Papierflächen, zumal der rechtsgelegenen, das Uebergewicht zu erlangen. Von einer gewissen Schlagweite an hat die Elektricität des linken Pols fast immer das Uebergewicht, weil die rechte Papierfläche eben der Holzplatte ein wenig zu nahe liegt.

Digitized by Google

18. Februar 1867 zur Oeffentlichkeit gelangte, ganz ähnliche Röhren nach eigener Ueberlegung construirt zu haben, so weifs ich doch ebensogut, dafs Hr. Prof. Poggendorff, als ich demselben hiervon Mittheilung machte, mir bereits eine eben solche zeigte. So wenig ich daher die Autorschaft dieser Vervollkommnung für mich beanspruchen kann, so glaube ich doch andererseits der Erste gewesen zu seyn, welcher dasselbe Princip der Spannungsvertheilung in der neuen symmetrischen Form, wie es zuerst in der doppelten Röhrenflasche erscheint, wieder auf zwei von einander getrennte, besonders geformte Gläser übertragen und bei der Influenzmaschine in Vorschlag gebracht hat. Ich erwähnte diese Gläser (Fig. 2, Taf. VI), welche ich Condensatoren nannte, und deren äufsere Belegungen unter sich, deren innere mit den respectiven Conductoren zu verbinden waren, zuerst im Jahre 1866 im Februarheft dieser Annalen und bemerkte zugleich, dafs die für die Schichtung in Geifsler'schen Röhren erforderliche nasse Schnur auch zwischen den äufseren Belegungen eingeschaltet werden könne. An den Condensatoren, deren Höhe insofern eine gegebene war, als sie unterhalb der Pole placirt werden sollten, wurde nun zunächst festgestellt, wie grofs der unbelegte Theil seyn müsse, um bei jeder Maschine das Maximum der Schlagweite zu erhalten, indem ich die Metallbekleidung nach und nach so lange verkürzte, als hierdurch bei günstigster Gröfse der Elektroden noch eine Verlängerung der Funken zu erzielen war. Durch andere Versuche wurde die Glasdicke bestimmt, welche die Flaschen haben mufsten, um nicht durchbrochen zu werden [1]).

1) Der verhältnifsmäfsig seltene Gebrauch grofser Batterien in neuerer Zeit hat ein Phänomen in Vergessenheit gerathen lassen, dessen zuerst Priestley gedenkt (Priestley, Geschichte der Elektricität S. 423) und das bisher noch keine genügende Erklärung gefunden. Es handelt sich nämlich um die auffallende Erscheinung, dafs bei ein und derselben Entladung nicht nur mehrere Flaschen zugleich, sondern auch einzelne an mehreren Punkten durchbrochen werden können. Ich weifs mir nun nicht vorzustellen, wie die Entladung,

Digitized by Google

Es lag nahe die bisher gewonnenen Erfahrungen auch für die Umformung der Batterie zu verwerthen. Es liefs sich mit leichter Mühe eine Doppelbatterie arrangiren, welche aus Flaschen mit so kurzer Metallbekleidung und von solcher Glasdicke bestand, dafs damit dieselbe Funkenlänge als mit jenen Condensatoren erreicht werden konnte. Gleichwohl mochte ich einen solchen Apparat noch immer nicht in Vorschlag bringen, weil er bei der gebräuchlichen Glashöhe der Leydner Flaschen eine allzu kleine metallische Oberfläche hatte und mir dem Hauptzweck einer Batterie, der Anhäufung grofser Elektricitätsmenge nicht recht zu entsprechen schien. Erst in letzter Zeit, nachdem sich verschiedene andere Versuche, die Form der Flaschen zu verbessern, wie z. B. durch einen nach innen hinunter gebogenen Rand, wenn auch als wirksam, so doch in der Ausführung als unpractisch erwiesen hatten, ging ich daran, die Gläser weit über das gewöhnliche Maafs zu verlängern[1]), so dafs bei gleicher Basis die wirksame Fläche etwa die dreifache der früher von mir angewandten ist, und in dieser Gestalt dürfte die Batterie für viele Versuche zu empfehlen seyn.

Fig. 3, Taf. VI zeigt den Apparat, welcher aus 8 Flaschen besteht, von denen je vier eine gesonderte Unterlage haben. Diese ruht auf Hartgummifüfsen von 20—25^{mm}

wenn sie gleichzeitig von derselben Metallfläche ausginge, sich in dieser Weise spalten sollte. Es scheint mir vielmehr nur zweierlei möglich: Entweder entstehen die verschiedenen Durchbrüche unter dem Einflufs derjenigen Elektricitäten, welche besonders tief in die Glasmasse eingedrungen sind, oder was wahrscheinlicher, unter dem Einflufs einer sogenannten alternirenden Entladung, insofern ja nach Riefs (Riefs, Elektricitätslehre Bd. 2, S. 464) die Schlagweite der bewegten Elektricität eine gröfsere, als die der ruhenden ist. In beiden Fällen jedoch bleiben immerhin noch Punkte übrig, welche der Erklärung bedürfen.

1) Es ist leicht einzusehen, dafs bei der bedeutenden Ausdehnung des unbelegten Theils eine Vergröfserung in die Weite weniger zweckentsprechend ist, zumal durch eine solche zugleich der Umfang der beiden oberen Metallränder, eine Quelle fortwährender elektrischer Verluste, ein gröfserer würde.

Digitized by Google

Höhe und ist eine polirte Holzplatte von quadratischer oder runder Form mit überall wohl verrundeten Ecken oder Kanten. Sie ward aus zwei Brettern und einem Kranze dünnen Fourniers verleimt, nachdem in diesen zuvor eine Blechscheibe von entsprechender Form gelegt und das obere Brett mit kreisförmigen, nach oben verrundeten Oeffnungen versehen war, welche mit Leder ausgefüttert den Gläsern noch einen leichten Durchgang gewähren. Diese Anordnung ist zweckmäfsig, um den letzteren einen sicheren Halt und zugleich eine gut leitende Verbindung zu geben, doch mufs das Blech, um Ausströmungen zu vermeiden, bedeutend kleiner als die Holzplatte seyn.

In der Mitte der Unterlage erhebt sich ein runder Stab aus Hartgummi, in dessen oberes Ende ein starker Messingdraht geschraubt ist, welcher in einiger Entfernung von jenem in eine gröfsere Kugel endigt. Da sich die Flaschen sammt der Unterlage am besten an dieser Kugel tragen lassen, so mufs die Befestigung der einzelnen Theile eine solche seyn, dafs sie diesem Zwecke entspricht. Um Ausströmungen zu vermeiden, ist das oberste Ende des Hartgummistabes sowohl nach aufsen als nach innen verrundet, so dafs das Metall gleichsam aus einer Höhlung dieses Isolators hervortritt, an seinen Gewindetheilen aber selbstredend nirgend sichtbar seyn darf. In den Draht sind nun rechtwinklig zu diesem und rechtwinklig zu einander vier Messingrohre eingesetzt, deren freie Enden in Kugeln endigen. Ihre Länge und Stellung wird insofern durch die Gröfse und Lage der Oeffnungen in der Holzplatte bestimmt, als sich die Kugeln über den Centren dieser Oeffnungen befinden müssen. Die Länge des Hartgummistabes aber ist durch die Höhe der Gläser gegeben, sowie dadurch, dafs die Metallrohre, um sie den äufseren Belegungen möglichst fern zu halten, noch ein gut Stück vom Glasrande abstehen müssen. Ueberzüge aus Hartgummi haben sich zum Schutz dieser Röhren nicht bewährt, da an den Enden eines solchen

Digitized by Google

Ueberzugs die elektrische Büschelbildung nur noch intensiver ist.

Die Gläser, wenn auch der Hauptsache nach cylindrisch, sind doch nach ihrem unteren Ende hin eine Wenigkeit enger, um die Stücke, welche zur Haltung des mittleren Leiters dienen, bequem befestigen zu können. Hr. Mechaniker Borchardt verwendet hierzu mit Vortheil Scheiben aus Kork, sey es aus einem Stück, sey es zusammengesetzt, welche sich bei exacter Adjustirung vermöge ihrer Elasticität in der einmal gegebenen Lage behaupten. Die eine dieser Scheiben sitzt unweit der Bodenfläche, die andere unmittelbar über der inneren Belegung, welche etwas verkürzt ist, um den Rand der Scheibe durch die äufsere Belegung verdecken zu lassen. Ein Fehler wäre es, wenn man die innere Belegung etwa über die Scheibe hinausragen liefse, weil gerade die rückwirkende Kraft dieses sich zugleich mit der Metallfläche ladenden Halbleiters die Ausströmung aus jener nicht unwesentlich vermindert[1]). Der mittlere Leiter ist eine Messingröhre, deren oberer Theil in eine Halbkugel verläuft (Fig. 2, Taf. VI), am Ende der letzteren aber noch mit einem kleinen Stahlstift von etwa 2^{mm} Dicke versehen ist. Dieser Stift ist für eine entsprechende Oeffnung in der oberhalb des Glases schwebenden Kugel bestimmt. Damit aber der Leiter, welcher in den Korkscheiben leicht verschiebbar, bequem in diese Oeffnung gebracht werden könne, und Halbkugel und Kugel sich immer möglichst innig berühren, ist der untere Theil der Röhre mit einer kurzen, aber ziemlich kräftigen Spiralfeder bedacht, welche auf eine die Stanniolfläche schützende Blechscheibe drückt. Diese Vorkehrung, mag sie auch complicirt erscheinen,

1) Noch verkehrter ist es, wie das bei käuflichen Flaschen häufig, einen solchen Halbleiter an den Rand des Glases zu verlegen, weil die Elektricität nun um so leichter von der Scheibe nach der äufseren Belegung wandert, als der trennende Raum um die Hälfte kürzer geworden ist. An dieser Stelle müfste die Scheibe nothwendig aus einem guten Isolator bestehen, wozu Hartgummi natürlich der geeignetste ist. Eine Korkscheibe im Innern ist indessen vorzuziehen.

Digitized by Google

erfüllt den doppelten Zweck, dafs die Flaschen bei ihrer aufsergewöhnlichen Höhe noch eine obere Stütze finden, und dafs man sie, wie es für manche Versuche wünschenswerth, nach Belieben aus- und einschalten kann. Damit im letzteren Falle an den frei werdenden Oeffnungen keine Verluste entstehen, ist es nöthig, dieselben möglichst klein zu wählen[1]).

Gutes Glas braucht nicht lackirt zu werden, wenn es nicht aus irgend welchen Gründen seine Ladung vorzugsweise lange behalten soll. Das Lackiren guter Gläser hat vielmehr den Nachtheil, dafs es die Ausströmung, sowie die Selbstentladungen, sowohl über den Glasrand, als durch die Glasmasse, in einem gewissen Grade begünstigt, vermuthlich, weil wegen der allerdings vollkommneren Isolirung der Uebergang zwischen den entgegengesetzt elektrischen Punkten ein schrofferer ist. Schlechte Gläser, wozu namentlich die bläulichen und leicht schmelzbaren, aber auch die schwerer schmelzbaren weifsen mancher Glashütten gehören, mögen der Lackschicht nicht gut entbehren können, aber solche Gläser würden besser gar nicht zu elektrischen Apparaten verwendet, weil gerade bei ihnen unter dem Einflufs der Feuchtigkeit die Lackschicht am leichtesten unbrauchbar

1) Es ist klar, dafs mit zunehmender Gröfse der Oeffnung, der Winkel zwischen Lochfläche und Kugelfläche kleiner, die entstehende Kante also schärfer wird. Eine Abrundung der letzteren ist nur innerhalb gewisser Gränzen von Nutzen. Alle Verbindungsstücke aber müssen bei hoher Spannung eine bedeutende Stärke haben, wenn an ihrer eigenen Rundung keine Büschelbildung statt haben soll. Aus dem Gesagten ergiebt sich, dafs solche Verbindungsstücke nicht in ihrer ganzen Dicke in eine Kugel münden dürfen, wenn nicht nach Fortnahme jener nun an der freiwerdenden Oeffnung eine elektrische Ausströmung eintreten soll. Es bleibt daher für wandelbare Verbindungen unter den gedachten Verhältnissen kein anderes Mittel als dasjenige, welches bereits seit Jahren nach meiner Angabe bei den erwähnten Condensatoren ausgeführt wird, nämlich den betreffenden Leiter mit einem halbkugelförmigen Ende und einem kleinen Stahlzapfen zu versehen, welcher in eine eben so kleine Oeffnung der fraglichen Kugel mündet.

Digitized by Google

wird. Man braucht nur einige Glasstücke von verschiedener Färbung, welche man vorher lackirt hat, zu gleicher Zeit in Wasser zu legen, um zu sehen, wie sich schon nach 24 Stunden, oft schon früher, die Lackschicht allmälig vom Glase trennt und zwar bei denjenigen Stücken am schnellsten, deren Masse am meisten hygroskopisch erscheint[1]). Eine besondere Geschicklichkeit beim Anfertigen der Flaschen erfordert das Aufkleben der Stanniolbelegung. Dasselbe darf zur Zeit immer nur mit kleinen Stücken geschehen und setzt eine sehr verdünnte Leimlösung voraus, wenn man die leicht entstehenden Luftblasen vermeiden will, und das Metall die Glasfläche möglichst innig berühren soll[2]). Man pflegte bisher, ich weifs nicht aus welchem Grunde, die äufsere Metallbekleidung unlackirt zu lassen, vielleicht damit sich nicht auf

1) Dies einfache, voraussichtlich auf Capillarattraction beruhende Mittel, einen Lacküberzug, der rissig oder durch elektrische Einwirkung unbrauchbar geworden, von Glas, Hartgummi oder anderen Körpern zu trennen, möchte ich namentlich für die rotirenden Scheiben der Influenzmaschine, falls solche eines neuen Ueberzugs bedürfen sollten, in Vorschlag bringen.

2) Nach meiner Ansicht mufs die trennende Leimschicht und ihre allmälige Veränderung überhaupt eine bedeutendere Rolle spielen, als man derselben zuzuschreiben pflegt. Ich kann nicht glauben, dafs sie fortgesetzt dem Einflufs der Ladung sowohl als der Entladung unterworfen, im Laufe der Zeit unverändert dieselbe Leitungsfähigkeit behalten sollte. Es wäre möglich, dafs die letztere durch Ablagerung von Kohlenstoff in Folge elektrochemischer Zersetzung oder durch Hineinmischung losgelöster Metalltheilchen eine bessere würde; allein wahrscheinlicher wird sie, weil der Leim allmälig immer trockener wird, und weil sich bei der Zersetzung desselben auch gleichzeitig Gase entwickeln müssen, eine geringere. Nun erwähnt zwar Hr. Prof. Riefs (Riefs, Elektricitätslehre Bd. 1, S. 360) diese hemmende Schicht bei Betrachtung des Rückstandes der Ladung, welcher um so kleiner sey, je inniger sich Glas und Metall berühren; allein sollte ihr Widerstand nicht auch auf die Funkenbildung selbst, ob diese nun in Partialentladungen oder Alternationen erfolge, von wesentlichem Einflufs sein? Es wäre wohl nicht uninteressant, einzelne der auf diese Funkenbildung bezüglichen Versuche anstatt der gewöhnlichen Leimschicht mit einer anderen von gröfserem Widerstande zu wiederholen.

Digitized by Google

der Lackschicht durch Influenz aus der Luft Elektricität ansammeln und die Entladung in irgend einer Weise beeinflussen möchte. Aber dann dürfte man auch den Conductor einer Reibzeugmaschine und, streng genommen, auch die Messingtheile einer Batterie nicht lackiren. Ich habe niemals von einer dünnen Lackschicht, die sich ja nicht auf den Boden der Flaschen zu erstrecken braucht, irgend einen nachtheiligen Einfluſs gespürt, wohl aber dient dieselbe, den Stanniol gegen äuſsere Verletzungen widerstandsfähiger zu machen und den Glanz der polirten Metallfläche zu erhalten.

Der auf der Hartgummisäule sitzende Messingdraht bildet gleichsam den Sammelpunkt für die inneren Belegungen. Die Kugel desselben ist daher, um sie zur Aufnahme von Leitungen möglichst geschickt zu machen, nach vier verschiedenen Seiten durchbohrt und oben mit einer kugelförmigen Klemmschraube versehen. Um für die äuſseren Belegungen einen eben solchen Sammelpunkt zu gewinnen, ist zunächst ein kleines, sehr kurzes Messingsäulchen an geeigneter Stelle in die Holzplatte geschraubt, und zwar so tief, daſs es mit der eingelegten Blechscheibe in gut leitender Verbindung steht. Das sichtbare halbrunde Ende ist seitlich durchbohrt und oben mit einer Klemmschraube nach Art der bereits erwähnten bedacht. Um diese Vorrichtung indessen zur Aufnahme von Leitungen noch geschickter zu machen, steckt in der Oeffnung des Säulchens ein Draht von 4—5^{mm} Dicke, welcher unmittelbar über der Holzfläche hinlaufend, dort wo er dieselbe verläſst, eine Kugel trägt, welche nach allen Richtungen durchbohrt und gleichfalls an entsprechender Stelle mit einer kugelförmigen Schraube ausgerüstet ist. Zu bemerken wäre noch, daſs diejenigen Kugeln, welche Klemmschrauben haben, keine Hohlkugeln seyn dürfen, während dies für die übrigen der gröſseren Leichtigkeit wegen vorzuziehen ist, und daſs die Gewinde in jedem Falle soweit, um eben nur einen Druck auszuüben, verkürzt werden müssen.

Digitized by Google

Zur Verbindung der beiden Batterietheile unter sich oder mit den Polen der Maschine sind, für höhere Spannung wenigstens, besondere Leitungen erforderlich, in Form gebogener und gerader Röhren, mit kürzeren oder längeren Stahlzapfen versehen. Ihre verschiedene Benutzung soll später ausführlicher zur Sprache kommen.

Soll nun mit einer solchen Batterie in jedem Falle das Maximum der Schlagweite, d. h. dieselbe Funkenlänge wie mit den Condensatoren erreicht werden, so glaube ich nach Hrn. Borchardt's und meinen eigenen Erfahrungen für die einzelnen Theile folgende Dimensionen vorschlagen zu dürfen[1]).

Gröfse der rotirenden Scheibe	300	400	500mm
Höhe der Gläser	300	350	400mm
Länge des unbelegten Theils	150	190	230mm
Innere Glasweite	90	115	140mm
Glasdicke	2	$2\frac{1}{2}$	3mm
Weite sämmtlicher Röhren	9	11	13mm
Abstand der horizontalen vom Glasrande	35	50	65mm
Durchmesser der kleineren Kugeln	16	19	22mm

Die Batterie kann nur in zwei Formen zur Anwendung gelangen; nämlich:

1) Als einfache Batterie nach gebräuchlicher Manier; und dies ist die geeignetste Form, wenn es sich vorzugsweise um die Anhäufung gröfserer Elektricitätsmengen handelt. Man stellt sie dann am bequemsten entweder rechts oder links von der Maschine auf, indem man einerseits *a* mit *b* (Fig. 3, Taf. VI), andererseits *c* mit *d* durch gerade Leitungen (Fig. 5, Taf. VI) verbindet. Müssen zur Erzielung einer gröfseren Spannungsdifferenz oder aus sonst einem Grunde beide Pole isolirt seyn, so bringt man am besten eine bogenförmige Leitung (Fig. 6, Taf. VI)

1) Die Capacität der verschiedenen Apparate weicht nicht bedeutend von einander ab, da bei den gröfseren auch die Glasdicke eine gröfsere ist. Die quantitative Leistung wird also annähernd dieselbe seyn.

Digitized by Google

zwischen dem ferneren Conductor und den inneren Belegungen und eine ähnliche kleinere (Fig. 7, Taf. VI) zwischen dem näheren Conductor und den äufseren Belegungen an, von welchen beiden natürlich die erstere demjenigen Pol, über welchen sie hinwegführt, möglichst fern bleiben mufs. Darf hingegen die Aufsenfläche der Batterie abgeleitet seyn, so ist es einfacher, die Innenfläche jedesmal mit dem näheren Conductor zu verbinden, und die andere Verbindung aus einem beliebigen Draht bestehen zu lassen, welcher, weil seine Isolirung überflüssig, entweder um die Maschine herum oder unter den Tisch hindurch der Batterie wieder zugeführt wird. Ist endlich aus irgend einem Grunde die vollkommene Ableitung dieser Verbindung nothwendig, so genügt es bekanntlich bei der Influenzmaschine nicht, dieselbe nur bis auf den Tisch oder den Fufsboden des Zimmers reichen zu lassen, sie mufs vielmehr, sey es durch die Gas- oder Wasserleitung, sey es auf andere Weise bis auf den Erdboden fortgesetzt werden. Zu beachten ist noch, dafs man die Batterie in dieser Form, zumal wenn ein Pol abgeleitet ist, höchstens bis zur Hälfte derjenigen Schlagweite, welche sich mit den Condensatoren erreichen läfst, gebrauchen darf, wenn man nicht Gefahr laufen will, einen Theil der Flaschen durch Selbstentladungen zu verlieren.

2) Als Doppelbatterie nach Analogie der Poggendorff'schen Röhrenflasche oder der Condensatoren, und in solcher Form ist sie vorzugsweise, wenn es sich um die Erreichung gröfserer Schlagweiten handelt, zu gebrauchen. Man stellt sie in diesem Falle am bequemsten hinter der Maschine auf, indem man einmal *c* und *d*, dann *r* mit dem einen und *b* mit dem anderen Pol der Maschine verbindet. Das Letztere geschieht durch zwei gleiche bogenförmige Röhren (Fig. 6, Taf. VI), welche den Glasscheiben, über welche sie hinweggehen, möglichst fern bleiben müssen. Sollte die Batterie in ihren getrennten Theilen zu beiden Seiten der Maschine placirt werden, so müfste die Verbindung *cd* eine verhältnifsmäfsig lange

Digitized by Google

seyn, was allerdings, wie ich gleich zeigen werde, in den meisten Fällen keine Schwierigkeit hat. So lange nämlich beide Pole isolirt bleiben, ist die Isolirung der Aufsenflächen, weil auf derselben keine freie Elektricität auftritt, vollkommen überflüssig. Die Verbindung *cd* kann daher auch aus einem beliebigen Drahtstück bestehen, das in beliebiger Weise um die Maschine herumgeführt wird. Anders dagegen ist es bei der Ableitung eines Pols, wodurch gewissermafsen die freie Elektricität aus ihrer symmetrischen Anordnung verschoben wird[1]). Auch auf den Aufsenflächen erscheint jetzt die eine oder die andere in ungebundener Form und im Interesse der Funkenlänge ist es nöthig, dafs sie erhalten bleibt[2]). Nun nimmt also auch das Verbindungsstück besser die Form einer Röhre an oder man rückt beide Theile der Batterie so an einander, dafs sich *c* und *d* unmittelbar berühren.

Wie schon angedeutet, wird die Doppelbatterie vorzugsweise geeignet zur Einschaltung grofser Widerstände seyn, welche im vorderen Schliefsungsbogen mancherlei Unbequemlichkeit verursachen. Denn solche Widerstände sind meistens derartig organisirt, dafs sie mit einem der Conductoren direct verbunden, grofse elektrische Verluste zur Folge haben, weshalb man sie nur bei Ableitung des einen oder bei Einschaltung einer zweiten Luftstrecke anzuwenden pflegt. Das Erstere dürfte nicht immer gelegen seyn, und das Zweite giebt dem Versuch eine complicirtere Gestalt. Nun bildet aber die Verbindung *cd* gleichsam

1) Ganz ähnlich, wie sich bei Ableitung eines Pols eine solche Verschiebung durch das Auftreten freier Elektricität an den Hülfsconductoren zu Erkennen giebt.

2) Wenn ich bisher mit Rücksicht auf diesen Umstand nicht auch den Condensatoren eine isolirende Unterlage gab, so liegt der Grund nur darin, weil bei der gegebenen Höhe der Pole dies eine Verkürzung der Gläser und somit eine weitere Verkürzung der Stanniolbelegung zur Folge hätte, auch die isolirte Verbindung der Aufsenflächen dem kleinen Einschaltungsapparat in mancher Beziehung hinderlich wäre. Gleichwohl möchte eine solche Anordnung namentlich im theoretischen Interesse zu wünschen seyn.

Digitized by Google

einen zweiten, hinteren Schliefsungsbogen; und in diesen eingeschaltet sind jene Widerstände in keiner Weise störend, nur, dafs man bei Ableitung eines Pols, wenn man dieselben nicht genügend isoliren kann, eine etwas kleinere Schlagweite erhält, als wenn beide Pole isolirt sind. Wegen der geringeren Spannung im hinteren Schliefsungsbogen ist aber die Isolirung in jedem Falle leichter, als sie es im vorderen Schliefsungsbogen seyn würde.

Dafs sich in dieser Form der Batterie auch die Maafsflasche gebrauchen läfst, scheint mir, obwohl ich den Versuch nicht gemacht, doch ohne Zweifel. Sie würde einfach zwischen *c* und *d* einzuschalten und wenn sie von der Entladung unberührt bleiben soll, jedesmal vor derselben durch einen anderen Leiter auszuschalten seyn.

Obwohl nun eine Batterie, wie ich sie im Bisherigen zur Anschauung gebracht, namentlich für den Gebrauch von Influenzmaschinen eine grofse Bequemlichkeit bietet und auch, wie schon bemerkt, für die meisten Versuche, für diejenigen wenigstens, welche man in Schulen anzustellen pflegt, genügt, so dürfte sie doch für eins der schönsten und lehrreichsten Experimente der Physik, nämlich für dasjenige des Drahtschmelzens, welches der Anhäufung einer sehr grofsen Elektricitätsmenge bedarf, nicht ausreichen. Es liegt zwar auf der Hand, dafs man, um eine gröfsere Oberfläche zu gewinnen, die Gläser einfach noch weiter erhöhen (mit der Erweiterung wird im gegebenen Falle, wie ich bereits auseinander gesetzt, weniger erreicht), oder ihre Anzahl verdoppeln könnte. Allein der Apparat würde hierdurch sehr wesentlich an Bequemlichkeit verlieren; und aufserdem sind so hohe Gläser auch verhältnifsmäfsig theuer und schwer zu bekleben. Ich möchte daher eine solche Batterie nur dort zur Anschaffung empfehlen, wo sich schon eine gröfsere, wenn auch nur für sehr kleine Schlagweiten vorfindet, oder wo man neben der in Rede stehenden noch eine andere für grofse Quantität, welche nur aus wenigen Flaschen von sehr dünnem Glase und mit hoher Belegung zu bestehen

Digitized by Google

brauchte, anschaffen will. Andernfalls möchte ich lieber eine andere Batterie vorschlagen, welche, wenn auch in der Handhabung weniger einfach, doch den besonderen Vortheil bietet, dafs man sie nach Belieben für grofse Quantität und hohe Spannung gebrauchen kann, und mit der auch, wie ich aus Erfahrung weifs, das fragliche Experiment gelingt. Die Flaschen dieser Batterie bestehen, wie gebräuchlich, aus dünnem Glase und haben eine hohe Belegung; die Anordnung derselben ist jedoch eine solche, dafs man sie ziemlich bequem in verschiedener Weise combiniren kann, um je nach Bedürfnifs das Princip der Doppelbatterie in einfacher oder complicirterer Form zur Anwendung zu bringen. Ich möchte den Apparat daher zur Unterscheidung von jener, sowie von der im Anfang besprochenen Flaschensäule, Kettenbatterie nennen.

Für den ausführenden Mechaniker hat diese Batterie den Vorzug, dafs ihre Dimensionen für alle Maschinen bis zu einem Scheibendurchmesser von 500^{mm}, wenigstens diejenigen der Gläser, dieselben bleiben und für gröfsere Maschinen nur die Anzahl der Flaschen zu vermehren ist, wenn man sonst das Maximum der Funkenlänge nicht erreichen sollte, oder die Quantität bei diesem Maximum eine zu geringe wäre.

Fig. 8, Taf. VI zeigt eine solche Batterie von 12 Flaschen und zwar in derjenigen Aufstellung, wie sie der Doppelbatterie entspricht. Die Gläser sind bei 300^{mm} Höhe 140^{mm} weit und haben eine Dicke von höchstens $1\frac{1}{2}^{mm}$[1]). Die Gröfse des unbelegten Theils beträgt 60^{mm}.

1) Nichts hindert hier zur ferneren Verstärkung der quantitativen Wirkung die Dimensionen der Gläser sowohl in die Höhe, als in die Weite zu vergröfsern. Ich habe solche Maafse gewählt, wie ich sie selbst benutzt und wie sie auch für Schulen ausreichen dürften. Die Glasdicke kann in jedem Falle unverändert bleiben, so lange an der Gröfse des unbelegten Theils Nichts geändert wird. Die letztere aber ist so gewählt, dafs eine Selbstentladung ihren Weg lieber über den Rand als durch die Masse des Glases nimmt, so dafs man also, wenn die Flaschen einigermaafsen gleichförmig geblasen sind, ihre Zerstörung nicht leicht zu befürchten hat.

Digitized by Google

Die Durchmesser der Röhren und Kugeln aber variiren mit der Gröfse der Maschine und gelten dafür die oben angegebenen Zahlen[1]). Die Unterlage der Flaschen besteht aus 6 gleichen Holzplatten von länglicher Form und mit wohl verrundeten Ecken und Kanten. Jede dieser Platten, welche auf Hartgummifüfsen ruht, ist zur Aufnahme zweier Flaschen bestimmt, und deshalb nach obiger Manier mit zwei Vertiefungen und einer eingelegten Blechscheibe versehen. Statt der letzteren kann man sich auch eines Blechstreifens bedienen, den man von oben einlegt, wenn man der Holzplatte zwischen den Vertiefungen eine Nuthe giebt. An derselben Stelle erhebt sich ein kleines Messingsäulchen, wie wir es schon kennen gelernt, durch dessen seitliche Oeffnung sich eine Vorrichtung, wie ich ihn gleichfalls schon besprochen, hindurchschieben läfst. Solcher Vorrichtungen bedarf es indessen nur zwei, aber der Draht mufs solche Länge haben, dafs er je drei Messingsäulchen mit einander verbinden kann. In einem bestimmten Falle aber mufs er durch einen kürzeren Draht zu ersetzen seyn. Für denselben Fall ist es auch wünschenswerth, dafs die Holzplatten solche Dimensionen haben, dafs ihre Länge gleich der doppelten Breite ist. Verschieden von der früheren ist die Verbindung der inneren Belegungen, wozu im Ganzen 10 Messingrohre erforderlich sind. Dieselben halten sich mit ihren Stahlzapfen in den Kugeln der mittleren Leiter, welche ihrerseits wegen der gröfseren Basis und geringeren Höhe der Gläser keiner oberen Stütze bedürfen, vielmehr fest in die Korkscheiben eingepreſst und natürlich auch mit keiner Spiralfeder versehen sind. Die Länge der Verbindungsstücke mufs eine solche seyn, dafs ihre abgerundeten Enden allemal die Kugelflächen berühren. Zur Aufnahme anderer Leitungen sind im Ganzen vier Kugeln nach ver-

1) Diese Abhängigkeit ist theoretisch nur für diejenigen Röhren und Kugeln, welche unmittelbar mit den Conductoren verbunden werden, bedingt. Für die Anfertigung aber, sowie für den Gebrauch ist es bequem, wenn alle dieselben Dimensionen haben.

Digitized by Google

schiedenen Richtungen durchbohrt und an ihrem oberen Ende mit einer gleichgrofsen Kugelklemmschraube versehen. Sollen einzelne Flaschen ausgeschaltet werden, so neigt man sie seitlich, und hebt das betreffende Verbindungsstück heraus. Die Leitungen zwischen den beiden Batterietheilen und nach der Maschine sind im Wesentlichen dieselben, wie wir sie bereits kennen gelernt haben.

Die Batterie kann in fünf verschiedenen Formen zur Anwendung gelangen, welche zugleich durch die Reihenfolge, in welcher ich sie beschreiben werde, die Abnahme der Quantität und die Zunahme der Spannung bezeichnen mögen.

1) Als einfache Batterie. Man verbinde (Fig 8, Taf. VI) *g* mit *h* und *c* mit *d*; ferner *a* mit dem einen, *c* mit dem anderen Pol der Maschine. Im Uebrigen gilt, was ich bereits einmal über die Verbindungen und die Stellung des Apparates in solcher Anwendung gesagt habe. Da dies wohl die einzigste der verschiedenen Formen ist, in welcher eine Selbstentladung durch die Glasmasse zu befürchten wäre, so ist es rathsam, die Elektroden, es sey denn, dafs sie kleiner, als die gebräuchlichen sind, nicht über 25—30^{mm} zu entfernen. Es ist dies aber zugleich die einzigste Form, in welcher das Experiment des Drahtschmelzens gelingt, und da dasselbe durch die Riefs'schen Untersuchungen (Riefs, Elektricitätslehre Bd. 2, S. 11—33) für Schulen eine gewisse Bedeutung erlangt hat, so will ich über die Anstellung einige Worte sagen, aber nicht verschweigen, dafs ich den Versuch bereits bei Hrn. Prof. Riefs selbst unter Anwendung einer Influenzmaschine in seiner vollen Schönheit gesehen habe. Man wählt hierzu am besten Eisendraht von der feinsten käuflichen Sorte, oder man läfst ihn, was noch sicherer, von einem Goldschmidt oder Drahtzieher für diesen Zweck besonders ziehen. In die Klemmschraubenlöcher des Einschaltungsapparates steckt man kurze, aber dicke Messingdrähte, deren freie Enden mittelst einer Laubsäge einen kleinen Schlitz empfangen haben. In diesen Schlitzen, welche

Digitized by Google

sich leicht durch ein Messer erweitern oder durch einen Hammerschlag verengen lassen, kann man den Draht durch bloſses Hineinschieben, oder durch Drehung jener oder durch Umwinden befestigen, auch das Versuchsende durch Biegung seiner Halter je nach Bedürfniſs verlängern oder verkürzen. Man beginnt zunächst mit einem kürzeren, rückt die Schiebecylinder bis in die Nähe der Entladungsstangen, und beobachtet nun, indem man ihre Entfernung von denselben allmälig vergröſsert, wann bei den auf diese Entfernung erfolgenden Selbstentladungen der Batterie der Draht zum ersten Mal in's Glühen geräth. Jetzt darf die Entfernung nur wenig vergröſsert werden, um das Glühen in die schönere Erscheinung des langsamen Schmelzens, welches unter Bildung einer Reihe glühender Kügelchen vor sich geht, umzuwandeln. Bei noch gröſserer Entfernung findet ohne Kugelbildung das gleichzeitige Schmelzen und Zerreiſsen des Drahtes statt, Mit einem längeren Ende ist das Experiment glänzender, aber die Elektricitätsmenge muſs eine entsprechend gröſsere seyn. Hr. Prof. Rieſs stellt den Versuch in einer etwas anderen Weise an, indem er zur Bestimmung der letzteren die Maaſsflasche benutzt und nach Ausschaltung derselben die Batterie durch eine Vorrichtung entladet. Diese Methode ist wissenschaftlicher, aber weniger einfach.

2) Als Doppelbatterie oder in einfacher Verkettung; Maximum der Schlagweite etwa 60^{mm}. Man verbinde (Fig. 8, Taf. VI) *c* mit *d*; ferner *a* und *b* mit den Polen der Maschine. Im Uebrigen gilt, was ich von derselben Form bereits früher gesagt habe.

3) In zweifacher Verkettung; Maximum der Schlagweite 110^{mm}. Man entferne (Fig. 8, Taf. VI) die Drähte *c* und *d*, desgleichen die Zwischenstücke *e* und *f*, während man andererseits die Kugeln *g* und *h* durch ein solches verbindet, wodurch die Batterie die in Fig 9, Taf. VI veranschaulichte Form gewinnt. Von *a* und *b* führen nach wie vor Leitungen nach den Polen. Soll ein Widerstand eingeschaltet werden, so kann dies nur zwischen

Digitized by Google

g und *h* geschehen; dabei ist zu beachten, dafs ein solcher den äufseren Belegungen möglichst fern zu halten, und daher bei gröfserer Länge auf entsprechende Weise zu stützen ist.

4) In dreifacher Verkettung (Fig. 10, Taf. VI); Maximum der Schlagweite 180^{mm}. Wollte man diese Form herstellen, ohne im Verlust der Quantität einen gröfseren Sprung, als bei den bisherigen Verwandlungen zu machen, so würden hierzu 6 neue Flaschen nöthig seyn. Bei der gegebenen Zahl dagegen kann man nicht anders verfahren, als indem man die dreifache Flaschenreihe in eine zweifache umsetzt. Da hierbei an jeder Seite ein Brettchen von den beiden anderen zu trennen ist (ein Abstand von 20^{mm} dürfte genügen), so würden vier neue Verbindungsstücke nöthig seyn, wenn sich nicht einzelne durch Verschiebung verlängern liefsen. Umgekehrt müssen die Drähte *c* und *d* verkürzt, respective durch andere ersetzt werden, weil sie mit ihrem freien, wenn auch abgerundeten Ende, die Gränze ihrer Brettchen nicht überschreiten dürfen. Der hintere Schliefsungsbogen liegt in dieser Form wieder unten, weshalb in der Figur *c* und *d* mit einander verbunden sind. Die Leitungen nach den Polen gehen, wie früher von *a* und *b* aus.

5) In vier-, fünf- und sechsfacher Verkettung; Maximum der Schlagweite 250 — 400^{mm}. Die zweifache Flaschenreihe geht hiermit in eine einfache über, was wiederum einen grofsen Verlust an Quantität bedeutet. Da also die Quantität ohnehin eine sehr geringe ist, wird man sie nicht dadurch, dafs man die Kette unnöthig verlängert, noch vermindern wollen; und da eine vierfache Verkettung für die Schlagweite der gebräuchlichen Maschinen vollkommen genügt, so haben die anderen Formen vorläufig keinen praktischen Werth. Anders dagegen verhält es sich mit dem theoretischen Interesse, welchem eine gröfsere Länge der Kette ein gröfseres Feld der Beobachtung gewährt. Daher ist die Batterie in dieser Form (Fig. 11, Taf. VI) wieder mit allen Flaschen abgebildet,

Digitized by Google

obwohl vier vom praktischen Gebrauche auszuschliefsen sind. Die Flaschen bilden hierbei am besten einen Halbrahmen um die Maschine, während man sie in den früheren Formen lieber hinter derselben oder zu beiden Seiten placirt. Die Brettchen sind sämmtlich von einander getrennt, und immer je zwei Flaschen, welche auf getrennten Brettchen stehen, mit einander verbunden. In der Figur ist der hintere Schliefsungsbogen ein oberer, aber man sieht leicht, wie er nach Fortnahme zweier Flaschen ein unterer, nach Fortnahme von vieren wieder ein oberer wird. Ist der Schliefsungsbogen unten, so rücken natürlich die Drähte *c* und *d* an ihre frühere Stelle, im anderen Falle bleiben sie besser entfernt.

Obwohl die Flaschensäule in ihren Grundzügen längst bekannt und die Batterie, welche ich zuletzt beschrieben, gewissermaafsen nur eine Uebersetzung jener in die symmetrische Form ist, so zweifle ich doch nicht, dafs es demjenigen, welcher einen solchen Apparat unter Händen hat, ein besonderes Vergnügen gewähren wird, den inneren Mechanismus desselben zu studiren. Namentlich interessant ist es zu beobachten, wie sich durch Ableitung eines Pols oder durch Einschaltung von Widerständen an anderen Stellen, als im hinteren Schliefsungsbogen, die freie Elektricität aus ihrer symmetrischen Anordnung verschiebt, wie sich die Schlagweite durch Einschaltung von Flaschen vergröfsert, durch Ausschaltung verkleinert, oder wie bei allmäliger Verkürzung der Kette bei ein und derselben Entfernung der Elektroden die Selbstentladungen über den Glasrand zunehmen, wie endlich die Schlagweite nicht nur durch die Länge der Kette, sondern innerhalb gewisser Gränzen auch durch die Gröfse des Widerstandes bestimmt wird [1]).

1) Dafs sich die Schlagweite auch mit der Gröfse des Widerstandes ändert, steht wohl nur in scheinbarem Widerspruch mit den von Hrn. Prof. Riefs über denselben Gegenstand angestellten und in dem Sitzungsbericht der Berliner Akademie vom 11. Februar 1875 wiederholt erwähnten Versuchen, da hier von ganz andern Schlagweiten

Digitized by Google

Was nun die Wirkung der beiden von mir in Vorschlag gebrachten Batterien betrifft, so ist sie durch Angabe der Schlagweite und Wärmewirkung, welche sich damit erreichen läfst, der Hauptsache nach bereits im Früheren bestimmt, und eine genauere Betrachtung liegt aufserhalb der vorgesteckten Gränzen. Gleichwohl kann ich nicht umhin, wenigstens denjenigen Versuchen, welche mich vorzugsweise zur Construction dieser Apparate und zur öffentlichen Besprechung derselben angeregt, noch eine kurze Beschreibung zu widmen. Ich meine die Darstellung der sonderbaren Entladungsphänomene bei sehr grofsem Widerstande und sehr grofser Schlagweite, welche gewifs zu den interessantesten Wirkungen der Influenzmaschine gehören.

Nachdem Wolff bereits im Jahre 1787 eine befeuchtete Glasröhre zur Zündung des Schiefspulvers in Vorschlag gebracht[1]) und nachdem van der Willigen gezeigt[2]), dafs sich die Schichtung des Lichtes in evacuirten Röhren auch mit der Elektrisirmaschine durch Einschaltung einer nassen Schnur erzeugen lasse, sind dergleichen Widerstände von späteren Physikern vielfach zur Verzögerung der Entladung in Anwendung gebracht. Es war daher nichts Neues, wenn ich bereits vor Jahren die Anwendung derselben auch bei der Influenzmaschine empfahl[3]); und ebensowenig meine ich, dafs die in Rede

die Rede ist, als denjenigen, an welchen Hr. Prof. Riefs die Gesetze der Entladung studirt hat.

1) Lichtenberg's Magazin usw. Bd. II. St. 2, S. 70.

2) Pogg. Ann. Bd. 98, S. 494.

3) Neu hingegen mochte in derselben Mittheilung (Pogg. Ann. Bd. 127, S. 325) die gleichzeitige Bemerkung seyn, dafs für die Rotation des Funkens in dem de la Rive'schen Apparate, wenn man dieselbe bei der Influenzmaschine bewirken wolle, gleichfalls eine nasse Schnur erforderlich sey. Hr. Prof. O. E. Erdmann in Berlin gab insofern die Veranlassung zu dieser Beobachtung, als mich derselbe anregte, den fraglichen Versuch zu machen und mir die nöthigen Apparate zur Verfügung stellte. Es zeigte sich indessen, dafs der unverzögerte Funke durch die Wirkung eines kräftigen Elektromagnets nicht in Rotation zu setzen sey. Ich schickte die Entladungen nun, um eine

Digitized by Google

stehenden Phänomene in ihren Grundzügen nicht bereits von anderer Seite beobachtet sind[1]). Ihre volle Schönheit aber beginnt erst bei grofser Schlagweite, ich meine bei einer Funkenlänge von mindestens 100^{mm}, und ich glaube schwerlich, dafs man sie vor mir unter solchen Verhältnissen beobachtet hat. Die Erscheinungen sind dann in der That von soviel interessanten Nebenumständen begleitet, dafs eine specielle Untersuchung über die hier mitwirkenden Factoren für die Theorie der Entladung überhaupt wohl von Interesse seyn dürfte.

Für den einfachen Versuch genügt es, eine nasse Schnur von beliebiger Stärke in den hinteren Schliefsungsbogen der Batterie zu schalten und, während man die Selbstentladungen zwischen den Elektroden beobachtet, allmählig zu verlängern oder trocken werden zu lassen. Das Letztere ist der bequemere, wenn auch weniger wissenschaftliche Weg. Im Uebrigen nehme man die Elektricitätsmenge und die Schlagweite so grofs, als es die Umstände gestatten. Der Funke wird alsdann bei allmähligem Wachsen des Widerstandes zunächst eine gelbe, dann eine rothe und endlich eine blaue Färbung annehmen, sich hierbei aber von einem gewissen Punkte an in

dem Inductionsapparat ähnliche Sachlage zu gewinnen, zunächst durch die lange Nebenspirale eines solchen, und später ersetzte ich diese durch eine nasse Schnur. In beiden Fällen erfolgte die Rotation in gewünschter Weise, allerdings etwas langsam und nur unter Mitwirkung einer sehr ergiebigen Maschine.

1) Ich glaube hier namentlich auf die Versuche von Riefs (Riefs, Elektricitätslehre Bd. 2, S. 114), welcher durch Einschaltung eines sehr dünnen Platindrahtes oder einer Wassersäule $1\frac{1}{2}$ Linien lange Funken von kaum merklicher Licht- und Schallwirkung erhielt, ferner auf die Beobachtung Rijke's (Pogg. Ann. Bd. 111, S. 612), dafs man an dem Entladungsfunken der Batterie durch Einschaltung einer nassen Schnur eine dem Inductionsfunken ähnliche, bläuliche Lichthülle erzeugen könne, endlich auf die Untersuchung Paalzow's über die Wärme des elektrischen Funkens (Pogg. Ann. Bd. 127, S. 126), welcher durch Einschaltung sehr langer Wassersäulen, lichtschwache, büschelähnliche Entladungen bis zu 6^{mm} Länge darstellte, hinweisen zu müssen.

Digitized by Google

eine gröfsere und immer gröfsere Zahl einzelner schwacher Fünkchen spalten, die an manchen Stellen ruhig nud parallel neben einander gehen, an anderen wild durch einander wogen und, so lange sie eine röthliche Farbe haben, von einer bläulichen Lichthülle umgeben erscheinen, während gleichzeitig der Schall zu einem kaum hörbaren Laut verstummt, bis dann plötzlich bei noch vergröfsertem Widerstande eine vollständig veränderte Entladungsform auftritt in Gestalt einer Unzahl weifsglänzender Fünkchen, welche von einem eigenthümlichen kreischenden Geräusch begleitet sind, welche Entladungsform endlich bei noch weiter vermehrtem Widerstande, bei dem die Flaschen indessen kaum noch eine Ladung annehmen, dem periodischen Auftreten getrennter Büschelerscheinungen Platz macht. Die Schnur pflegt dann schon so trocken zu seyn, dafs sie an manchen Stellen von der Elektricität nicht mehr durchlaufen, sondern in Funkenform übersprungen wird.

Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dafs die in solcher Weise verzögerte Entladung mehr als jede andere der Theorie der Riefs'schen Partialentladungen entspricht[1]), und es gewährt ein eigenthümliches Vergnügen einen grofsen Theil dieser Einzelentladungen, welche sich scheinbar durch eine etwas verschiedene Färbung unterscheiden, mit dem Auge gleichsam von einander trennen zu können. Auch ist es interessant zu beobachten, wie die Luftbewegung allmählig eine so langsame wird, dafs man die Fünkchen theilweise fortblasen kann. Dafs unter solchen Verhältnissen die Licht- und Schalleffecte mehr und mehr verschwinden, ist wohl erklärlich. Woher aber das plötz-

1) Riefs, Elektricitätslehre Bd. 2. S. 88—94. Ich kann mich indessen nicht mit der Ansicht des Hrn. Prof. Riefs befreunden, dafs in jeder Partialentladung immer nur die Elektricität des mit der Batterie verbundenen Leiters und nicht auch zugleich die freie der Batterieoberfläche selbst verschwinden soll, während die ganze auf der Glasfläche angehäufte Elektricitätsmenge in Folge des inneren sowohl, wie des äufseren Widerstandes nicht auf einmal, sondern nur successive frei werden kann.

Digitized by Google

liche Wiedererwachen derselben in Funken, denen gleichzeitig die hohe Wärmewirkung und zündende Kraft der früheren zu mangeln scheint? Ist der Widerstand vielleicht so grofs geworden, dafs die von der ersten Partialentladung erwärmte Luftstrecke bereits abgekühlt ist, bevor die zweite in Folge des gestörten und noch nicht wieder hergestellten Gleichgewichts anfangen kann? Wie ist aber in diesem Falle überhaupt die zweite möglich, da ihr doch die für den Uebergang nöthige Dichtigkeit fehlt? Oder ergänzt sie dieselbe auf bisher unbekannte Weise aus der geladenen Glasfläche der Batterie oder aus der gleichzeitigen Thätigkeit der Maschine? Oder beruht die Möglichkeit von Partialentladungen überhaupt neben der Erwärmung der Luftstrecke noch auf einem zweiten, bisher nicht beachteten Grunde, auf dem Umstande nämlich, dafs die Schlagweite der bewegten und der ruhenden Elektricität eine andere ist? Und sollte schon Priestley einen solchen Zusammenhang geahnt haben, wenn er in seiner Geschichte der Elektricität[1]) bei Gelegenheit der Glasdurchbrüche die Ansicht äufsert, dafs so oft man die Entladung an einer Stelle zu bewirken suche, zugleich das Bestreben an anderen Stellen, eine Entladung herbeizuführen, zunehme? Wären Partialentladungen nur durch Erwärmung der Luftstrecke möglich, so ist nicht recht einzusehen, weshalb sie nicht in der einmal gebrochenen Bahn verbleiben, vielmehr beim Wachsen des Widerstandes schon beim Auftreten der röthlichen Färbung theilweise einen sehr verschiedenen Weg zu nehmen scheinen. Oder hat sich die erwärmte Luftstrecke nach Verlauf einer Partialentladung bereits verschoben? Oder sind diese sonderbaren Lichterscheinungen vielleicht doch keine Partialentladungen im gebräuchlichen Sinne, sondern Spaltungen des Funkens nicht der Zeit, sondern nur dem Raume nach?

Ich gehe nun zur Betrachtung der allgemeinen Regeln und Vorschriften über, welche für den Gebrauch von

1) Uebersetzung von Krünitz, S. 423.

Digitized by Google

Batterien bei Influenzmaschinen zu beobachten und Manchem, welcher eine solche Maschine besitzt, vielleicht noch nicht bekannt sind. Man mag es entschuldigen, wenn hierbei der Vollständigkeit halber einige längst bekannte Erfahrungen, auch für Reibzeugmaschinen gültig, zur Sprache kommen sollten.

Es ist selbstredend, dafs die Verbindungen zwischen Batterie und Maschine nicht immer aus Röhren nach Art der beschriebenen zu bestehen brauchen; sondern dafs an Stelle derselben, so lange man innerhalb kleiner Schlagweiten bleibt, auch ebenso gut Drähte zu verwenden sind, und dies eher bei der Influenz- als bei der Reibzeugmaschine, weil etwaige Verluste bei der letzteren schwerwiegender sind. Da an abgeleiteten Verbindungen Verluste niemals entstehen können, so sind für solche auch Drähte der bequemeren Form wegen vorzuziehen, oder noch besser Metallschnüre, wenn die Leitungsfähigkeit nicht vorzugsweise in Betracht kommt. Die eventuelle Nothwendigkeit einer vollkommenen Ableitung habe ich bereits erwähnt, möchte aber noch bemerken, dafs man sich leicht von dem Auftreten freier Elektricität an Verbindungen, welche nur bis auf den Fufsboden reichen, durch das Gefühl der Hand oder mit Hülfe eines Elektrometers überzeugen kann. Für die meisten Versuche indessen spielt diese Elektricität durchaus keine Rolle. Soll eine feuchte Schnur von bestimmter Länge eingeschaltet werden, so umwickelt man am besten ihre Enden zuvor mit dünnem Draht. Soll sie während der Versuche dagegen verkürzt oder verlängert werden, so legt man sie am bequemsten über zwei horizontale Leiter und verlängert oder verkürzt den herabhängenden Bogen. Soll sie möglichst lange feucht bleiben, so zieht man sie durch ein Glas- oder Hartgummi- oder Weichgummirohr und variirt die wirksame Länge durch einen nebenbei gesteckten Draht. Dasselbe Mittel dient auch, um sie vor Ausströmungen zu bewahren, falls sie aus irgend einem Grunde isolirt werden sollte. Aeltere Schnüre, welche

Digitized by Google

bereits faserig geworden, sind übrigens den neueren vorzuziehen.

Bei wissenschaftlichen Untersuchungen, welche eine bestimmte Begränzung der Elektricitätsmenge bedingen, und wo doch keine Selbstentladung innerhalb der Schlagweite erfolgen soll, ist es nöthig, dafs man in einem gegebenen Augenblick die Verbindung zwischen Batterie und Maschine möglichst schnell unterbricht, weil sich die Rotation der Scheibe nicht so schnell wie bei der Reibzeugmaschine aufheben läfst. Ich kann für diesen Zweck eine Vorrichtung empfehlen, welche Hr. Prof. Riefs an seiner Maschine bereits vor Jahren angebracht und, wenn ich nicht irre, in neuerer Zeit auch beschrieben hat. Diese Vorrichtung, welche sich nicht gut an zwei Stellen gleichzeitig anbringen läfst, und daher die Ableitung des einen Pols zur Bedingung hat, besteht im Wesentlichen aus einem kleinen, auf einer Axe leicht beweglichen Messingröhrchen, welches während der Ladung mit seinen abgerundeten Enden in der fraglichen Verbindung die Brücke bildet, im gegebenen Momente aber durch schnelle Drehung der Axe mittelst eines seidenen Fadens eine andere Stellung erhält. Die Wirkung eines solchen Interruptors ist begreiflich keine momentane; aber ich wüfste keinen besseren für höhere Spannung; und man kann ja mit Rücksicht auf jenen Umstand die Ladung auch ein wenig früher abbrechen. Kommt es weniger auf Genauigkeit an, so ist es wohl am einfachsten, die Batterie so zu stellen, dafs sich die Verbindung und Trennung durch bloſse Verschiebung einer Entladungsstange bewirken läfst, was mit Hülfe eines gebogenen und mit einer Kugel versehenen Röhrenstücks leicht auch für hohe Flaschen anwendbar ist. Oder man bedient sich zur Ladung des gewöhnlichen Ausladers mit isolirendem Stiel, indem man seine Metallgarnitur als Brücke gebraucht. Oder man nimmt, wenn es nur eine einzelne Flasche ist, dieselbe während der Ladung in die Hand. In allen diesen Fällen ist es bequem, die Entladungsstange, deren Elektricität man be-

Digitized by Google

nutzt, mit ihrem Hefte nach innen, mit ihrer Elektrode nach aufsen zu drehen. Die andere mufs natürlich abgeleitet werden.

Aber nicht nur zur Begränzung der Elektricitätsmenge, sondern auch zu deren Erhaltung ist die Trennung der Batterie von der Maschine geboten in allen Fällen, wo die Entladung nicht während der Thätigkeit der letztern erfolgen soll. Denn nicht nur, dafs bei der grofsen Zahl der Spitzen und ihrer ganz besonderen Schärfe die Elektricität viel leichter, als dies bei der Reibzeugmaschine der Fall ist, sowohl in die Luft, als zurück auf die unwirksam gewordene Scheibe strömt; sondern diese fängt selbst unter dem Einflufs der entweichenden Ladung — und hierdurch entweicht dieselbe um so geschwinder — im entgegengesetzten Sinne zu rotiren an[1]), so dafs es kaum möglich ist, die Rotation zu unterbrechen, ohne dafs nicht die Scheibe irgend eine rückgängige Bewegung machte.

Da sich nun, wie erwähnt, die in Rede befindliche Trennung nicht gut gleichzeitig an beiden Polen vornehmen läfst, da sich ferner die Spannungsdifferenz, wie wir wissen, durch Ableitung des einen nicht unwesentlich vermindert, da endlich die Vornahme der Entladung durch irgend eine Vorrichtung immerhin Zeit erfordert, bei welcher ein Verlust an Elektricität nicht zu vermeiden ist, so folgt hieraus, dafs in allen Fällen, wo die Entladung nicht während der Thätigkeit der Maschine erfolgen darf, die Schlagweite auch bei Weitem nicht ihr sonstiges Maximum erreichen kann.

Ueber die unwillkürlichen Stromumkehrungen und wie man dieselben nach Möglichkeit vermeidet, habe ich mich bereits vor Kurzem an einer andern Stelle ausgesprochen.

1) Dergleichen Bewegungsphänomene, zuerst von mir an der Combination zweier Influenzmaschinen beobachtet (Pogg. Ann. Bd. 130, S. 270), sind später von Hrn. Prof. Poggendorff sehr sorgfältig studirt (Sitzungsbericht der Berl. Akad. vom 25. Nov. 1869 — auch diese Ann. Bd. 139, S. 513) und nach allen möglichen Richtungen abgeändert worden.

Digitized by Google

Da solche Stromwendungen indessen beim Gebrauch der Batterie besonders lästig sind, so mag hier noch Einiges nachgetragen werden. Kleinere Maschinen sind leichter zum Polwechsel geneigt, als gröfsere, was einerseits in der geringeren Ausdehnung der isolirenden Flächen, andrerseits in der bei schnellerer Rotation um so früher bewirkten Veränderung der vorderen Scheibe seinen Grund hat, so dafs mit Rücksicht hierauf, sowie überhaupt auf die geringere Leistungsfähigkeit eine Maschine mit 300^{mm} grofser Scheibe für umfangreiche Untersuchungen nicht mehr zu empfehlen ist. Die Veränderung der Scheibe bezieht sich indessen weniger auf ihre Masse, als auf ihre Oberfläche, gleichviel, ob dieselbe lackirt oder unlackirt ist, und läfst sich mit einiger Mühe beseitigen, indem man sie auf eine ebene Tischplatte legt und so lange mit einem reinen, schwach angefeuchteten Tuche reibt, als letzteres noch von dem eigenthümlichen, anhaftenden Staube geschwärzt wird[1]). Da man hierdurch innerhalb

1) Dieser Staub setzt sich nicht nur auf lackirten, sondern auch, wenn auch in geringerem Grade, auf unlackirten Scheiben und namentlich auf ihrer vorderen Fläche ab. Im ersteren Falle mag derselbe hauptsächlich der durch die Büschelwirkung zersetzten Harzschicht seinen Ursprung verdanken. Im letzteren mag er einerseits durch Verkohlung organischen Staubes, welchen die elektrischen Flächen angezogen, andrerseits durch Loslösung metallischer oxydirter oder unoxydirter Theilchen gebildet werden. In jedem Falle aber ist derselbe leitend und zwar nicht nur in sich selbst, sondern auch, weil er in so vertheiltem Zustande begierig den Wasserdampf aufnehmen und condensiren mufs. Da nun die Influenzwirkung, auf welcher der Apparat beruht, für die vordere Scheibe einen möglichst vollkommnen Isolator voraussetzt, so ist klar, dafs die in Rede befindliche Ablagerung überhaupt, namentlich aber in feuchter Luft, die elektromotorische Kraft schwächen mufs. Die Stromumkehrungen aber haben, nach der von mir gegebenen Theorie, ihren letzten Grund in der allmäligen Anhäufung der entgegengesetzten Elektricität an der inneren Fläche der festen Scheibe. Diese Anhäufung wächst nun zwar mit der elektromotorischen Kraft und nimmt mit dieser ab; aber sie wächst gleichzeitig mit der Leitungsfähigkeit der rotirenden Scheibe, weil durch diese namentlich die Hinführung jener Elektricität bewirkt wird, und von einem besseren Leiter der Uebergang ein leichterer ist.

Digitized by Google

gewisser Gränzen nicht nur dem Polwechsel vorbeugt, sondern zugleich die Wirksamkeit der Maschine erhöht, so ist namentlich für den längeren Gebrauch der Batterie nichts angebrachter, als sich dieser Mühe häufiger zu unterziehen [1]).

Ist ein Pol abgeleitet, so finden Stromumkehrungen leichter statt; ferner leichter, wenn die Ladung eine gröfsere Zeit beansprucht; leichter ferner, wenn man die Rotationsgeschwindigkeit während der Dauer einer solchen verringert; leichter endlich unmittelbar nach Entstehung des Funkens als vor derselben. Um in allen diesen Fällen nun dem Uebelstande möglichst abzuhelfen, ist es das einfachste und zugleich das wirksamste Mittel, die Hülfs-

So wäre nun schon die Abhängigkeit des Polwechsels von der Veränderung der Scheibe erklärlich. Eine weitere Abhängigkeit aber ergiebt sich aus dem Umstande, dafs die stromwendende Wirkung jener inneren Ladung überhaupt erst zur Geltung gelangt, sobald die freie Elektricität der äufseren verschwindet. Dies Verschwinden geht nun zwar in den meisten Fällen von den Kanten der Belegung aus, welche der Papierspitze am fernsten sind, während gerade in diese dieselbe Elektricität hineinströmt. Allein unter gewissen Bedingungen z. B. bei plötzlicher Ableitung des Schliefsungsbogens, sei es durch äufsere Berührung, sei es durch Ausgleichung in Funkenform, kann auch eine umgekehrte Bewegung eintreten und der Verlust wird dann um so gröfser seyn, je weniger die rotirende Scheibe ein Isolator ist.

1) Noch ein anderer Theil der Maschine ist leicht der Veränderung unterworfen, wenn man derselben nicht bei Zeiten vorbeugt, und da dies beim längeren Gebrauch der Batterie häufig übersehen wird, und der Schaden nur schwer wieder gut zu machen ist, so möchte ich namentlich an dieser Stelle darauf aufmerksam machen. Ich meine das Axensystem, wenn demselben das Oel mangelt. Um dieses nun zu ersetzen — man nehme nur solches, wie es bei Uhrmachern gebräuchlich und auch käuflich ist — entfernt man am besten die Hülse sammt der Scheibe von ihrem Zapfen, was leicht nach Abstellung der Conductoren und Lösung der kleinen Mutter zu bewerkstelligen ist, und benetzt sowohl den vorderen, als den hinteren Theil desselben mit je einem Tropfen. Ebenso verfährt man mit der Kurbelwelle, so gut dies ohne Auseinandernahme der einzelnen Theile zu bewirken ist. Bei der letzteren jedoch ist die Erneuerung überhaupt weniger nothwendig.

Digitized by Google

conductoren, nachdem einmal die Maschine erregt ist, bis über die Gränze der Belegungen zu verschieben, weil an den unbelegten Stellen der festen Scheibe die freie Elektricität nicht so schnell verschwinden und in Folge dessen die an der Innenfläche angehäufte entgegengesetzte, welche den Strom umkehrt, auch nicht so leicht zur Wirkung kommen kann. In dieser Stellung indessen nimmt allmählig die Ergiebigkeit der Maschine ab, und so ist es dann und wann nöthig, wenn auch nur auf kurze Zeit, die Hülfsconductoren wieder den Belegungen gegenüber zu stellen. Das geschieht aber besser im mittleren Verlauf einer Ladung, als gegen das Ende oder zu Anfang derselben. Ist ein Pol constant abgeleitet und ladet man, wie oben besprochen, die Batterie oder einzelne Flaschen in der Weise, dafs man ihre innere Belegung nicht fest, sondern wandelbar mit dem andern Pole verbindet, so lassen sich Stromumkehrungen leicht dadurch vermeiden, dafs man diese Verbindung nicht gleich vollständig herstellt, sondern zu Anfang der Ladung die Elektricität in Funken überströmen läfst und erst allmählig in dem Maafse, wie die Ladung wächst, die Funkenstrecke verkleinert. Der Grund liegt darin, dafs jede plötzliche und allzugrofse Spannungsverringerung auf den Conductoren eine entsprechende Spannungsverringerung auf den Belegungen zur unmittelbaren Folge hat, und hierdurch die an der Innenfläche der festen Scheibe angehäufte entgegengesetzte Elektricität leicht das Uebergewicht erlangt. Eine solche Spannungsverringerung mufs aber nothwendig eintreten, wenn man den noch nicht abgeleiteten Conductor plötzlich mit einer grofsen noch unelektrischen Oberfläche verbindet, welche auch, wenn sie selbst isolirt ist, einer anderen nicht isolirten Oberfläche gegenüberliegt. Das Gesagte ist indessen nur für den Gebrauch der Hülfsconductoren beachtenswerth.

Im Uebrigen erinnere man sich, dafs feuchte Luft, weil sie die Scheiben leitend macht, nicht nur die elektrische Erregung schwächt, sondern auch die Neigung

Digitized by Google

zum Polwechsel fördert, dafs also namentlich für den längeren Gebrauch der Batterie nur ein trocknes, d. h. entweder sonniges, oder hochgelegenes oder geheiztes Zimmer, und in diesem wieder jedesmal die wärmste Stelle, im Sommer also die Nähe der Fenster, im Winter die Nähe des Ofens zu wählen ist. Die Oeffnung der Fenster hat fast immer guten Erfolg, weil sie in den meisten Fällen den Feuchtigkeitsgehalt der Zimmerluft verringert[1]). Bei kürzeren Versuchen wirkt oft ein entsprechend geleiteter Luftzug günstig, insoweit derselbe die entfernteren Luftschichten abkühlt und hierdurch den näher gelegenen einen Theil ihrer Feuchtigkeit entzieht.

Auch für den quantitativen und intensiven Effect der Maschine ist die Stellung der Hülfsconductoren nicht ohne Bedeutung, und wer beim Laden der Batterie mehr den einen oder den andern beabsichtigt, wird diese Stellung hiernach zu regeln haben. Für die Ansammlung grofser Elektricitätsmengen innerhalb sehr kleiner Schlagweite ist es am vortheilhaftesten, die Hülfsconductoren ganz zu entfernen, da sie nach der bereits im Jahre 1865 von mir gegebenen Erklärung eines sogenannten 3. Conductors keinen andern Zweck haben, als die Thätigkeit der Maschine unabhängig von der Oeffnung des Schliefsungsbogens zu erhalten[2]) und also aufserhalb dieser Bestim-

1) Bei längeren Versuchen mit der Influenzmaschine, also namentlich beim Gebrauch der Batterie ist eine constante Erneuerung der Zimmerluft auch aus Gesundheitsrücksichten geboten. Ich habe an mir selbst, bevor ich darauf aufmerksam wurde, wiederholt den schädlichen Einfluſs der starken Ozonbildung erfahren. Dieser äufsert sich zwar zunächst nur in einer Affection des Kehlkopfs und der Lunge; ich möchte aber behaupten, wenn ich auch den Zusammenhang nicht verstehe, dafs er sich gleichfalls auf das Nervensystem erstreckt.

2) In dieser meiner ersten Mittheilung über die Construction der Influenzmaschine (Pogg. Ann. Bd. 126, S. 157) befindet sich zugleich eine ziemlich ausführliche Theorie, welche ich in ihren wesentlichsten Punkten noch heute unterschreibe. Leider bezieht sich dieselbe auf eine Abbildung, welche den Apparat von der hinteren Seite darstellt und daher wohl häufig mifsverstanden ist. Die damalige Construction nun gestattete nur die Anbringung eines Conductors für den obigen

Digitized by Google

mung nur Verluste bringen können. Durch Fortnahme derselben wird der quantitative Effect in der That vergrößert und zwar unter günstigen Umständen im Verhältnifs von 5 : 7; mehr übrigens bei dünnerer als bei dickerer Papierbelegung. Aber man kann die Maschine nur bei geschlossenem Bogen erregen, darf die Rotation auch nicht anders unterbrechen, noch anders damit beginnen, wenn sich der Strom nicht gänzlich verlieren soll. Von einer gewissen Schlagweite an, welche von der Größe der Maschine, von dem Durchmesser der Elektroden und in Etwas auch von der Batterieoberfläche bestimmt ist, treten periodische Stromwendungen ein, durch welche die Flaschen abwechselnd geladen und entladen werden, und welche einen andern Grund als die bisher betrachteten

Zweck; aber in meiner zweiten Mittheilung (Pogg. Ann. Bd. 127, S. 320) über eine neue Form der Maschine werden bereits zwei solcher sogenannten überzähligen Conductoren (überzählig, weil sie es der Zahl der Belegungen nach sind) erwähnt, von denen ich indessen nur den einen oder den andern mit dem betreffenden Hauptconductor zu verbinden empfahl, weil in der That eine andere Verbindung bei der von mir vorgeschlagenen provisorischen Verlängerung der Belegungen, welche sich nicht gut gleichzeitig an beiden ausführen liefs, größere Schwierigkeit zeigte. Gleichwohl bemerkte ich, dafs zwischen zwei überzähligen Conductoren auch eine directe Verbindung statt haben könne. Nun zeigte aber Hr. Prof. Poggendorff, dafs auch bei kurzen, unverlängerten Belegungen, in einer gewissen schrägen Stellung der Conductoren, welche indessen bei der von mir beschriebenen Maschinenform nicht leicht herzustellen war, eine directe Verbindung recht gut möglich, und dafs sie sogar mit Rücksicht auf die Schlagweite und die lästigen Stromwendungen die bessere sei (Sitzungsbericht der Berl. Akad. vom 18. Febr. 1867), das Letztere indessen wohl mehr zufällig deshalb, weil die Conductoren hierbei unbelegten Glastheilen gegenübertraten. Diese Entdeckung veranlafste mich, dem ganzen System durch Benutzung einer einzigen an ihren Enden mit Spitzen besetzten Röhre eine einfachere Form und durch Anwendung einer einseitig unterstützten Maschinenaxe zugleich eine solche (centrale) Befestigung zu geben, dafs man die Conductoren mit Leichtigkeit in jede erforderliche Stellung rücken könne, eine Anordnung, welche bis heute unverändert geblieben ist. Die von Hrn. Prof. Poggendorff vorgeschlagene Bezeichnung „Hülfsconductoren" habe ich ihrer Kürze halber gern adoptirt.

Digitized by Google

haben. Von einer solchen Schlagweite an sind in jedem Falle die Hülfsconductoren zu gebrauchen, aber je nach den Umständen, wie ich gleich zeigen werde, in etwas veränderter Stellung. Ich habe schon erwähnt, dafs es des Polwechsels wegen in den meisten Fällen geboten ist, sie über die Gränze der Belegungen zu verschieben, aber dies ist zugleich die geeignetste Stellung, um, wenn auch nur auf kürzere Zeit, den gröfsten intensiven Effect zu erzielen. Ist der Polwechsel weniger störend, als die allmählige Abnahme der Wirkung, so rücke man sie zwar der Belegung, aber nur ihrer äufsersten Kante gegenüber, da sich bei gröfserer Annäherung an die Hauptconductoren wegen des leichteren elektrischen Ausgleichs zwischen den Spitzen dieser und jener die Funkenlänge nothwendig verkleinern mufs. Anders ist es mit der quantitativen Leistung, so lange die Schlagweite keine zu grofse ist. Hier bringt eine weitere Annäherung nicht nur keinen Nachtheil, sondern sie kann auch, namentlich bei grofsen Maschinen oder solchen älterer Construction mit streifenförmigen, circulären Papierstücken — welche Belegungsweise übrigens weniger leicht Stromwendungen erzeugt, weil ein Theil der Spitzen immer unbelegten Glastheilen gegenübersteht — innerhalb gewisser Gränzen von Vortheil seyn, weil so die schlechte Leitungsfähigkeit des Papiers in ihrer die elektromotorische Kraft schwächenden Eigenschaft weniger zur Geltung gelangt.

Einen nicht unwesentlichen Vortheil (der leider durch die Unbequemlichkeit des Mittels mehr oder weniger compensirt wird) zur Vergröfserung der Elektricitätserregung sowohl, als zur Vermeidung des Polwechsels bietet die häufigere Verrückung der Hülfsconductoren oder, bei Ausschlufs derselben, der festen Scheibe aus der einmal gegebenen Stellung. Der Grund dieser Erscheinung ergiebt sich aus der Betrachtung, dafs die elektrische Anhäufung an der Innenfläche der festen Scheibe, weil sie mit der Influenzwirkung wächst, allemal dort, wo sich

Digitized by Google

grade die Spitzen der Conductoren befinden, am gröfsten ist und dafs man also durch allmählige Verschiebung, sey es der Spitzen, sey es der Glaspunkte, die Kraft der Belegung in ungeschwächterem Grade erhalten kann.

Die Stromumkehrungen sind bisher nur von ihrer Schattenseite behandelt, und sie sind in Wirklichkeit höchst störend, wenn sie unwillkürlich erfolgen. Allein absichtlich (z. B. durch ableitende Berührung der Belegungen) hervorgerufen machen sie sehr einfach die Anwendung eines Commutators überflüssig, welcher, abgesehen davon, dafs die Construction eines solchen für hohe Spannung auf die gröfsten Schwierigkeiten stöfst, in jedem Falle lästig und bei Anordnung mancher Versuche gradezu unmöglich ist. Ich möchte namentlich für die Darstellung der besprochenen schönen Entladungsphänomene, wenn man dieselbe mit Elektroden verschiedener Gröfse wiederholen sollte, auf dies bequeme Mittel des Polwechsels aufmerksam machen. Und vielleicht wären auch jene erwähnten periodischen Stromumkehrungen bei Ausschlufs der Hülfsconductoren, wenn man gleichzeitig einen andern Körper einschalten wollte, für manchen Versuch zu verwerthen.

In Betreff der Erregung der Maschine mag kurz hervorgehoben werden, dafs dieselbe, wie sie bei Anwendung der Hülfsconductoren schon eine leichtere, wenn sich die Elektroden nicht berühren, so auch namentlich eine leichtere ist, wenn die Batterie oder die einzelnen Flaschen nicht bereits mit den Polen in Verbindung gesetzt sind. Die Ursache liegt in dem Umstande, dafs bei anderer Anordnung die Influenzwirkung des Erregers nicht den Hülfsconductoren allein zu Gute kommt, sich vielmehr gleichzeitig auf die Hauptconductoren und die ganze mit ihnen verbundene Oberfläche erstrecken mufs und hierdurch eine allzu grofse Schwächung erleidet. Die schwerere Erregbarkeit in feuchter Luft liegt übrigens weit eher in der hygroskopischen Eigenschaft des Erregers als in

Digitized by Google

derjenigen der Scheiben, wenigstens wenn dieselben lackirt sind, und läfst sich daher leichter beseitigen[1]).

Zum Schlufs möchte ich nicht unterlassen, noch auf einen Körper aufmerksam zu machen, welcher äufserst bequem während der Tageszeit die Polarität der Maschine erkennen läfst, und der, soviel ich weifs, zuerst von Hrn. Prof. Poggendorff für diesen Zweck empfohlen ist (Sitzungsbericht d. Berl. Akad. vom 18. März 1867). Ich meine das Pyroxylin- oder Pyropapier, wovon ein schmaler Streifen, durch die Finger gezogen, ziemlich stark und bleibend negativ elektrisch wird und daher vom negativen Pole eine Abstofsung erfährt. Hr. Prof. Riefs, welcher mir zuerst die Anwendung desselben zeigte, pflegt es an einem kleinen Stativ in einiger Entfernung hinter der linken Belegung aufzuhängen. Ich habe mich statt dessen auch wohl des ganz fein ausgewalzten Gutta-Percha, des sogenannten Gutta-Percha-Papiers bedient, weil dieses leichter zu beschaffen ist.

Nachdem die vorstehende Arbeit bereits dem Druck übergeben war, wurde ich von anderer Seite darauf aufmerksam gemacht, dafs Hr. Dr. Rollmann[2]) in seiner

1) Da Mancher mit der Erregung der Maschine noch nicht genügend vertraut seyn könnte, so möchte ich daran erinnern, dafs man ein dünnes Hartgummiplättchen am bequemsten und zugleich am stärksten elektrisirt, indem man dasselbe so auf eine polirte Holzfläche legt, dafs nur das äufserste Ende, welches man in der linken Hand hält, darüber hinaus ragt, und nun die Seiten des Plättchens abwechselnd mit dem Ballen der rechten Hand überfährt. Zeigt sich hierbei irgend ein Widerstand, so sind fast immer die in Betracht kommenden Flächen feucht und müssen zuvor durch Frottiren mit einem Tuche erwärmt werden. Eine dünne Fettschicht dagegen, welche leicht durch längeren Gebrauch entsteht, läfst sich am besten durch Alkohol beseitigen. Nachdem man die Platte zum letzten Mal gerieben, hebt man sie nicht gleich auf, bringt vielmehr zunächst die Scheibe der Maschine in Schwung. Hierauf wird jene möglichst parallel mit der Holzfläche gehoben und schnell, ohne einem andern Körper damit nahe zu kommen, flach an die obere Papierbelegung gelegt. Soll der betreffende Pol die entgegengesetzte Elektricität annehmen, so braucht man den Strom nur umzukehren.

2) Diese Ann. Bd. 131, S. 605 Anmerkung.

Digitized by Google

Mittheilung über die künstliche Darstellung der Blitzröhren schon beiläufig einer symmetrischen Aufstellung der Batterie nach Analogie der Poggendorff'schen Röhrenflasche und der von mir eingeführten Condensatoren gedacht und sie namentlich der besseren Isolirung und der gröfseren Bequemlichkeit wegen empfohlen hat; desgleichen, dafs Hr. Prof. Riefs den im Vorstehenden angeführten Riefs'schen Interruptor in seiner Mittheilung über die Elektrophormaschine als praktisches Werkzeug (Sitzungsbericht der Berl. Akademie vom 16. März 1874) nebst einem Commutator für dieselbe Maschine ausführlicher beschrieben hat.

II. *Ueber den Mechanismus der magnetischen Induction;*

von **O. Chwolson,**
Cand. Univ. Petrop.

(Zweite Abhandlung, die erste: S. 53 dieses Bandes.)

Einleitung.

Ich hatte mir vor längerer Zeit die Aufgabe gestellt, nachzuweisen, dafs die verschiedenartigsten Erscheinungen, welche wir bei der Induction des magnetischen Zustandes bemerken, hergeleitet werden können auf Grund der Annahme der Existenz drehbarer Molecularmagnete, deren Axen durch die äufsere Kraft nach einer Richtung hin gedreht werden. Hiebei hatte ich hauptsächlich die verschiedenen, oft recht sonderbaren und zum Theil gar nicht oder wenigstens sehr unvollkommen (s. z. B. Wiedemann, Galv. 2. Aufl. Bd. II. p. 625) erklärten Erscheinungen, welche das Auftreten des permanenten Magnetismus begleiten, im Auge. Meine Hauptaufgabe in dieser

Digitized by Google

zweiten Abhandlung wird es daher seyn, eine mathematische Theorie der magnetischen Induction im Stahl durchzuführen und, gestützt auf die Resultate dieser Theorie, jene Erscheinungen zu erklären. Abgesehen von der erwähnten theoretischen Entwickelung, werde ich den Erklärungen eine Anschauung zu Grunde legen, welche sich als eine Modification der Jamin'schen Theorie darstellt. Es wird sich nämlich herausstellen, dafs die Theorie der drehbaren Molecularmagnete zu Resultaten führt, welche mit einem Theile der Jamin'schen Annahmen in directem Widerspruch steht. Meine experimentellen Untersuchungen werden zeigen, dafs der Versuch die Frage zu Gunsten unserer Theorie entscheidet, sodafs sich die erwähnte Modification der Jamin'schen Theorie als eine Nothwendigkeit herausstellt.

Ich theile diese Abhandlung in fünf Capitel. Im ersten Capitel suche ich alle, bisher bei der Untersuchung des permanenten Magnetismus gewonnenen Resultate zusammenzustellen. Der freundliche Leser möge es mir nachsehen, wenn ich die Arbeiten von Jamin mit aller Ausführlichkeit darlege. Es liefs sich nicht vermeiden, da ich, wie gesagt, nachweisen will, dafs die Resultate von Jamin theilweise nicht richtig sind, während ein anderer Theil derselben meinen Erklärungen zu Grunde gelegt werden soll. Bei den Arbeiten anderer Forscher werde ich mich dagegen kürzer fassen und nur die Resultate derselben mittheilen. Im zweiten Capitel setze ich meine experimentellen Arbeiten auseinander, welche zu der erwähnten Modification der Jamin'schen Theorie geführt haben; es wird sodann die Erweiterung und nähere Prüfung derselben enthalten. Am Schlusse des Capitels gebe ich zur bequemeren Orientirung eine Uebersicht aller bisher gewonnenen Resultate. Das dritte Capitel enthält die mathematische Theorie der Induction im Stahl. Irre ich mich nicht, so ist dies der erste Versuch, die Erscheinungen des permanenten Magnetismus einer strengen theoretischen Untersuchung zu unterwerfen — wenn man den

Digitized by Google

Maxwell'schen Versuch, welcher kaum als gelungen betrachtet werden kann, ausnimmt. Die Resultate der Theorie werde ich in mehreren Hauptsätzen zusammenfassen. Auf Grund dieser Resultate erkläre ich im vierten Capitel nach einander die am Schluſs des zweiten aufgezählten Resultate und zwar, der gröſseren Bequemlichkeit wegen, in der entsprechenden Reihenfolge.

Ich war bemüht, aus der Theorie den quantitativen Verlauf gewisser Erscheinungen *a priori* abzuleiten und dieselben dann einer experimentellen Prüfung zu unterwerfen. Die Resultate dieser Arbeiten sind im letzten, fünften, Capitel niedergelegt.

Bei meinen experimentellen Arbeiten wurde mir die vielseitigste und liebenswürdigste Unterstützung zu Theil von Seiten der Herren Petruscheffsky und Wild und ich halte es für meine Pflicht, diesen Herren hiermit meinen aufrichtigsten Dank öffentlich auszusprechen.

In meiner ersten Abhandlung — diese Annalen, Ergänzungsb. VII, S. 53 — hatte ich mich ausschlieſslich mit der temporären Induction im weichen Eisen beschäftigt und den Nachweis zu liefern gesucht, daſs der eigenthümliche Verlauf der Magnetisirungsfunction für schwache inducirende Kräfte abgeleitet werden kann aus der Theorie der drehbaren Molecularmagnete. Es ist klar, daſs ich diesen Nachweis zu liefern hatte, ehe ich an die Untersuchung des permanenten Magnetismus ging, da es keinen Sinn gehabt hätte, die Theorie der drehbaren Molecularmagnete auf diesen Fall anzuwenden, ehe der bisherige scheinbare Widerspruch zwischen dem theoretischen und dem experimentell gefundenen Verlaufe der oben erwähnten Function aufgehoben war. Es sey mir gestattet, auf die Resultate der ersten Abhandlung noch einmal zurückzukehren, auf ein unbedeutendes Versehen in der Rechnung, welches auf den Sinn des Endresultates keinen Einfluſs hat, aufmerksam zu machen und an dieses Letztere ein paar Bemerkungen anzuknüpfen. Ich war ausgegangen von der Annahme, daſs die Molecularmagnete im weichen

Digitized by Google

Eisen den auf sie einwirkenden Drehungsmomenten absolut gar keinen individuellen Widerstand entgegensetzen und dafs ein jeder Molecularmagnet sich auf das Genaueste so einstellt, dafs die Richtung seiner Axe zusammenfällt mit der Richtung der Axe des magnetischen Momentes, welches gebildet wird von der Gesammtheit aller das betrachtete Theilchen umgebenden Molecüle. Bringt man die Südenden aller dieser Molecüle in einen Punkt, so bedecken die Nordenden die Oberfläche einer Kugel, aber nicht gleichförmig, sondern so, dafs die Dichtigkeit σ, mit welcher diese Enden über die Oberfläche verstreut sind, eine Function ist des Winkels z zwischen der Axe des Momentes und den Axen der Molecüle, deren Enden wir gerade betrachten. Wir setzten, siehe (4):

$$\sigma = a + b \cos z + c \cos 2z + \ldots\ldots,$$

wo $a, b, c \ldots\ldots$ unbekannt waren und blieben.

Bei der weiteren Ausrechnung schlich sich nun das folgende Versehen ein: in dem Ausdruck für μ zwischen den Formeln (5) und (6) ist der Factor $\frac{1}{2}$ weggelassen worden. In Folge dessen sind die Zahlenfactoren in allen ferneren Formeln um das Doppelte zu grofs, so vor Allem in den Formeln (9), (11), (13), (16), (17), (22), (26), (27), (28), (30) und (32). Das Endresultat wird also durch dies Versehen nicht alterirt und lautet folgendermafsen: es sey

$$u = 1 + \tfrac{2}{5} \cdot \frac{a - c + l - g + \ldots.}{\frac{b}{3} - \frac{d}{1.5} - \frac{f}{3.7} - \frac{h}{5.9} - \ldots\ldots},$$

$$t = \tfrac{37}{225} \cdot \frac{b - 3d + 5f - 7h + \ldots.}{\frac{b}{3} - \frac{d}{1.5} - \frac{f}{3.7} - \frac{h}{5.9} - \ldots},$$

dann hat die Magnetisirungsfunction K folgende Form:

$$K = \frac{N\mu}{D} u \left\{1 + t \frac{S^2}{D^2} + \ldots\right\},$$

wo N die Anzahl der Molecüle, μ das Moment Eines derselben und D die Directionskraft bedeuten. In der ersten Abhandlung stand in dem Ausdruck für K noch der überflüssige Factor 2. Dafs ich ferner im § 1 die

Digitized by Google

Buchstaben α und φ mehrmals verwechselt habe, wird der nachsichtige Leser wohl bemerkt und corrigirt haben. Die Formeln (2), (3) u. s. w. werden durch dies Versehen nicht alterirt.

Anknüpfend an die allgemeinen der ersten Abhandlung zu Grunde gelegten Anschauungen, sey es mir gestattet, ein paar Bemerkungen hinzuzufügen. In dem idealen Falle $S = \infty$ sind die Axen sämmtlicher Molecüle gleichgerichtet und folglich die rücktreibende Kraft gleich Null. Verschwindet die äufsere Kraft S, so verbleiben die Theilchen in ihren neuen Lagen im Zustande eines labilen Gleichgewichtes. Dies erklärt die bekannte Erscheinung des remanenten Magnetismus im weichen Eisen, welches mit einem Anker verbunden ist. Die Theilchen bilden zusammenhängende Reihen, welche wir „*Ketten*“ nennen wollen. Durch die Entstehung derartiger Ketten wird es uns im vierten Capitel gelingen, die höchst merkwürdigen Versuche von Jamin über die Einwirkung der Wärme auf den permanenten Magnetismus (*Comptes rendus LXXVII*, *p.* 1444) zu erklären. Der remanente Magnetismus im Eisen verschwindet, wenn jene, vielleicht geschlossenen, Ketten an irgend einer Stelle zerrissen werden. Dies erklärt den, von Hrn. Poggendorff — Pogg. Ann. LXXXV, S. 155 — erwähnten Umstand, dafs der remanente Magnetismus viel leichter zerstört wird als der permanente: es genügt eben die geringste Kraft, um die im labilen Zustande befindlichen Molecüle in ihre früheren Lagen zurückzubringen.

Es erübrigt gewisse Versuche von Hrn. Riecke — Pogg. Ann. CXLIX, S. 433 zu erwähnen. Hr. Riecke findet, dafs die Magnetisirungsfunction K für ein und dasselbe Stück Eisen sich nach Ablauf einer verhältnifsmäfsig sehr kurzen Zeit derartig verändert, dafs fast jede Aehnlichkeit mit dem früheren Verlauf der Function verschwindet. Die Zahlen, welche Riecke in den Jahren 1870 und 1872 erhielt und deren Verlauf, sind total verschieden. Dies zeigt, dafs die Magnetisirungsfunction im höchsten

Digitized by Google

Grade von dem molecularen Bau des Eisens abhängen muſs. Dies wird leicht begreiflich, wenn man bedenkt, daſs die Coëfficienten $a, b, c \ldots$ ganz durch den molecularen Bau bestimmt werden und daſs die Gröſsen λD, A_1, B_1 — siehe (29) jener Abhandlung — ferner M und K — siehe (30) und (32) — in hohem Grade von diesen Coëfficienten abhängig sind.

Capitel I.

§ 1.

Die Arbeiten von Jamin.

Wie oben erwähnt, wird in diesem Capitel eine Darlegung und Kritik der wichtigsten Arbeiten von Jamin und eine Zusammenstellung der von andern Forschern gefundenen Resultate enthalten seyn. Ich beginne mit Ersteren.

Die Arbeiten von Jamin sind zerstreut in zahlreichen Abhandlungen in den *Comptes rendus*. Einige von den Resultaten dieser Arbeiten sind aber schon früher von Anderen gefunden worden und wohl nur zufällig der Aufmerksamkeit des berühmten Gelehrten entgangen. Hierher gehört vor Allem die Abhandlung in *Comptes rendus T. LXXV*, 1872, *p.* 1789. Jamin findet, daſs zur Zerstörung des, durch einen starken Strom S hervorgerufenen magnetischen Zustandes ein viel geringerer Strom s genügt. Dieses Resultat ist aber schon viel früher von Wiedemann — Pogg. Ann. C, S. 237 — gefunden worden. Ferner bemerkt Jamin, daſs wenn man durch verkehrt gerichtete Ströme den Magnetismus eines Stabes auf Null gebracht hat, man einen Zustand erhält, der sich beträchtlich von dem ursprünglichen, neutralen Zustande unterscheidet. Der Unterschied besteht darin, daſs ein dritter Strom $-\sigma$, wo $\sigma < s$ ist, gar keine weiteren Veränderungen hervorruft, während bei Einwirkung des Stromes $+\sigma$ der Stab sich von Neuem magnetisirt und zwar

Digitized by Google

bedeutend stärker, als ein neutraler Stab bei der Einwirkung desselben Stromes. Auch dieses Factum ist bereits von Wiedemann, l. c., gefunden. Ich erwähne es trotzdem, da Jamin, gestützt auf dasselbe, seine geistreiche Theorie der magnetischen Oberflächenschichten entwickelt hat.

Die für uns wichtigste Arbeit von Jamin befindet sich *Comptes rendus T. LXXVII, p.* 1389. In dieser Arbeit betrachtet Jamin die Wirkung positiver und negativer Ströme auf bereits bis zu verschiedenen Momenten magnetisirte Stäbe. Unter *„negativen"* Strömen werden wir stets solche Ströme verstehen, deren Richtung der Richtung des *ersten* einwirkenden Stromes entgegengesetzt ist.

Zur Messung des im Stabe erweckten Magnetismus bediente sich Jamin der Abreifsungsmethode, indem er die Kraft f (*force d'arrachement*) maafs, welche nothwendig war, um ein Stück weichen Eisens von den Enden des untersuchten Stahlstabes abzureifsen. Der zu messende Magnetismus wurde dann proportional $\sqrt{f}$ gesetzt. Die Stäbe, welche Jamin untersuchte, hatten 300^{mm} Länge, 12^{mm} Breite und 30^{mm} Höhe.

Ich nenne *„temporär"* denjenigen Magnetismus, welcher im Stabe während der Einwirkung des Stromes inducirt wird; er besteht aus dem *„verschwindenden"* und dem *„permanenten"*.

Zuerst untersuchte Jamin den, durch einen Strom $+i$ hervorgerufenen verschwindenden Magnetismus y_k, wenn der Stab zuerst durch einen stärkeren Strom J_k den permanenten Magnetismus A_k erhalten hatte. Es stellte sich heraus, dafs y_k von A_k gänzlich unabhängig war, dafs also die, durch einen Strom $+i$ hervorgerufene Verstärkung des schon vorhandenen Magnetismus von der Gröfse dieses Letzteren unabhängig ist. Sey y der, durch den Strom i bei seiner Einwirkung auf den *neutralen* Stab hervorgerufene verschwindende Magnetismus, so ist $y_k = y$.

Ferner untersuchte Jamin die Wirkung eines nega-

Digitized by Google

tiven Stromes $-i$ auf den bereits bis zur Stärke A_k magnetisirten Stab. Sie bestand darin, dafs A_k während der Wirkung des Stromes sich bis auf $A_k - x_k - y'_k$ verringerte; nach Verschwinden desselben verblieben $A_k - x_k$, sodafs x_k die dauernde Verringerung des permanenten Magnetismus bedeutet. Es zeigte sich nun, dafs der verschwindende Magnetismus y'_k wiederum von A_k unabhängig und zwar gleich y war, dafs also der, durch einen Strom $\pm i$ hervorgerufene verschwindende Magnetismus von der Richtung desselben und der Gröfse des im Stabe bereits vorhandenen Magnetismus total unabhängig ist. Die Resultate von Jamin werde ich in zwei Gesetzen zusammenfassen. Indem wir statt der Ströme von verschiedenem Vorzeichen lieber annehmen, A_k könne verschiedenes Vorzeichen haben, erhalten wir aus dem Obigen das

I. Gesetz von Jamin. Der von einem Strom i hervorgerufene verschwindende Magnetismus ist unabhängig von der Gröfse und dem Vorzeichen des im Stabe vorgängig inducirten permanenten Magnetismus.

Endlich untersuchte Jamin die, durch den Strom $-i$ hervorgerufene dauernde Verringerung x_k des vorgängig inducirten permanenten Magnetismus A_k. Es sey $\pm x$ der permanente Magnetismus, welchen der Strom $\pm i$ im neutralen Stab hervorrufen würde. Jamin findet nun, dafs x_k ebenfalls von A_k unabhängig und zwar stets gleich $2x$ sey. Für den Fall $A_k = x$ ist dies klar, da sich bei Einwirkung des Stromes $-i$ der permanente Magnetismus x in $-x$ verwandelt. Das obige Resultat giebt das

II. Gesetz von Jamin. Die durch den Strom $-i$ hervorgerufene Verringerung des im Stabe vorgängig inducirten permanenten Magnetismus A_k ist von der Gröfse des Letzteren unabhängig und seinem absoluten Werthe nach gleich dem doppelten permanenten Magnetismus, welcher durch den Strom i im neutralen Stabe inducirt wird.

Ich erlaube mir die specielle Aufmerksamkeit des Lesers auf dies Gesetz zu lenken. Es wird sich zeigen, dafs die Theorie der drehbaren Molecularmagnete zu einem Re-

Digitized by Google

sultat führt, welches diesem Gesetz widerspricht, und eine genaue experimentelle Untersuchung wird die Unrichtigkeit desselben beweisen.

Um die Erscheinungen, welche am Anfang dieses § erwähnt wurden, zu erklären und die beiden obigen Gesetze abzuleiten, hat Jamin über die Vertheilung des freien Magnetismus im Stabe eine äufserst einfache Annahme gemacht, welche jedoch, wie wir weiter unten sehen werden, einer wichtigen Modification bedarf.

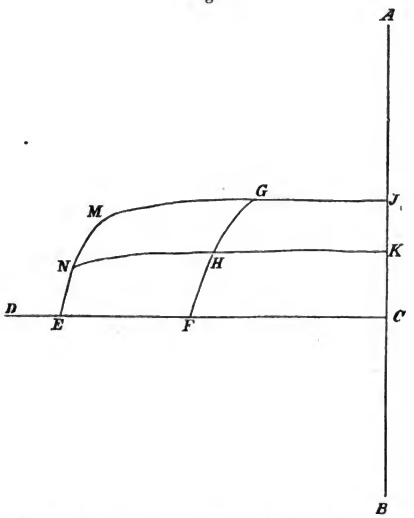
Die Theorie von Jamin besteht bekanntlich in Folgendem: er nimmt an, dafs der freie Magnetismus unter der Wirkung eines Stromes nur an der Oberfläche des Stabes inducirt werde und zwar bis zu einer Tiefe, welche mit der Stromstärke wächst.

In der durchdrungenen Schicht (wie wir uns kurz ausdrücken wollen) ist die Intensität des freien Magnetismus, solange die äufsere Kraft noch einwirkt, eine verhältnifsmäfsig starke. Verschwindet diese Kraft, so sinkt die Intensität bis zu einem Werthe, der eben den permanenten Magnetismus repräsentirt. Einer jeden Stromstärke entspricht eine gewisse Tiefe oder richtiger Dicke der durchdrungenen Schicht. Denken wir uns einen Schnitt *BCD* (Fig. 1) senkrecht zur Oberfläche des Magneten, sodafs die Linie *CD* die Normale darstellt. Denken wir uns auf jedem Punkte von *CD* eine Senkrechte errichtet und auf demselben ein Stück abgetragen, welches proportional wäre der in dem entsprechenden Punkte vorhandenen magnetischen Intensität, so erhalten wir während der Wirkung des Stromes *i* die Linie *FHGJ*, so dafs *FC* die Dicke der durchdrungenen Schicht darstellt. Hört der Strom auf, so verbleibt der permanente Magnetismus, welcher graphisch durch die Curve *FHK* dargestellt wird. Ein stärkerer Strom *J* würde den temporären Magnetismus *EMGJ* und den permanenten *EHK* hervorrufen. Denken wir uns nun, dafs nach Erlöschen des Stromes *J* wiederum der Strom *i* zu wirken anfängt, welcher nur bis zu der Tiefe *CF* freien Magnetismus hervorzurufen im

Digitized by Google

Stande ist. In diesem Falle wächst der permanente Magnetismus *FHK* der Schicht *FC* bis zu *FGJ* an, während der permanente Magnetismus *ENHF* der Schicht *EF*, auf

Fig. 1.



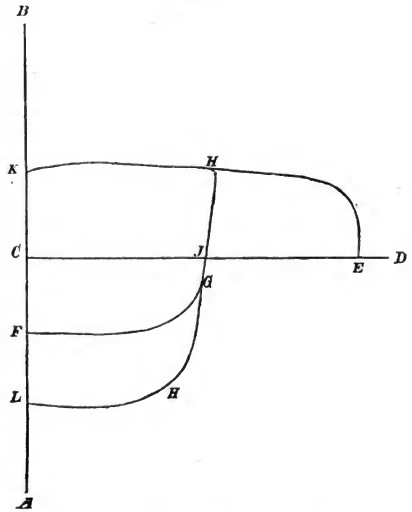
welche der Strom *i* keine Einwirkung hat, unverändert bleibt, — es bildet sich also lediglich der verschwindende Magnetismus *HGJK*, der nur von der Stromstärke *i*, nicht aber von der Gröſse des vorgängig hervorgerufenen permanenten Magnetismus *FNHK* abhängig ist. Somit ist ein Theil des I. Gesetzes erklärt.

Ein negativer Strom inducirt eine magnetische Schicht von derselben Tiefe, aber anderem Vorzeichen, als ein positiver. Graphisch wird diese Schicht dargestellt durch eine Curve von der anderen Seite der Normale *EC*. Es mag der Strom *J* den permanenten Magnetismus *KHE* erzeugt haben (Fig. 2). Hierauf beginnt der Strom $-i$ zu wirken, welcher, wenn der Stab neutral wäre, den temporären Magnetismus *LHJ* und den permanenten *FGJ*

Digitized by Google

erzeugen würde. Nach der Hypothese von Jamin soll nun der Strom $-i$ eben dieselbe Einwirkung haben, wenn

Fig. 2.



zuerst der permanente Magnetismus *KHE* erzeugt worden war, so dafs in der Schicht *CJ* der permanente Magnetismus *KHJ* zerstört und statt dessen der temporäre *LHJ* und nach Verschwinden des Stromes $-i$ der permanente *FGJ* inducirt werden. *Auf die Schicht JE soll dagegen der Strom $-i$ gar keine Wirkung haben* — dies kann, wie wir sehen werden, — nicht festgehalten werden; es widerspricht den aus der Theorie der drehbaren Molecularmagnete abzuleitenden theoretischen Resultaten. Nimmt man das Obige an, so wird es klar, dafs der verschwindende, durch die Fläche *FLHG* dargestellte Magnetismus wiederum von dem ursprünglichen permanenten Magnetismus *CKHE* unabhängig und gleich demjenigen verschwindenden Magnetismus seyn mufs, wel-

Digitized by Google

cher durch den Strom $+i$ im neutralen Stab hervorgerufen wird. Somit ist das I. Gesetz in allen seinen Theilen abgeleitet. Da ferner angenommen wird, dafs der Strom $-i$ auf die Schicht JE gar nicht einwirkt, so ist es klar, dafs die Verminderung des permanenten Magnetismus, welche durch die Fläche $KHJGF$ dargestellt wird, von der Gröfse des ursprünglichen Magnetismus KHE unabhängig und gleich $2x$ seyn mufs, wo, wie oben, x den im neutralen Stab durch den Strom $+i$ inducirten Magnetismus bezeichnet, welcher durch KHJ repräsentirt ist. — Somit wäre auch das II. Gesetz von Jamin abgeleitet.

Sehr leicht ist es nun auch, die am Anfang dieses § erwähnten, von Wiedemann zuerst entdeckten Erscheinungen zu erklären. Es sey mir gestattet, diese von Jamin gegebene Erklärung hier zu wiederholen, da sich aus derselben eine einfache Folgerung ziehen läfst, die mit der Wirklichkeit nicht im Einklange steht. Es möge der Strom J den permanenten Magnetismus KHE erzeugt haben; zu seiner Aufhebung genügt ein viel schwächerer negativer Strom $-i$, welcher das Zeichen des freien Magnetismus in der Schicht CJ verändert, so dafs der in dieser Schicht auftretende freie negative Magnetismus zusammen mit dem in der tieferen Schicht JE verbliebenen positiven nach Aufsen hin die Wirkung Null giebt, während der Stab sich in Wirklichkeit durch das Vorhandenseyn zweier über einander gelagerter magnetischer Schichten von verschiedenen Vorzeichen von einem neutralen unterscheidet. Es ist wohl klar, dafs ein neuer negativer Strom $-\sigma$, wo $\sigma < i$ ist, gar keine Wirkung haben kann, während ein positiver Strom $+\sigma$ durch Umwandlung des Magnetismus in der ihm zugehörigen Oberflächenschicht einen bedeutenden Theil der ursprünglichen positiven Magnetisirung wieder wird hervortreten lassen.

Aus dieser Betrachtungsweise gelangt man aber offenbar zu folgendem Resultat: *Wenn der positive Strom* $+\sigma = i$ *ist, so mufs offenbar der gesammte ursprüngliche*

Digitized by Google

Magnetismus wiederhergestellt werden. Dieses wichtige Resultat der Theorie von Jamin widerspricht der Theorie der drehbaren Molecularmagnete und wird durch den Versuch nicht bestätigt.

Um die Grundidee seiner Theorie zu stützen, hat Jamin eine Reihe von vier höchst interessanten Versuchen — *Comptes rendus T. LXXX, p.* 417 — veröffentlicht, aus deren letztem man eine wichtigste, von Jamin, wie es scheint, übersehene Folgerung ableiten kann. Die 4 Versuche von Jamin sind folgende:

1) Ein massiver Stahlstab wurde in eine Stahlröhre gelegt und nun das ganze System magnetisirt. Beim Herausnehmen des Stabes zeigte sich dieser bei schwachen Strömen ganz frei vom Magnetismus, welcher erst bei stärkeren Strömen bis zu ihm hindrang.

2) Stab und Röhre wurden stark magnetisirt und dann das ganze System durch einen schwächeren negativen Strom entmagnetisirt. Beim Herausnehmen des Stabes zeigte es sich, dafs sein früherer magnetischer Zustand positiv geblieben war, während der Magnetismus der Röhre das umgekehrte Vorzeichen erhalten hatte.

3) Ein Stab wurde magnetisirt und dann theilweise entmagnetisirt. Durch Wegnahme der Oberflächenschicht vermittelst einer Säure war Jamin im Stande, direct das Vorhandenseyn zweier übereinander gelagerter magnetischer Schichten von verschiedenem Vorzeichen nachzuweisen.

Noch wichtiger und folgenreicher ist der folgende Versuch:

4) Zwei Stahlröhren von verschiedener Wanddicke, aber gleichen Radien, wurden der Einwirkung wachsender magnetisirender Kräfte unterworfen. Bei schwachen Strömen zeigte sich der Magnetismus beider Röhren von gleicher Stärke. Dann sagt Jamin: „*A un moment donné la plus mince des lames se trouva saturée, c'est-à-dire pénétrée en totalité par l'aimantation. Pour un courant plus fort, on vit la deuxième lame se saturer à son tour, et ainsi les autres, ce qui prouve que la pro-*

Digitized by Google

fondeur des couches atteint successivement l'épesseur entière de chaque lame, et qu'elle augmente, consequément, aver l'intinsité.“ Um die Wichtigkeit dieses Resultates darzulegen, will ich mir erlauben, ausführlicher die Frage zu besprechen, welche durch richtige Interpretation dieses Versuches gelöst wird. Es ist einleuchtend, dafs das successive Eindringen des Magnetismus in das Innere des Körpers auf zwei sehr verschiedene Art und Weisen vor sich gehen könnte. Es könnte erstens dieses Eindringen so stattfinden, dafs nur längst erreichte Schichten auch gesättigt wären, Schichten, die weit entfernt sind von der letzten gerade erreichten Schicht, welche ihrerseits erst dann gesättigt seyn würde, wenn schon viel tiefer liegende Schichten erreicht wären. In diesem Falle würde die äufsere Wirkung des Stabes mit wachsenden Stromstärken aus zwei wohl zu unterscheidenden Gründen wachsen: erstens weil in tiefer liegenden, bisher neutralen Schichten freier Magnetismus auftreten würde und zweitens weil sich die Intensität oder Dichtigkeit des freien Magnetismus in den der Oberfläche näher liegenden Schichten verstärken und die Schichten sich dem Zustande der Sättigung, wenn auch asymptotisch, nähern werden.

Zweitens könnte das successive Eindringen aber auch so stattfinden, dafs die einmal erreichten Schichten sich sofort sättigen. In diesem Falle würden in den einmal erreichten Schichten keine weiteren Veränderungen stattfinden können und das Wachsen der äufseren Wirkung würde lediglich durch das successive tiefere Eindringen des freien Magnetismus bedingt seyn. Die in theoretischer Hinsicht wichtige Frage, welche der beiden besprochenen Möglichkeiten die richtige ist, wird nun durch den vierten Versuch von Jamin entschieden. In der That! nehmen wir den ersten Fall an. Dann müfsten offenbar die magnetischen Zustände beider verschieden dicker Röhren solange gleich bleiben, bis der freie Magnetismus die innere Fläche der dünneren Röhre erreicht hat. Bei fortgesetztem Anwachsen der Stromstärke müfsten dann die beiden Curven,

Digitized by Google

welche die Abhängigkeit der magnetischen Intensität der beiden Röhren von dieser Stromstärke darstellen, auseinandergehen: in den dünneren Röhren würde nur in den bereits früher erreichten Schichten ein Anwachsen der magnetischen Intensität stattfinden, in den dickeren dagegen aufserdem noch ein neues Auftreten von freiem Magnetismus in den tiefer liegenden Schichten. Nehmen wir aber den zweiten Modus des Eindringens an, so müfste die dünnere Röhre völlig gesättigt seyn, sobald der freie Magnetismus ihre innere Fläche erreicht hat und *gar kein Anwachsen* der magnetischen Intensität der dünneren Röhre dürfte bewirkt werden, sobald die Identität zwischen den magnetischen Intensitäten beider Röhren aufgehört hat. Ich zweifelte ursprünglich nicht daran, dafs der erstere Modus der richtige sey. Der vierte Versuch von Jamin konnte die wichtige Frage beantworten, aber zum Unglück waren die Worte *„la plus mince des lames se trouva saturée, c'est à dire pénetrée en totalité par l'aimantation“* nicht deutlich genug. *„Pénetrée en totalité“* könnte man verstehen im Sinne von: „völlig durchdrungen,“ d. h. bis zur inneren Fläche oder „völlig gesättigt.“ Um möglichen Mifsverständnissen auszuweichen, wandte ich mich an Jamin mit der Bitte um nähere Erklärung. Ich erhielt von dem berühmten Gelehrten eine freundliche Antwort, deren wichtigste Stelle lautet: *„Ce que j'ai voulu dire dans la phrase que vous m'indiquez c'est que la lame est non seulement pénetrée en totalité du magnétisme mais entièrement saturée de façon qu'elle ne prend non de plus si on la soumet à une aimantation nouvelle par un courant plus énergique.“* Es ist also kein Zweifel, dafs die dünnere Röhre *gesättigt* ist, sobald der freie Magnetismus ihre innere Fläche erreicht hat und hieraus folgt das wichtige Resultat:

Die beim Eindringen des Magnetismus in das Innere der Körper erreichten Schichten werden sofort gesättigt.

Dafs das Wort „sofort“ nicht buchstäblich zu nehmen

Digitized by Google

ist, brauche ich wohl kaum besonders zu bemerken. Das bekannte von Feilitzsch — Pogg. Ann. LXXX, S. 321 — gefundene Resultat, dafs die Dichte des freien Magnetismus an der Oberfläche bei allen Stromstärken constant bleibe, kann gewissermafsen als Stütze des obigen Gesetzes aufgefafst werden.

Das so gefundene Gesetz, nach welchem der freie Magnetismus in das Innere eindringt, erregte anfangs mein Erstaunen — es zeigt, *dafs ein Stahlblättchen schon bei sehr schwachen magnetisirenden Kräften gesättigt wird, so dafs der permanente Magnetismus desselben nicht mehr wächst, während der verschwindende Magnetismus des Theilchens mit der Stromstärke fortfährt zu wachsen.* Bei fortgesetzter Untersuchung fand ich aber, dafs die Theorie der drehbaren Molecularmagnete zu genau dem obigen Resultate hinführt. Im Cap. III werde ich zeigen, dafs wenn das Auftreten von permanentem Magnetismus im Stahltheilchen erst anfängt unter der directen Einwirkung einer die Coërcitivkraft überwindenden äufseren Kraft $S = \sigma$, so wird bei $S = 2\sigma$ das Theilchen 71 Proc., bei $S = 3\sigma$ über 85 Proc. und bei $S = 6\sigma$ bereits 98 Proc. derjenigen Quantität freien *permanenten* Magnetismus enthalten, welche in ihm, theoretisch gesprochen, eine unendlich starke magnetisirende Kraft hervorrufen würde. Da σ jedenfalls sehr klein ist, so ist die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Versuch eine vollständige.

Wir werden weiter unten sehen, dafs das I. Gesetz von Jamin absolut richtig, das II. dagegen falsch ist. Es ist nämlich die Annahme, dafs ein schwacher negativer Strom nur auf die ihm zugehörige Oberflächenschicht *CJ* (Fig. 2), nicht aber auf die tiefer liegende Schicht *JE* (ib.) einwirke, unrichtig. Die Theorie der drehbaren Molecularmagnete wird uns zu dem Resultate führen, dafs der geringste negative Strom, der kaum im Stande wäre, einem neutralen Stabe eine Spur von permanentem Magnetismus zu verleihen, auf sämmtliche schon vorhandene Schichten

Digitized by Google

einwirken und in Allem, bis zur tiefsten, die Intensität verringern mufs. Es waren also Vorgänge in den tieferen Schichten, welche Jamin entgangen sind. Dies erklärt sich leicht durch die von Jamin angewandte Methode des Abreifsens. Ueber diese Methode sind viele Untersuchungen angestellt worden — ich will mich mit einer kurzen Zusammenstellung der hierher gehörigen Literatur begnügen: D'Al Negro — Pogg. Ann. XXIX, S. 478; Ritschie — Pogg. Ann. XXXII, S. 534; Lenz und Jacoby — Pogg. Ann. XLVII, S. 401; Dub — Pogg. Ann. LXXIV, S. 464; Dub — Pogg. Ann. LXXX, S. 509; Tyndall — Pogg. Ann. LXXXIII, S. 1; Dub — Pogg. Ann. LXXXV, S. 239; Lamont — Pogg. Ann. LXXXIII, S. 354; Poggendorff — Pogg. Ann. LXXXV, S. 147; Dub — Pogg. Ann. CV; Waltenhofen — Pogg. Ann. CXLII, S. 264. Idem — Sitzungsber. der Wiener Akad. LXI, Bd. II, 1870, S. 739. Das Resultat aller dieser zahlreichen Arbeiten läfst sich mit Waltenhofen l. c., S. 749 so ausdrücken: „Eine Tragkraftzunahme im quadratischen Verhältnifs, zu deren Voraussetzung ein nicht ganz richtiges Raisonnement bisweilen geführt hat, ist nie beobachtet worden.“ Es ist kein Zweifel, dafs bei directer Berührung, wenn die Kräfte auf fast molecularen Entfernungen wirken, das Problem der Induction ein viel zu complicirtes wird, als dafs das einfache Lenz-Jacobi'sche Inductionsgesetz angewandt werden könnte, *ganz abgesehen* davon, dafs auch dies Letztere nur innerhalb gewisser Gränzen richtig ist. Da ferner bei der Methode der Abreifsung die tiefer liegenden Schichten offenbar weniger zur Geltung kommen, als die Oberflächenschichten, so ist es klar, dafs Veränderungen in diesen tieferen Schichten und die daraus resultirenden Erscheinungen von Jamin übersehen werden konnten, so dafs er zu dem nicht richtigen II. Gesetz gelangte, dessen Unrichtigkeit eben daher rührt, dafs der negative Stern auf alle vorhandenen Schichten einwirkt.

Digitized by Google

Die nach der Jamin'schen Methode erhaltenen magnetischen Intensitäten sind *zu klein* und der Fehler mufs wachsen mit der gemessenen Gröfse.

§ 2.

Ich gehe über zu einer kurzen Zusammenstellung anderer Untersuchungen über den permanenten Magnetismus und ich werde hierbei nur die Resultate mittheilen, ohne auf die bekannten Arbeiten zu recurriren. Manche von diesen Resultaten lassen sich direct erklären auf Grund der Jamin'schen Theorie, bei andern wird dies erst dann möglich, wenn mit jener Theorie die oben erwähnte Modification vorgenommen worden.

Unter den von Wiedemann — Pogg. Ann. C, S. 235, CVI, S. 169, CXVII, S. 195 und Galv., Aufl. 2, Bd. II, § 309—318 — gefundenen Resultate merken wir:

1) Die am Anfange des § 1 erwähnten Resultate.

2) *Wenn ein Stab durch den Strom $+J$ magnetisirt und hierauf durch den Strom $-i$ theilweise entmagnetisirt wird, so genügt der Strom $+i$ zur Wiederherstellung des früheren Zustandes nicht. Vielmehr ist dazu, so klein $-i$ auch gewesen seyn mag, stets wieder der Strom $+J$ nöthig.*

3) Im neutralen Stab wurde das permanente Moment A inducirt, durch den Strom $-i_B$ auf B verringert und endlich durch den Strom $+i_C$ auf C erhöht, wo $C < A$ ist. Um nun C wiederum auf B zu verringern, genügt nicht der Strom $-i_C$, sondern ist auch wiederum der Strom $-i_B$ nothwendig.

4) *Jeder Strom wirkt weniger stark, wenn vor ihm ein Strom von der umgekehrten Richtung gewirkt hat.* Dies folgt aus den bei Wiedemann, Gal. II, § 315, dargelegten Resultaten.

Ueber die Wirkung von Erschütterungen usw. giebt es viele Versuche; sie führen bekanntlich zu dem Resultate:

Erschütterungen während der Magnetisirung verstärken

Digitized by Google

den entstehenden, Erschütterungen nach der Magnetisirung verringern den entstandenen permanenten Magnetismus. In theoretischer Beziehung höchst interessant ist die folgende Erscheinung, Dub, Elektromagnetismus, Berlin 1861, S. 397:

Wenn durch die Wirkung eines negativen Stromes ein Stab völlig entmagnetisirt worden ist, so wird in Folge von Erschütterungen ein Theil des früheren Magnetismus wiedererscheinen.

Ich erlaube mir die specielle Aufmerksamkeit des Lesers auf diese Erscheinung und deren einfache Erklärung im Cap. IV zu richten.

Mateucci, Wertheim und Vilari — Wiedemann, Galv. II, § 499 finden, dafs *durch Ausdehnen* (beim Ziehen) des Stabes *während der Magnetisirung das temporäre Moment erhöht, das permanente verringert wird.* Allgemeiner kann man sagen, dafs durch Verringerung der Dichtigkeit (beim Ablassen usw.) das permanente Moment verringert wird.

Zum Schlufs will ich die letzten Arbeiten von Holz — Pogg. Ann. CLI, S. 69 und CLIV, S. 67 und von Bjoernstein — Pogg. Ann. CLIV, S. 336 erwähnen. Wegen der Details mufs ich auf die Originalabhandlungen verweisen. Hier will ich nur einige Resultate erwähnen. Holz findet z. B. (l. c. S. 82), dafs ein von Säure stark zerfressener Stab aus gehärtetem Stahl oft ein gröfseres permanentes Moment annimmt, als derselbe Stab, ehe er der Einwirkung der Säure ausgesetzt worden war unter dem Einflufs desselben Stromes. Ferner findet Holz, dafs durch das Glühen eines galvanoplastisch niedergeschlagenen Eisenstabes das spec. Gewicht desselben vergröfsert, der durch ein und denselben Strom hervorgerufene Moment verringert wird. Bei einem Stahlstab dagegen wird durch das Glühen das spec. Gewicht verringert, das Moment vergröfsert. (CLIV, S. 88). Bjoernstein findet, dafs die Gewichtseinheit Metall (Fe, Ni, Co) unter der Einwirkung einer bestimmten Kraft x ein grö-

Digitized by Google

ſseres temporäres Moment J erhält, wenn die Metalle in Pulverform mit Thonpulver innig vermengt, als wenn sie in massiven Stücken genommen werden.

§ 3.

Die verschiedenen Wirkungen der Wärme auf den magnetischen Zustand wollen wir nur kurz in mehreren Gesetzen zusammenstellen.

I. Gesetz. Der temporäre Magnetismus des weichen Eisens wächst mit der Erwärmung bis zu einem gewissen Maximum. (Galv. II, § 521.) *Wenn man Stahl bei einer bestimmten Temperatur magnetisirt, so wächst der temporäre Magnetismus bei Erhöhung und bei Erniedrigung der Temperatur* (l. c. § 523).

Bei der Weifsglühhitze verlieren Eisen und Stahl die Fähigkeit, sich zu magnetisiren.

II. Gesetz. Der permanente Magnetismus des Stahles sinkt bei Erwärmung und bei Abkühlung (Dufour, Pogg. Ann. XCIX, S. 479).

Wiedemann findet, daſs wenn der abgekühlte Magnet auf seine frühere Temperatur erwärmt wird, so geht wieder ein Theil des permanenten Magnetismus verloren. Dieser Theil wird bei erneuter Abkühlung wieder gewonnen.

Bei Erwärmung und wieder Abkühlung bleibt ein Theil des Magnetismus verloren. *Dieser Verlust ist* (Mauritius — Pogg. Ann. CXX, S. 385) *proportional dem gerade vorhandenen Gesammtmagnetismus.*

Höchst wichtig ist die Wirkung der Wärme auf theilweise entmagnetisirte Stäbe. Als Hauptresultat erhalten wir (Wiedemann — Pogg. Ann. CIII, S. 563 und Galv. II, §. 537) das

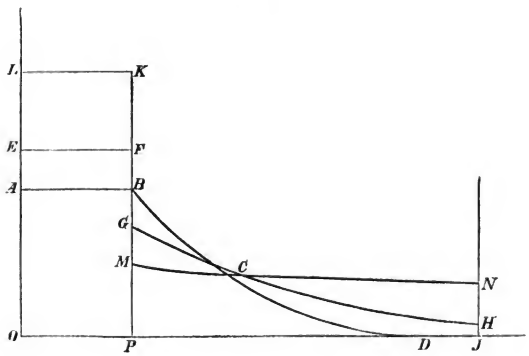
III. Gesetz. Wenn ein theilweise oder ganz entmagnetisirter Stab erwärmt und dann wieder abgekühlt wird, so wird hierbei ein Theil des verschwundenen Magnetismus wieder hervorgerufen (s. auch Dub, Elektromagn., S. 398, VI).

Digitized by Google

Die bisherigen Erklärungen dieser und der obigen Erscheinungen sind in hohem Grade unbefriedigend — s. z. B. Wiedemann, Galv. II, §. 540. Im Cap. IV werde ich zeigen, wie einfach sie aus der streng mathematisch durchgeführten Theorie der drehbaren Molecularmagnete hervorfliefsen.

Zum Schluſs will ich die höchst interessanten Resultate von Jamin — *Comptes rendus T. LXXVII, p.* 1444 — angeben. Er magnetisirte bei einer hohen Temperatur einen Stahlstab und erhielt einen nicht starken Magnetismus. *Nach Unterbrechung des Stromes blieb der Magnetismus unverändert, sank aber nachher bei der Abkühlung bis Null.* Die Curve *ABCD* (Fig. 3) giebt also die Veränderung des permanenten Magnetismus als Function der

Fig. 3.



Temperatur. Bei geringerer Antangstemperatur erhielt er einen anfänglichen Magnetismus *OE,* welcher gröfser war als im ersten Falle (*OA*); beim Oeffnen des Stromes verschwand aber nun ein Theil des Magnetismus und die

Digitized by Google

Curve fiel von *F* auf *G*. Bei der Abkühlung sank der Magnetismus, aber nicht bis Null, sondern bis zu einer endlichen, wenn auch kleinen Gröfse *JH*. Bei noch niedrigerer Anfangstemperatur (beim Magnetisiren) erhielt er die magnetische Intensität *OL*, welche nach Oeffnen des Stromes momentan auf *OP* und dann bis auf *JN* sank. Auch diese Erscheinungen werden wir im Cap. IV erklären.

Capitel II.

§ 1.

Ich gehe nun über zu meinen eigenen experimentellen Untersuchungen, welche nach der Zeit und den Zielen, die ich dabei im Auge hatte, in drei Abtheilungen zerfallen. Die erste Abtheilung ist im neuen physikalischen Cabinet der Universität Leipzig gemacht, wobei ich das Glück hatte, die vielfachen Rathschläge des Hrn. Geheimrath W. G. Hankel benutzen zu können. Bei diesen Arbeiten (im Sommer 1874) wufste ich noch nichts von den Arbeiten Jamin's. Die zweite Abtheilung wurde im Cabinet der Petersburger Universität ausgeführt (Frühling 1875); sie hatten den Hauptzweck, die Resultate von Jamin zu prüfen. Die dritte Abtheilung hatte den Zweck, einige aus meiner Theorie *a priori* abgeleiteten Resultate zu prüfen und ihre vollständigste Bestätigung durch den Versuch darzuthun. Diese Arbeiten werde ich in einem letzten Cap. V mittheilen.

Die von mir angewandte Methode bestand in allen Fällen darin, dafs ich die magnetischen Momente der Stäbe durch Ablenkung eines magnetischen Spiegels mafs. Es sey mir gestattet, ein paar Worte für diese Methode einzuschalten. Vor Allem wäre eine leicht zu erreichende Schärfe und Schnelligkeit des Experimentirens hervorzuheben. Was aber diese Methode vor der Abreifsungsmethode besonders auszeichnet, ist der Umstand, dafs beim Messen des Momentes *alle Theile des Stabes in*

Digitized by Google

gleicher Weise zur Geltung kommen, dafs das Moment gleichsam einen Zustand des Gesammtstabes repräsentirt und von zufälligen individuellen Eigenschaften eines bestimmten Theiles des Stabes, oder seiner Oberfläche so gut wie unabhängig ist. Bei der Abreifsungsmethode dagegen kommen nicht alle Theile des Stabes in gleicher Weise zur Geltung: die Oberflächenschichten dominiren, jede Veränderung der magnetischen Intensität in ihnen wird beim Messen sich sofort fühlbar machen; die tiefer liegenden Schichten dagegen kommen bei der von Jamin angewandten Methode gleichsam zu kurz und etwaige Veränderungen in denselben werden sich nicht so fühlbar machen, wie es seyn sollte. Denken wir uns, ein negativer Strom hätte an der Oberfläche eine Schicht entwickelt, deren Masse gleich ist der Masse der darunter liegenden magnetischen Schicht, welche aber ein anderes Vorzeichen hat. In diesem Falle müfste die Messung des magnetischen Zustandes logischerweise Null geben und dies Resultat erhält man auch beim Messen des Momentes; nach der Abreifsungsmethode würden wir dagegen unzweifelhaft ein endliches *negatives* Resultat erhalten, da die negative Oberflächenschicht über die untere positive dominirt und bei der Anziehung auf einen angelegten Eisenkörper den Ausschlag giebt — wir würden also offenbar ein falsches Bild von dem Zustande des Magneten erhalten.

Bei meinen ersten Arbeiten habe ich, wie oben erwähnt, von den Arbeiten von Jamin noch nichts gewufst. Auch ich untersuchte die Wirkung negativer Ströme und entdeckte dabei (Journal der phys. Gesellsch. an der P. Univ., T. VI, S. 136) selbständig das I. Gesetz von Jamin, die Unabhängigkeit des verschwindenden Momentes von dem vorhergehenden Zustand des Stabes; selbstverständlich hat Jamin die Priorität.

Meine Methode, die Wirkung negativer Ströme zu studiren, unterschied sich in einem wichtigen Punkte von derjenigen Jamin's. Jamin bestimmte nämlich die Wir-

Digitized by Google

kung verschieden starker negativer Ströme auf den neutralen und dann auf den stark magnetisirten Stab. Er erhielt auf diese Weise zum Vergleichen *nur je zwei Zahlen*, aus denen er die Gesetze I und II ableitete. Ich verfuhr dagegen ganz anders. Ich bestimmte die Einwirkungen Eines bestimmten negativen Stromes σ auf den nach einander bis zu verschiedenen permanenten Momenten magnetisirten Stab. Ich erhielt auf diese Weise nicht blos zwei, sondern eine *ganze Reihe von Zahlen*, durch deren Vergleich ich zu bestimmteren Resultaten gelangen konnte. Ferner mufs ich bemerken, dafs ich bei allen meinen Versuchen äufserst kleine Stahlstäbe benutzte — von 80^{mm} Länge und 1,3^{mm} Dicke. Ich hatte dabei den Vortheil, dafs ich ohne Mühe das Gebiet studiren konnte, welches jenseits der Gültigkeit des Lenz-Jacobi'schen Gesetzes liegt, dem Zustande der Sättigung der Stäbe nahe kommen konnte, ohne Ströme gebrauchen zu müssen, deren Intensität nur schwer constant zu erhalten wäre. Es war mir auch möglich, die eventuelle Gültigkeit der Gesetze bis an den äufsersten Gränzen zu verfolgen und so zu entscheiden, ob die Gesetze absolut oder nur angenähert richtig sind.

Von den vielen Zahlenreihen, die ich erhielt und die mich zu dem I. Gesetz von Jamin führten, will ich nur eine hier angeben.

Für den Fall eines positiven Stromes $\sigma = +6$ erhielt ich die folgende Tabelle:

I. Positives $\sigma = +6$.

S_i =	6	10	12	16	20	36	45,3
m_i =	1,9	4,0	5,0	7,0	8,1	10,5	11,3
$M_i(+\sigma)$ =	6,1	8,3	9,2	11,0	12,3	14,5	15,5
$M_i(+\sigma) - m_i$ =	4,2	4,3	4,2	4,0	4,2	4,0	4,2

In der ersten Reihe stehen die Stromstärken S_i, welche ich successive auf den Stab einwirken liefs und welche in demselben die in der zweiten Reihe enthaltenen perma-

Digitized by Google

nenten Momente m_i inducirten. Auf jeden dieser Momente liefs ich nun den Strom $\sigma = +6$ einwirken, wodurch die Momente m_i temporär auf $M_i\,(+\sigma)$ erhöht wurden; diese Werthe sind in der dritten Reihe enthalten. Die durch den Strom $\sigma = +6$ inducirten verschwindenden Momente $M_i\,(+\sigma) - m_i$ sind in der letzten, vierten, Reihe enthalten. Wie wir sehen, sind sie unabhängig von dem vorgängig im Stabe erzeugten permamenten Momente.

Für negative Ströme erhielt ich die Tabelle:

II. Negatives $\sigma = -6$.

S_i	=	6	12,4	17,8	25,5	33,2	65,4	126,2
m_i	=	1,1	4,0	7,6	9,2	10,5	13,0	14,4
$M_i\,(-\sigma)$	=	− 5,2	− 4,1	− 2,8	− 2,1	− 1,4	± 0,0	+ 1,5
$m_i\,(-\sigma)$	=	− 1,1	+ 0,1	+ 1.2	+ 1,9	+ 2,9	+ 4,2	+ 5,6
$M_i\,(-\sigma) - m_i\,(-\sigma)$	=	4,1	4,2	4,0	4,0	4,3	4,2	4,1

Auch hier stehen in der ersten Reihe die Stromstärken, welche ich auf den Stab successive einwirken liefs, wobei die in der zweiten Reihe stehenden permanenten Momente m_i inducirt wurden. Auf jeden dieser Momente liefs ich den negativen Strom $\sigma = -6$ einwirken, wobei ich die temporären Momente $M_i\,(-\sigma)$ — siehe dritte Reihe — erhielt. Nach dem Oeffnen des Stromes verblieben dann die temporären Momente $m_i\,(-\sigma)$ — siehe vierte Reihe; es waren also durch den Strom $\sigma = -6$ die verschwindenden Momente $M_i\,(-\sigma) - m_i\,(-\sigma)$ erzeugt worden, deren Werthe in der letzten Reihe stehen. Die Identität dieser Werthe mit den für positives $\sigma = +6$ erhaltenen führt zu dem *I. Gesetz von Jamin.* ***Dies Gesetz erweist sich also nicht etwa als ein angenähertes, wie Jamin selbst vermuthet, sondern als ein bis zu den äufsersten Gränzen absolut richtiges.***

§ 2.

Als ich mich an das Studium der Jamin'schen Abhandlungen machte, erkannte ich bald, dafs das von mir gefundene Gesetz identisch sei mit dem I. Gesetz von

Digitized by Google

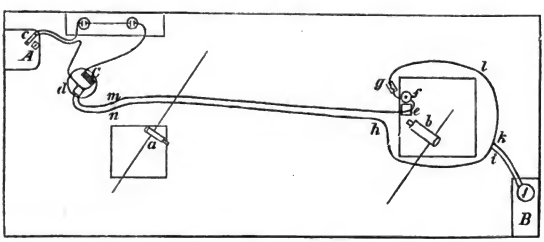
Jamin. Dabei erstaunte ich aber nicht wenig über das II. Gesetz — dafs auch die, durch den negativen Strom $-\sigma$ erzeugte Verminderung des permanenten Momentes von der Gröfse dieses Letzteren unabhängig und stets gleich $2x$ sey, wenn x das durch den Strom σ im neutralen Stab erzeugte permanente Moment bedeutet. Es genügt ein Blick auf die Tabelle II des vorigen §, um sich davon zu überzeugen, dafs meine Zahlen dies Gesetz nicht bestätigen. Wir erhalten nämlich für die, durch den Strom $\sigma = -6$ erzeugte Verminderung $m_i - m_i(-\sigma)$ des permanenten Momentes m_i die Zahlen:

$$m_i - m_i(-\sigma) = 2{,}2 \quad 4{,}9 \quad 6{,}4 \quad 7{,}3 \quad 7{,}6 \quad 8{,}8 \quad 8{,}8.$$

Nach dem II. Gesetze von Jamin müfsten diese Zahlen untereinander gleich seyn!

Um nun die Frage nach der Richtigkeit des II. Gesetzes in's Klare zu bringen, begann ich im Frühjahr 1875 die zweite Abtheilung meiner Untersuchungen. Dank der aufserordentlichen Güte und Zuvorkommenheit des Hrn. Pr. Petrusscheffsky, wurde mir im Gebäude der Petersburger Universität im früheren physikalischen Cabinet ein grofses Zimmer zur Verfügung gestellt, in welchem sich zum Aufstellen der Apparate zwei gute Fundamente befanden. Die Vertheilung der Apparate ist dargestellt auf der Fig. 4. In der einen Ecke des Zimmers befand sich der Magnetometer *A*, ein mag-

Fig. 4.



netischer Spiegel in einer stark dämpfenden Messingkugel. Die Ablenkungen desselben wurden durch das Fernrohr *a*

Digitized by Google

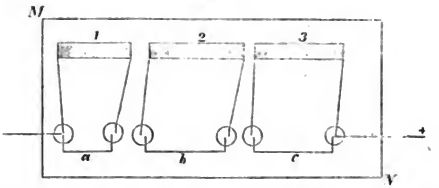
beobachtet. In der entgegengesetzten Ecke des Zimmers stand der vorzügliche Galvanometer *B*, dessen Ablenkungen durch das Fernrohr *b* beobachtet wurden. Bei *C* auf einem festen Tische lag die Spirale, von 175^{mm} Länge und 22^{mm} *innerem* Durchmesser. Da die untersuchten Stahlstäbe nur 80^{mm} Länge hatten, so befanden sie sich innerhalb der Spirale im homogenen magnetischen Felde; in der That zeigt die Rechnung, dafs die inducirende Kraft am Ende nur um 1 Proc. kleiner war, als in der Mitte der Stäbe. Durch ein hölzernes, längs der Achse durchbohrtes Prisma, welches in die Spirale genau hineinpafste, wurden die Stahlstäbe genau in der Achse der Spirale fixirt. An der andern Seite des Magnetometers *A* befand sich eine zweite Spirale, von nur zwei weiten Windungen, durch welche die Wirkung der Hauptspirale *C* ziemlich genau compensirt wurde, so dafs selbst sehr starke Ströme den Spiegel nur wenig ablenkten. Die Batterie befand sich bei *D*. Der Strom ging von *D* zur Spirale *c*, zum Commutator *d*, dann in der Richtung *dnhiklg* zum Magazin *g*, zum Apparat *f*, der weiter unten beschrieben seyn wird, dem Stromschliefser *e*, wieder zum Commutator *d*, zur Spirale *C* und zurück zur Batterie *D*. Bei *ik*, welcher Theil aus sehr dickem Draht bestand, war eine Zweigleitung zum Galvanometer *B* angebracht. Durch Umschlagen des Commutators *d* wurde der ganze Theil *dnhilgemd* ausgeschlossen; dies geschah bei Anwendung sehr starker Ströme, deren Intensität nicht gemessen wurde. Die Batterie bestand für gewöhnlich aus 1—3 grofsen Daniel'schen Elementen. Das Magazin *g* ist besonders auf Fig. 5 dargestellt: ein Brett mit mehreren Vertiefungen, die mit Quecksilber gefüllt; 1 2 u. 3 sind Holzstäbe, um welche dünner Eisendraht gewunden ist. Durch Herausnehmen der Kupferdrähte *a b* u. *c* konnten jene Drähte in den Stromkreis eingeschalten werden.

In *f* (Fig. 4) befand sich ein besonderer sehr einfacher Apparat, der nur dazu diente, die Stromstärke schnell und sicher auf eine bestimmte *vorher gewünschte* Gröfse zu

Digitized by Google

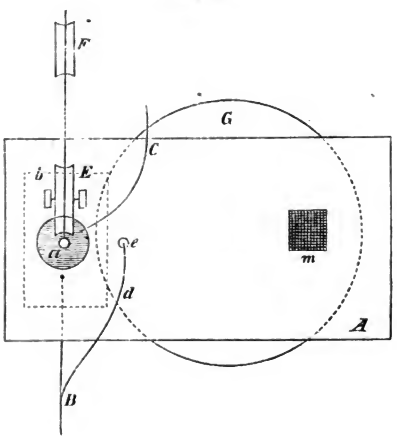
bringen. Dies brauchte ich bei meinen Versuchen beständig, indem ich z. B. ein und denselben Strom $\pm\sigma$ auf

Fig. 5.



verschiedene vorgängig erzeugte permanente Momente einwirken liefs. Ich brauchte also einen Apparat, mit dem ich schnell und sicher Widerstände ein- und ausschalten konnte, deren Werth ich aber nicht zu wissen brauchte. Ich hatte eben nur das Fadenkreuz des Fernrohrs *b* auf einen vorher bestimmten Theilstrich einzustellen. Der Apparat stand neben dem Fernrohr *b*. Da er sich als äufserst praktisch erwiesen hat, so will ich ein Paar Worte über seine Einrichtung sagen. Er ist dargestellt auf

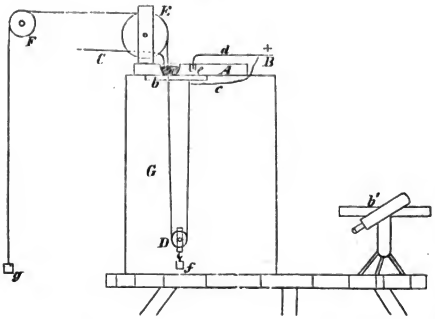
Fig. 6.



Digitized by Google

Fig. 7 von der Seite und auf Fig. 6 von oben. In beiden Figuren sind die entsprechenden Theile mit gleichen Buchstaben bezeichnet. Auf dem Cylinder *G* liegt das Brett *A*,

Fig. 7.



welches bei *a* eine runde Durchbohrung hat. Unterhalb dieser ist ein Stück Pappe *b* befestigt, welches von unten die Oeffnung schliefst, aber selbst mit einer Nadel durchbohrt ist. Das Brett ragt vorn über den Cylinder heraus und wird durch das Gewicht *m* äquilibrirt. Von rechts tritt der Strom ein in den Draht *B*, der sich verzweigt. Der Zweig *c* geht unter das Brett; an sein Ende ist ein dünner Eisendraht gelöthet, der nach unten über die bewegliche Rolle *D* läuft, an welcher das Gewicht *f* hängt; dann hinauf durch die Oeffnung *a* über die festen Rollen *E* u. *F* zu dem Gewichte *g*.

Das Ende des anderen Drahtes *d* kann nach Belieben in die Vertiefungen *e* oder *a* gesteckt werden; in *a*, welches mit Quecksilber gefüllt ist, taucht auch das Ende des Drahtes *C*, durch welchen der Strom weiter geht. Die Gewichte *f* u. *g* äquilibriren einander und es genügt daher, das Gewicht *f* mit der freien linken Hand beim Beobachten durch das Fernrohr *b* zu senken oder zu heben, um schnell gröfsere Widerstände ein- und auszuschalten. Bei einiger Uebung kann dies sehr schnell ge-

Digitized by Google

schehen, da man denselben Apparat, nachdem der Strom geschlossen, zum schnellen Dämpfen des Magnetes im Galvanometer *B* (Fig. 4) gebrauchen kann, indem man auf leicht begreifliche Weise durch schnelles Heben und Senken des Gewichtes *f* den Schwingungen des Magnetes folgt. Die schliefsliche Einstellung konnte mit gröfster Genauigkeit erreicht werden, da der Contact bei *a* ein vollständiger ist. Den Theil *EFg* gedenke ich so zu verändern, dafs sich der Draht um einen Cylinder windet. Sollte der Eisendraht ganz ausgeschlossen werden, so wurde das Ende des Drahtes *d* in das Quecksilber von *a* getaucht. Als erste Arbeit unternahm ich die Prüfung der Jamin'schen Gesetze. Meine früher erhaltenen Zahlen hatten das II. Gesetz von Jamin nicht bestätigt. Der Grund hiervon mochte in der von mir angewandten Methode liegen: wie erwähnt, liefs ich denselben Strom $-\sigma$ auf eine ganze Reihe von Momenten einwirken, bis zu denen ich den Stab successive magnetisirte. Nach jeder Einwirkung des Stromes $-\sigma$ wurde der Stab von Neuem magnetisirt und zwar stärker, als im vorhergehenden Falle. Es konnte nun möglich seyn, dafs in Folge des Hin- und Hermagnetisirens die wachsende Wirkung des Stromes $-\sigma$ sich würde herleiten lassen. Zur Prüfung der Jamin'schen Gesetze verfuhr ich daher folgendermafsen: ich liefs zuerst den Strom $+\sigma$ auf den neutralen Stab und dann den Strom $-\sigma$ auf den vorgängig stark magnetisirten Stab einwirken. Die Resultate stehen in folgender Tabelle:

16. April 1875.

$\sigma = 26{,}7$	$S = \infty$	$\sigma = -26{,}7$
$M = 5{,}9$	—	$-1{,}2$
$m = 3{,}3$	14,8	$+1{,}3\,..\,13{,}5$
$\mu = 2{,}6$	—	2,5

Der Strom $\sigma = +26{,}7$ inducirte im neutralen Stab das temporäre Moment $M = 5{,}9$ und das permanente $m = 3{,}3$, so dafs also das verschwindende Moment $\mu = 2{,}6$

Digitized by Google

war. Hierauf wurde durch einen sehr starken Strom S das permanente Moment 14,8 hervorgerufen. Als dann der Strom $\sigma = -26{,}7$ einwirkte, erhielt ich das temporäre Moment $-1{,}2$ und als permanentes verblieb $+1{,}3$. Das verschwindende Moment war also gleich 2,5. Da in unserem Falle der Strom $+\sigma$ im neutralen Stab das Moment 3,3 hervorgerufen hatte, so müfste die durch den Strom $-\sigma$ erzeugte Verminderung des vorgängig inducirten permanenten Momentes 14,8 genau 6,6 betragen. Es ist aber dies Moment von 14,8 auf 1,3 gesunken; *es hat also nicht* 6,6, *sondern* 13,5 *verloren*. Das II. Gesetz ist also nicht richtig. Dagegen zeigt uns die fast völlige Gleichheit der Zahlen 2,6 und 2,5, deren eine sich auf ein positives σ und neutralen Stab, deren andere auf ein negatives σ und fast gesättigten Stab beziehen, dafs das I. Gesetz völlig richtig ist. Wir haben somit erhalten:

1) *Das I. Gesetz von Jamin ist absolut richtig, bis zu den äufsersten Gränzen der Sättigung.*

2) *Das II. Gesetz von Jamin ist nicht richtig.*

Jamin selbst hielt beide Gesetze für nur angenähert richtig.

Der von Jamin begangene Fehler besteht in der Annahme, dafs der negative Strom nur auf die ihm zugehörige Oberflächenschicht einwirkt, die darunter befindlichen Schichten dagegen unberührt läfst. Die im nächsten Capitel zu entwickelnde Theorie zeigt, wie schon oft erwähnt, *dafs der geringste negative Strom auf alle Schichten einwirken und deren Intensität vermindern mufs.*

Ich stellte mir nun die Aufgabe, diese Verminderung in der magnetischen Intensität der unteren Schichten zu studiren und ich gelangte hierbei zu Resultaten, die mich anfangs nicht wenig frappirten, die aber ebenfalls aus unserer Theorie direct folgen, wie ich später fand.

Zuerst suchte ich die Abnahme der magnetischen Intensität der *verschiedenen Schichten* bei Einwirkung *eines und desselben negativen Stromes* zu bestimmen. Den Begriff einer „Schicht“ erhielt ich auf folgende Weise: ich

Digitized by Google

liefs auf den Stab successive die Ströme 19,4, 25, 30,4 usw. einwirken, deren jeder um *„eine Schicht“* tiefer den freien Magnetismus eindringen liefs. Da jene Ströme beliebig gewählt waren, so waren auch die Schichten natürlich ganz verschieden, doch war das gleichgültig, da ich die Abnahme ihrer Momente in Procenten bestimmte.

In der nächsten Tabelle gebe ich eine von den vielen Beobachtungsreihen, die ich erhalten:

21. April 1875.

S	m	Δ	σ_{15}	δ	$h = \frac{\delta}{\Delta}$.
19,4	2,5	—	3,2	—	—
—	—	1,5	—	1,1	0,72
25	4,0	—	4,3	—	—
—	—	2,0	—	1,2	0,60
30,4	6,0	—	5,5	—	—
—	—	1,2	—	0,8	0,66
35,1	7,2	—	6,3	—	—
—	—	1,2	—	0,7	0,58
40	8,4	—	7,0	—	—
—	—	1,0	—	0,5	0,50
45	9,4	—	7,5	—	—
—	—	1,5	—	0,6	0,40
57	10,9	—	8,1	—	—
—	—	3,7	—	1,5	0,41
S_1	14,6	—	9,6	—	—
—	—	3,2	—	1,2	0,38
S_2	17,8	—	10,8	—	—

Stablänge, wie immer 80^{mm}, Dicke 1,3^{mm}.

In der ersten Colonne stehen die Stromstärken, welche ich auf den Stab successive einwirken liefs (die beiden letzten wurden nicht gemessen) und welche im Stab die in der zweiten Colonne enthaltenen permanenten Momente m inducirten. In der dritten Colonne stehen die Differenzen Δ der Gröfsen m. Erinnert man sich an das oben gefundene Gesetz, nach welchem der freie Magnetismus

Digitized by Google

in das Innere der Körper eindringt, so wird es klar, dafs *die Gröfsen Δ die permanenten Momente der einzelnen Schichten darstellen.* Auf jeden der Momente m liefs ich nun den negativen Strom — 15 einwirken, wobei erstere einen bleibenden Verlust σ_{15} erlitten, dessen Werthe in der vierten Colonne stehen. Wäre das II. Gesetz von Jamin richtig, so müfsten die für σ_{15} gefundenen Zahlen, die, wie wir sehen, von 3,2 bis 10,8 variiren, untereinander gleich seyn. Die fünfte Colonne enthält die Differenzen δ der Werthe σ_{15}. Man begreift wohl ohne Weiteres, dafs diese δ die Abnahmen der Momente der einzelnen Schichten darstellen. Die letzte Colonne enthält die Quotienten $\frac{\delta}{\Delta}$, welche anzeigen, *welcher Bruchtheil des in jeder Schicht enthaltenen Momentes durch den Strom — 15 vernichtet worden ist.* Nach Jamin sollten alle δ, also auch alle h Null seyn.

Das erste aus den Zahlen der letzten Colonne allenfalls zu ziehende Resultat könnte seyn, dafs die Wirkung eines negativen Stromes mit der Tiefe abnimmt. Dieses Resultat hat nur wenig Wichtigkeit, da es eine Folge der Unhomogenität des Stabes seyn kann, dessen verschiedene Schichten einen sehr verschiedenen molecularen Bau haben mögen. Unvergleichlich wichtiger ist dagegen das folgende Resultat, welches aus den Zahlen der letzten Colonne sich herauslesen läfst. Wir wissen, dafs in der Oberflächenschicht das magnetische Moment völlig verschwindet und ersetzt wird durch ein ebenso grofses Moment von anderem Vorzeichen, dafs also die Oberflächenschicht gleichsam 200 Proc. verliert. Man könnte nun erwarten, dafs in der nächsten darunter liegenden Schicht ebenfalls ein Wechsel des Vorzeichens stattfinden, das neue, negative, Moment aber kleiner seyn würde, als das gewesene positive; noch tiefer müfste man auf eine Schicht stofsen, wo das alte Moment nur vernichtet, d. h. der Verlust 100 Proc. seyn würde und dann erst würden die Schichten folgen, in denen nur eine Abschwächung des

Digitized by Google

vorgängig erzeugten Momentes stattfinden müfste. Die Zahlen der letzten Colonne zeigen aber, *dafs die Verringerung des Momentes der unteren Schichten nie* 100 *Proc. erreicht; die Zahlen δ sind sämmtlich kleiner als die Δ, d. h. in der Oberflächenschicht vernichtet der negative Strom das vorhandene positive Moment und ersetzt es durch ein negatives von derselben Stärke; in der nächstfolgenden Schicht dagegen findet nicht einmal ein Zerstören des vorhandenen Momentes, sondern nur eine Abschwächung desselben statt.*

Die Verminderung von 200 Proc. springt in unserem Beispiel plötzlich auf 72 Proc. Ich brauche wohl erst nicht zu bemerken, dafs dies Alles so zu verstehen ist, dafs die Schichten, in denen eine Verminderung des Momentes zwischen 200 Proc. und 100 Proc. stattfindet, alle zusammen von äufserst geringer Dicke sind. Dieses unerwartete Resultat läfst sich aber, wie wir sehen werden, aus der Theorie der drehbaren Molecularmagnete direct ableiten. Nachdem ich die Wirkung *eines bestimmten negativen Stromes* auf die *verschiedenen Schichten* untersucht hatte, ging ich über zur Untersuchung der Wirkung *verschieden starker negativer Ströme* auf *ein und dieselbe Schicht.* Zu dem Zweck verfuhr ich so, dafs ich den Stab nur bis zu den beiden permanenten Momenten 12,8 und 17,7 magnetisirte; im zweiten Falle war also eine Schicht mit dem Moment $\tau = 4{,}9$ hinzugefügt. Die Verringerungen K dieses Momentes (in Bruchtheilen), durch die Wirkung der negativen Ströme $s = 10, 15, 20$ usw., findet man in folgender Tabelle. Vorerst bestimmte ich die Wirkungen dieser Ströme s auf den neutralen Stab.

25. April 1875.

s	m	$\sigma_{12,8}$	$\sigma_{17,7}$	D	$K = \frac{D}{\tau} = \frac{D}{4,9}$.
10	0,1	4,9	6,5	1,6	0,33
15	0,8	8,0	10,0	2,0	0,41
20	1,8	10,8	13,4	2,6	0,53

Digitized by Google

s	m	$\sigma^{12,8}$	$\sigma_{17,7}$	D	$K=\frac{D}{\tau}=\frac{D}{4,9}$.
25	3,2	13,3	16,2	2,9	0,60
30	4,7	16,1	19,4	3,3	0,67
40	8,0	19,7	23,0	3,3	0,68

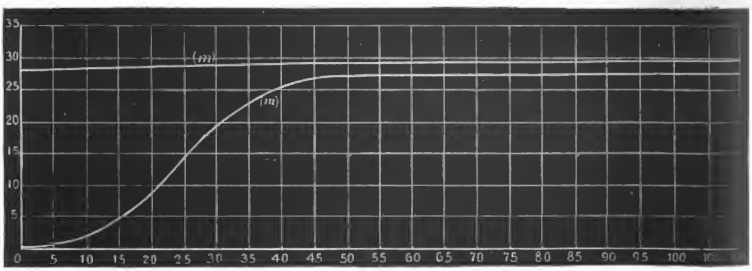
In der ersten Colonne stehen die Intensitäten der negativen Ströme s, deren Wirkungen auf die tief liegende Schicht $\tau = 4,9$ bestimmt werden soll und welche im neutralen Stab die permanenten Momente m induciren. Durch diese Ströme s, negativ genommen, wurde das durch einen starken Strom im Stab inducirte Moment 12,8 um die Gröfsen $\sigma_{12,8}$ und ebenso hierauf das Moment 17,7 um die Gröfsen $\sigma_{17,7}$ verkleinert, deren Werthe in den Colonnen 3 und 4 stehen. — In der fünften Colonne stehen die Differenzen D der Werthe $\sigma_{17,7}$ und $\sigma_{12,8}$; diese Differenzen sind offenbar nichts anderes, als die durch die Ströme $-s$ hervorgerufenen Verminderungen des Momentes der Schicht $\tau = 17,7 - 12,8 = 4,9$. Die letzte Colonne enthält die gesuchten Verhältnisse $= \frac{D}{\tau} = \frac{D}{4,9}$, d. h. diese Verminderungen in Bruchtheilen. Wir sehen, dafs *der verschwindende Bruchtheil desto gröfser ist, je stärker der wirkende negative Strom ist.* Ich mache nochmals darauf aufmerksam, dafs hier von einer Schicht die Rede ist, die unvergleichlich tiefer liegt, als diejenigen Schichten, in welchen dieselben Ströme s bei ihrer Einwirkung auf einen neutralen Stab freien permanenten Magnetismus erzeugen würden; — von einer Schicht, in welcher sich nach dem II. Gesetze von Jamin überhaupt gar keine Einwirkung der negativen Ströme $-s$ zeigen dürfte und in welcher vorgängig durch einen beliebigen sehr starken Strom freier Magnetismus erzeugt worden ist.

Die Möglichkeit, die Gröfsen K zu bestimmen und das Wachsen derselben mit s, welches man *a priori* erwarten durfte, spricht zu Gunsten der von Jamin erfundenen allgemeinen Anschauung, welche indefs einer gewissen oft erwähnten Modification unterzogen werden mufs. Es er-

Digitized by Google

übrigt nun von einer letzten Versuchsreihe zu sprechen. Ich stellte mir die Aufgabe, zu untersuchen, ob sich wohl ein tiefer gehender Unterschied in dem allgemeinen Charakter derjenigen zwei Curven auffinden läfst, welche erstens das verschwindende Moment μ des weichen Eisens und zweitens das permanente Moment m des Stahles als Functionen der Stromstärke darstellen. Diese Frage schien mir in theoretischer Hinsicht sehr wichtig. In der That! Unterschieden sich die beiden Curven (μ) und (m) nur in quantitativer Beziehung, während ihr allgemeiner Charakter ein und derselbe wäre, so wäre *a priori* der Schlufs berechtigt, dafs die Ursachen und Gesetze der Entstehung des verschwindenden und des permanenten Momentes ein und dieselben sind, dafs das permanente Moment nur gleichsam eine Modification des verschwindenden ist. Ist dagegen der Unterschied zwischen den beiden Curven ein qualitativer, ihr allgemeiner Charakter grundverschieden, so müfste man daraus folgern, ***dafs die Gesetze und Ursachen der Entstehung der beiden erwähnten Momente total verschiedene sind.***

Fig. 8.



Derartige Versuche sind mit so kleinen Stäben noch nie gemacht worden und doch kann man nur bei dünnen Stäben den Anfang der Curve genau studiren. Die von mir für (m) erhaltene Curve ist auf der Fig. 8 gezeichnet; die Abscissen sind die Stromstärken, die Ordinaten die

Digitized by Google

inducirten permanenten Momente. *Die obere Curve stellt die Fortsetzung der unteren vor*, so dafs also die Stromstärken bis 220 gehen. Wir sehen, dafs die Curve (*m*) zwei scharf ausgeprägte Umbiegungen besitzt und bei verhältnifsmäfsig schwachen Strömen bereits aufhört, bemerklich zu steigen. Die Curve (*μ*) dagegen hat, wie bekannt, einen total anderen Charakter. Sie unterscheidet sich innerhalb sehr weiter Gränzen kaum von einer Geraden und steigt noch immer gleichmäfsig an bei solchen Stromstärken, bei welchen die Curve (*m*) bereits längst sich in eine zur Abscissenaxe fast parallele Gerade verwandelt hat. Dieser Vergleich genügte meinem Zweck und ich unterliefs es daher, zu einer Untersuchung der Magnetisirungsfunction zu schreiten. Aus der Betrachtung der Curve Fig. 8 folgt unzweideutig das Resultat:

Die Curven (m) und (μ) haben einen total verschiedenen Charakter und daraus folgt, dafs die Grundgesetze, nach denen sich das permanente Moment im Stahl und das verschwindende im weichen Eisen entwickeln, total verschiedene seyn müssen.

§ 3.

Es sey mir gestattet, alle bisher erwähnten Resultate noch einmal zusammenzustellen und zwar in derjenigen Ordnung, in welcher sie im Cap. IV auf Grund der im Cap. III zu entwickelnden Theorie erklärt werden sollen. Ich numerire sie zur gröfseren Bequemlichkeit und dieselben Nummern werden im Cap. IV wiederkehren.

1) Gewisse Versuche von Villari, welche ich erst im Cap. IV erwähnen werde.

2) Die Curven (*m*) und (*μ*) haben einen total verschiedenen Charakter (s. S. 570).

3) Das Gesetz, nach welchem der freie Magnetismus in das Innere eindringt (s. S. 549).

4) Die Dichtigkeit des freien Magnetismus auf der Oberfläche ist constant — Feilitzsch (s. S. 550).

Digitized by Google

5) Ueber die Wirkung negativer Ströme — Wiedemann, Jamin (s. S. 540).

6) Das I. Gesetz von Jamin (s. S. 542).

7) Das II. Gesetz von Jamin ist unrichtig (s. S. 565).

8) Das Gesetz, nach welchem ein negativer Strom auf tiefer liegende Schichten einwirkt (s. S. 568).

9) Der 2. Versuch von Wiedemann (s. S. 552).

10) Der 3. Versuch von Wiedemann (s. S. 552).

11) Der 4. Versuch von Wiedemann (s. S. 552).

12) Die Resultate von Holz (s. S. 553).

13) Die Resultate von Bjoernstein (s. S. 553).

14) Die Wirkung von Erschütterungen und Ausdehnungen während und nach der Magnetisirung (s. S. 553).

15) Die Wirkung von Erschütterungen auf theilweise oder ganz entmagnetisirten Stahl (s. S. 553).

16) Die Wirkung der Wärme auf die Magnetisirung; I. Gesetz (s. S. 554).

17) Das II. Gesetz (Dufour s. S. 554).

18) Die Wirkung der Wärme auf theilweise oder ganz entmagnetisirten Stahl; III. Gesetz (Wiedemann s. S. 554).

19) Die Wärmeversuche von Jamin (s. S. 555).

Diejenigen Erscheinungen, welche schon früher von Wiedemann und Anderen auf Grund der Theorie der drehbaren Molecularmagnete erklärt worden sind, lassen wir in dieser Abhandlung gänzlich unerwähnt.

Capitel III.

§. 1.

Ich gehe nun über zur Entwickelung der Theorie der drehbaren Molecularmagnete in ihrer Anwendung auf die Erscheinungen des permanenten Magnetismus im Stahle. Ich habe es mir dabei als Grundprincip hingestellt, diese Theorie auf möglichst faſsbaren und dem Verstande greifbaren Grundlagen aufzubauen. Jede Spur von willkür-

Digitized by Google

lichen Annahmen habe ich vermieden und mich einzig und allein auf einen Satz gestützt, den die einfachste Ueberlegung als eine logisch nothwendige Folge einer unzweifelhaften Thatsache darstellt. Ein Versuch, die Theorie der drehbaren Molecularmagnete auf die Erscheinungen des permanenten Magnetismus auszudehnen, ist gemacht worden von Maxwell. Seine Theorie — *A Treatise on Electr. and Magnetism. Vol. II.* § 444 — besteht bekanntlich in Folgendem: *er nimmt an, dafs wenn ein Stahltheilchen durch die äufsere Kraft um einen Winkel β gedreht wird, der kleiner ist, als ein gewisser Winkel β_0, so kehrt das Theilchen völlig in seine frühere Lage zurück; ist dagegen $\beta > \beta_0$, so kehrt das Theilchen nicht völlig in die frühere Lage zurück, sondern bleibt um einen Winkel $\beta - \beta_0$ abgelenkt.* Es ist rein unmöglich, sich eine klare Vorstellung von den inneren physikalischen, oder, richtiger gesagt, mechanischen Vorgängen zu machen, welche eine derartige sonderbare Bewegung der Theilchen bedingen. Es ist dies eben eine rein willkürliche Annahme, die, *a priori* gefafst, aus keinen denkbaren Grundursachen sich *ableiten* läfst. Es wird sich zeigen, dafs die *Rechnung* uns zu Resultaten führen wird, welche zufällig jenen Maxwell'schen Annahmen auf das Genaueste entgegengesetzt sind.

Die oben erwähnte unzweifelhafte Thatsache, auf welche ich mich stütze, besteht darin, dafs der Stahl Kohle enthält, dafs zwischen und neben den Eisenatomen im Stahl sich Kohlenatome befinden. Da diese Kohlenatome unter dem Einflusse der magnetisirenden Kraft nicht mit gedreht werden, so ist die aus jener Thatsache logischerweise resultirende Folge, dafs

Die Kohlenatome sind der freien Drehung der Eisenatome hinderlich.

Dieses ist der einzige, wohl kaum „hypothetisch“ zu nennende Satz, von dem ich ausgehe, und die gesammte weitere Entwickelung ist lediglich eine Folge dieses Satzes. Die Nähe oder gar Berührung der Kohlenatome kann auf

Digitized by Google

sehr verschiedene Weise der Drehung „hinderlich“ seyn und es ist keine Möglichkeit, für ein bestimmtes Theilchen jene „Behinderung“ in die Rechnung einzuführen. Wenn wir aber ein Konglomerat von äufserst vielen Theilchen vor uns haben, so erhalten wir eine gewisse *mittlere* Art und Gröfse der Behinderung und wir können annehmen, dafs sich dieselbe auf alle Theilchen in gleicher Weise bezieht, wobei das Gesammtresultat mit der Wirklichkeit übereinstimmen wird. Es ist leicht, diese *„mittlere Wirkung“* aufzufinden. Die Kohle hindert den Molecularmagnet, sich zu drehen, — folglich ist eine gewisse endliche Kraft nöthig, um denselben in Bewegung zu versetzen. Wenn das auf den Molecularmagnet wirkende Kräftepaar zu klein ist, so verbleibt derselbe in Ruhe; die Bewegung fängt an, sobald jede von den beiden, das Kräftepaar bildenden Kräfte s einen gewissen Werth σ erreicht hat. Ist $s > \sigma$, so wird das Molecül um einen Winkel γ gedreht, welcher kleiner ist, als derjenige Winkel, um welchen sich dasselbe Theilchen drehen würde, wenn es völlig frei wäre, wenn es nicht durch die Kohlentheilchen in seiner Bewegung behindert würde. Die Drehung wird nämlich *nicht* dann aufhören, wenn das aus den Kräften S (äufsere Kraft) und T (Directionskraft) resultirende Moment Null ist, sondern wenn es auf einen gewissen kleinen Werth σ' gesunken ist, der zu klein ist, um trotz der „Verhinderung“ das Theilchen weiter zu drehen. Für ein singuläres Molecül wird σ' gewifs einen ganz anderen Werth haben als σ. Während der Drehung konnte sich das Molecül gleichsam der Einwirkung der Kohlentheilchen entziehen und in diesem Falle wäre $\sigma' < \sigma$; oder aber die gegenseitige Berührung wurde stärker, das Theilchen wurde zwischen die Kohlentheilchen hineingezwängt und in diesem Falle wäre $\sigma' > \sigma$. Da nun aber die ursprünglichen relativen Lagerungen der Kohlen- und Eisen-Atome alle nur denkbaren waren, so müssen auch die neuen Lagerungen alle nur denkbaren seyn und der mittlere Werth der σ' mufs mit dem mittleren Werth der

Digitized by Google

σ übereinstimmen. Nennen wir die Kraft s die *tangentiale Kraft* (sie wirkt senkrecht zur Axe des Molecüles), so können wir sagen, *dafs die mittlere tangentiale Kraft σ, welche nöthig ist, um einen Molecularmagnet in Bewegung zu setzen, bei allen Lagen desselben constant ist.* Wir beginnen nun mit der Betrachtung eines bestimmten Theilchens und seiner Bewegungen. Es sey s, die tangentiale Componente der äufseren Kraft S, gröfser als σ und der Ablenkungswinkel gleich φ. Dieser Winkel wird bestimmt durch die Bedingung, dafs die tangentiale Resultante der Kräfte S und T (Directionskraft) gleich σ sey. Es sey (Fig. 9) OA die ursprüngliche Richtung der Axe des betrachteten Theilchens; $AOC = \alpha$, wo OC die Richtung der Kraft S ist. OB die abgelenkte Lage der Axe; $AOB = \varphi$. Zum Gleichgewicht mufs die Bedingungsgleichheit erfüllt seyn:

$$S \sin(\alpha - \varphi) - T \sin \varphi = \sigma$$

oder

(1) . . . $S \sin(\alpha - \varphi) = T \sin \varphi + \sigma$.

Verschwindet die Kraft S, so verbleibt eine rücktreibende Kraft ε, welche

(2) . . . . . $\varepsilon = T \sin \varphi$

ist. Da $S \sin(\alpha - \varphi)$ eben die tangentiale Kraft s ist, so können wir (1) so schreiben:

(3) . . . . . $s = \varepsilon + \sigma$.

Wir wollen nun genauer betrachten, was geschehen wird, wenn die äufsere Kraft S erlöscht. Es sey $\varepsilon < \sigma$; in diesem Falle wird das aus seiner Normallage abgelenkte Theilchen offenbar in seine frühere Lage nicht zurückkehren, sondern in der neuen unbeweglich verharren. Mit wachsendem S und φ bleibt dies richtig, bis $\varepsilon = \sigma$ wird. Für diesen Fall sey $\varphi = \beta$; β ist also die äufserste Ablenkung, in welcher das Theilchen verharrt, wenn die Kraft S erloschen ist. Es ist leicht, den Winkel β und die ihm entsprechende tangentiale Kraft ξ zu finden. Da in diesem Falle $\varepsilon = T \sin \beta = \sigma$ ist, so erhalten wir

Digitized by Google

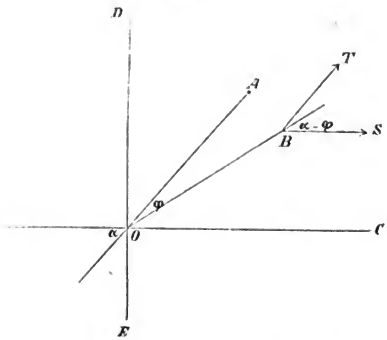
(4) . . . . . $\sin\beta = \frac{\sigma}{T}$

und ferner

(5) . . . . . $\xi = 2\sigma,$

wie man aus (3) erhält, wenn man $s = \xi$ und $\varepsilon = \sigma$ setzt. Ist die tangentiale Kraft $s > 2\sigma$, so ist $\varphi > \beta$ und folg-

Fig. 9.



lich *die rücktreibende Kraft* $\varepsilon > \sigma$, so dafs das Theilchen, nach Erlöschen von S, nicht in Ruhe verharren kann: es wird sich zurückdrehen und zwar wird die Rückdrehung so lange dauern, bis die tangentiale Kraft $T\sin\beta$ gleich σ geworden ist, d. h. so lange, bis der Ablenkungswinkel nur noch β ist. Dies Resultat ist unabhängig von der Gröfse der ursprünglichen Ablenkung. So grofs also die wirkende Kraft und der Winkel der ursprünglichen Ablenkung auch gewesen sind, stets kehrt das Theilchen in ein und dieselbe Lage zurück, welche gegen die normale Lage um einen constanten Winkel β abgelenkt ist, welcher durch die Gleichung (4) definirt ist. — Denken wir uns um die Normallage der Axe des betrachteten Molecularmagneten einen Kegel herumgelegt, den geometrischen Ort aller Geraden, die mit dieser Axe den Winkel β bilden. Diesen Kegel nun wollen wir den *Stabilitäts-Kegel* nennen. Befindet sich die Axe des Molecüles innerhalb

Digitized by Google

des Kegels, so bleibt das Theilchen unbeweglich, wenn die Kraft S erlöscht; befindet sich aber die Axe aufserhalb des Kegels, so fällt sie stets auf den Mantel desselben zurück, wenn die Kraft S aufhört zu wirken. Wir unterscheiden drei Lagen des Molecüles: die ursprüngliche in der Axe des Kegels, d. i. die *normale*; die beliebige innerhalb des Kegels, die *stabile*, und endlich auf dem Mantel des Kegels, die *extreme*.

Aufserdem werden wir der Kürze wegen von *positiver* und *negativer* Lage sprechen, je nach der Richtung der Axendrehung: entweder in der durch den ersten positiven Strom bedingten Richtung oder in der entgegengesetzten. Aus dem Obigen erhalten wir den

Grundsatz I. Ist die auf den Molecularmagnet wirkende tangentiale Kraft s zwischen o und σ, so verbleibt derselbe in Ruhe in der normalen Lage; ist s zwischen σ und 2σ, so wird das Theilchen um einen Winkel φ gedreht, der zwischen o und β liegt, wo $\sin\beta = \frac{\sigma}{T}$, und es verbleibt in der neuen Lage, wenn die magnetisirende Kraft erloschen ist; für ein beliebig grofses $s > 2\sigma$, ist die Drehung $\varphi > \beta$ und das Theilchen behält ein und dieselbe constante Ablenkung β, wenn die magnetisirende Kraft S erloschen ist.

Man übersieht leicht, dafs dies das gerade Gegentheil von der Maxwell'schen Annahme ist. Kürzer können wir das Resultat so ausdrücken:

Satz A. Der Molecularmagnet fängt an sich zu drehen, wenn $s = \sigma$ ist; er erreicht seine gröfstmöglichste permanente Ablenkung, wenn $s = 2\sigma$ wird.

Wir gehen über zur Betrachtung der Einwirkung einer tangentialen Kraft s auf ein Theilchen, welches bereits vorgängig aus der normalen Lage um einen Winkel φ herausgedreht wurde und welches sich daher in der stabilen oder in der extremen Lage befindet.

Seien ξ_1 die zum Weiterdrehen, ξ_2 die zum Rückdrehen

Digitized by Google

nothwendigen Kräfte, dann ist bei stabiler Lage offenbar (natürlich als minimale Gränzwerthe):

$$(6) \ldots\ldots \xi_1 = \sigma + T \sin \varphi,$$

$$(7) \ldots\ldots \xi_2 = \sigma - T \sin \varphi.$$

Für die extreme Lage erhalten wir die Specialwerthe:

$$(8) \ldots\ldots \begin{cases} \xi_1^{(0)} = 2\sigma, \\ \xi_2^{(0)} = o. \end{cases}$$

Hieraus erhalten wir den

Grundsatz II. Befindet sich ein Molecularmagnet in der extremen Lage, so genügt die geringste Kraft, um ihn nach der normalen Lage hin zurückzudrehen und in die stabile überzuführen. Die extreme Lage ist also nach der einen Seite hin labil.

Von diesem Satz werden wir weiterhin beständig Gebrauch machen. Aufserdem erhalten wir

Satz B. Befindet sich der Molecularmagnet in der stabilen Lage, so ist es viel leichter, ihn zurück- als ihn weiterzudrehen.

In letzterem ist eine Kraft nöthig (ξ_1), die jedenfalls $> \sigma$ seyn mufs.

§ 2.

Nachdem wir die Bewegung eines einzelnen Molecüles ausführlich untersucht haben, gehen wir nun über zur Berechnung des in einem Konglomerat von sehr vielen solchen Molecülen durch eine äufsere Kraft S hervorgerufenen permanenten Momentes N. Wir denken uns die sämmtlichen Molecüle mit ihren einen Enden nach einem Punkte versetzt; dann bedeckt die Gesammtheit der anderen Enden eine Kugeloberfläche. Es sey wieder α der Winkel zwischen der Axe OA (Fig. 9) eines beliebigen Theilchens und der Richtung der Kraft S; der Winkel α wird von o bis π gerechnet. Die auf das Molecül einwirkende „tangentiale“ Kraft s ist gleich

Digitized by Google

$$s = S \sin \alpha,$$

sie ist daher am gröfsten bei denjenigen Theilchen, welche zu beiden Seiten nahe der Ebene DE ($\perp$ zu S) liegen. Diese Theilchen wollen wir der Kürze wegen die ***mittleren***, die übrigen die ***seitlichen*** nennen. Die Bewegung beginnt bei wachsenden S, wenn $S = \sigma$ geworden ist — und zwar bei den mittleren Theilchen. Für wachsende S haben wir nun zwei Perioden zu unterscheiden.

Erste Periode.

Sie entspricht dem Falle S zwischen σ und 2σ. Während S von σ bis 2σ wächst, breitet sich die Bewegung der Theilchen von den mittleren nach beiden Seiten hin aus. Da die gröfste vorkommende tangentiale Kraft $\left(\text{für } \alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ gleich S ist, so ist es klar, dafs in der ersten Periode gar kein Theilchen bis zur extremen Lage gedreht wird. Erlöscht daher die Kraft S, so verbleiben alle Theilchen in ihren respectiven Lagen — das permanente Moment ist also gleich dem temporären. Für ein gegebenes S werden die sämmtlichen Theilchen, die aus der normalen Lage gebracht worden sind, einen Gürtel zu beiden Seiten der Flasche DE bilden, welcher durch die beiden Specialwerthe von α, α_1 und α_2 definirt wird, wo $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} + \gamma$ und $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \gamma$ ist, wo wiederum γ mit S wächst. Da

$$s = S \sin \alpha_1 = S \sin \alpha_2 = \sigma \text{ ist, so erhalten wir}$$

$$(9) \quad \ldots \quad \begin{cases} \cos \alpha_1 = -\dfrac{\sqrt{S^2 - \sigma^2}}{S} \\ \cos \alpha_2 = +\dfrac{\sqrt{S^2 - \sigma^2}}{S}. \end{cases}$$

Diejenigen Theilchen, deren Axen mit S einen Winkel α bilden, der $> \alpha_1$ oder $< \alpha_2$ ist, participiren noch nicht an der Bewegung. ***Es soll nun das Moment N jenes Gürtels bestimmt werden bei gegebener äufserer Kraft S zwischen σ und 2σ.***

Digitized by Google

Es sey OB die neue Lage des Theilchens OA; $AOB = \varphi$ wird bestimmt durch die Gleichung (s. (1)):

(10) . . . . . $S \sin(\alpha - \varphi) = T \sin \varphi + \sigma.$

Hierbei bekommt das Moment nach der Richtung OC den Zuwachs:

(11) . . . . . $n = \mu [\cos(\alpha - \varphi) - \cos \alpha].$

Aus (10) erhalten wir:

$$\sin \varphi = \frac{-\sigma (S \cos \alpha + T) + S \sin \alpha \sqrt{S^2 + 2 S T \cos \alpha + T^2 - \sigma^2}}{S^2 + 2 S T \cos \alpha + T^2}$$

und

$$\cos \varphi = \frac{S \sigma \sin \alpha + (S \cos \alpha + T) \sqrt{S^2 + 2 S T \cos \alpha + T^2 - \sigma^2}}{S^2 + 2 S T \cos \alpha + T^2}.$$

Bestimmt man hieraus $\cos(\alpha - \varphi)$ und setzt es in (11) ein, so erhält man:

(12) . . . $n = \mu \left\{ \frac{-\sigma T \sin \alpha + (S + T \cos \alpha) \sqrt{S^2 + 2 S T \cos \alpha + T^2 - \sigma^2}}{S^2 + 2 S T \cos \alpha + T^2} - \cos \alpha \right\}$

Durch Multiplication mit $\frac{1}{2} \sin \alpha \, . \, d\alpha$, Ersetzung von μ durch M, wo M dem unendlich grofsen S entspricht und Integration nach α von α_1 bis α_2, erhalten wir das gesuchte Moment N des Gürtels:

(13) . . $N = \frac{1}{2} M \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left\{ \frac{-\sigma T \sin \alpha + (S + T \cos \alpha) \sqrt{S^2 + 2 S T \cos \alpha + T^2 - \sigma^2}}{S^2 + 2 S T \cos \alpha + T^2} - \cos \alpha \right\} \sin \alpha \, d\alpha.$

Digitized by Google

Berechnet man nun zuerst das unbestimmte Integral Ω, so erhält man:

$$(14) \quad . \quad . \quad \Omega = \tfrac{1}{2} M A + \tfrac{1}{2} M B - \tfrac{1}{2} M C, \text{ wo}$$

$$(15) \quad \begin{cases} A = -\dfrac{\sigma T}{2 S^2 T^2}\left[-S T \sin\alpha + (S^2+T^2)\dfrac{\alpha}{2} \right. \\ \qquad\qquad \left. - (T^2 - S^2) \operatorname{arc\,tg} \dfrac{T-S}{T+S} \operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2}\right], \\ B = -\dfrac{T}{2 S^2 T^2}\left\{\dfrac{\sqrt{(S^2+2ST\cos\alpha+T^2-\sigma^2)^3}}{3}\right. \\ \qquad + (S^2-T^2)\sqrt{S^2+2ST\cos\alpha+T^2-\sigma^2} \\ \qquad \left. + (S^2-T^2)\,\sigma \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\sqrt{S^2+2ST\cos\alpha+T^2-\sigma^2}}{\sigma}\right\}, \\ C = -\dfrac{\cos^2\alpha}{2}. \end{cases}$$

Setzt man dies in (14) und dann die Gränzwerthe des Integrales α_1 und α_2, so erhält man einen sehr verwickelten 16gliedrigen Ausdruck, der sich auf keine Weise vereinfachen läfst. Wenn man für α_1 und α_2 seine Werthe aus (9) einsetzt, so vereinfacht sich der Ausdruck in hohem Grade. Es ist nämlich:

$$\sqrt{S^2+2ST\cos\alpha_1+T^2-\sigma^2} = T - \sqrt{S^2-\sigma^2}$$

$$\sqrt{S^2+2ST\cos\alpha_2+T^2-\sigma^2} = T + \sqrt{S^2-\sigma^2}$$

und dies ist der einzige Fall, dafs sich die in A und B vorkommenden Wurzeln wirklich ausziehen lassen. Berücksichtigt man hierauf die Identität:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{T^2-S^2}{T^2+S^2} : \frac{\sqrt{S^2-\sigma^2}}{\sigma} - \operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt{S^2-\sigma^2}}{S^2-2\sigma^2+T^2}\,\sigma = \arccos\frac{\sigma}{S},$$

so erhält man:

$$(16) \quad N = \frac{M}{2}\cdot\frac{S}{T}\left\{\frac{4-\left(\frac{\sigma}{S}\right)^2}{3}\sqrt{1-\left(\frac{\sigma}{S}\right)^2} - \frac{\sigma}{S}\arccos\frac{\sigma}{S}\right\},$$

als Moment des Gürtels, also überhaupt des ganzen Konglomerates in der ersten Periode, d. h. für S zwischen σ und 2σ.

Digitized by Google

Setzt man $\sigma = o$, so erhält man die bekannte Weber'sche Formel (Roeber, Pogg. Ann. CXXXIII, S. 53):

$$N = \tfrac{2}{3} M \frac{S}{T}.$$

Wir setzen zur Abkürzung:

$$(17) \quad \ldots \quad \frac{M}{2} \frac{\sigma}{T} = A.$$

$$(18) \quad N = A \left\{ \frac{4 - \left(\frac{\sigma}{S}\right)^2}{3 \frac{\sigma}{S}} \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{S}\right)^2} - \arccos \frac{\sigma}{S} \right\}.$$

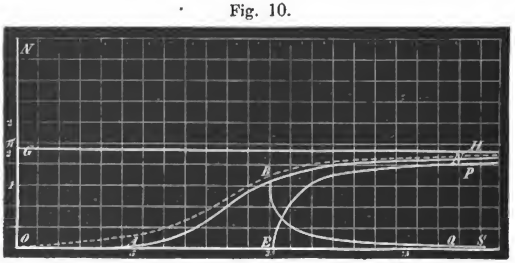
Bei $S = \sigma$ ist natürlich $N = 0$.

Ich habe N berechnet für S gleich $\frac{4}{3}\sigma$, $\frac{5}{3}\sigma$ und 2σ und habe erhalten:

$$(19) \quad \ldots \quad \begin{cases} N(\sigma) &= 0 \ldots A. \\ N(\frac{4}{3}\sigma) &= 0{,}2862 \ldots A. \\ N(\frac{5}{3}\sigma) &= 0{,}6925 \ldots A. \\ N(2\sigma) &= 1{,}1176 \ldots A. \end{cases}$$

Von besonderem Interesse wird uns die letzte Zahl seyn, wenn wir finden werden, dafs $N(\infty) = 1{,}5707 \ldots A$, woraus dann folgen wird, dafs bei $S = 2\sigma$ das Konglo-

Fig. 10.



merat bereits um 71 Proc. gesättigt ist. Auf der Fig. 10 sind die Stromstärken S als Abscissen, die Momente N als Ordinaten genommen. Die ausgezogene Curve AB stellt das Gesetz dar, nach welchem N in der ersten Periode wächst, d. h. für S zwischen σ und 2σ.

Digitized by Google

Zweite Periode.

Sie bezieht sich auf ein beliebig grofses S, aber gröfser als 2σ, also $\infty > S > 2\sigma$. In diesem Falle wird für die mittleren Molecüle auch die tangentiale Kraft $s > 2\sigma$ seyn. Dabei wird aber, wie wir gesehen haben, die permanente Ablenkung jener Theilchen nicht mehr wachsen (Grundsatz I und Satz A), nachdem sie bei $s = 2\sigma$ ihren Maximalwerth β erreicht hat, wo — s. (4) —

$$(20) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sin\beta = \frac{\sigma}{T}$$

ist. In diesem Zustande der permanenten Maximalablenkung befinden sich alle Theilchen zu beiden Seiten der Fläche ED (Fig. 9), deren Axen mit der Richtung S einen Winkel bilden zwischen α_1 und α_2 und deren Enden auf der Oberfläche der Kugel einen Gürtel bilden. Um α_1 und α_2 zu bestimmen, haben wir

$$s = S\sin\alpha_1 = S\sin\alpha_2 = 2\sigma,$$

also

$$(21) \quad . \quad . \quad . \quad \sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = \frac{2\sigma}{S}.$$

Für ein gegebenes S haben wir nun 5 Gruppen von Theilchen zu unterscheiden:

1) Der mittlere Gürtel von Theilchen, die sich alle in der permanenten Ablenkung β befinden; sein Moment sey P. Er dehnt sich von der Mitte nach beiden Seiten bis zu den Winkeln α, deren Sinus $\frac{2\sigma}{S}$ ist.

2) und 3) Zwei Zonen zu beiden Seiten, in denen die Ablenkung kleiner als β, die tangentiale Kraft $s = S\sin\alpha$ zwischen σ und 2σ ist. Die Gränzen dieser Zonen werden bestimmt durch die Winkel α, deren Sinus $\frac{\sigma}{S}$ und $\frac{2\sigma}{S}$ sind, so dafs die Breite ξ dieser Zonen gleich ist

$$(22) \quad . \quad . \quad \xi = \arcsin\frac{2\sigma}{S} - \arcsin\frac{\sigma}{S}.$$

Digitized by Google

Das Moment dieser beiden Zonen zusammengenommen, sey gleich Q.

4) und 5) Zwei Kugelcalotten, in denen $\sin\alpha > \frac{\sigma}{S}$, also die tangentiale Kraft $s = S\sin\alpha < \sigma$ ist; hier hat die Bewegung noch garnicht angefangen und das Moment der beiden Calotten zusammen ist daher Null.

In der zweiten Periode ist also das Gesammtmoment N des Konglomerates $N = P + Q$.

I. *Berechnung von P.* Alle Theilchen haben dieselbe permanente Ablenkung β, wo $\sin\beta = \frac{\sigma}{S}$ ist.

Der Zuwachs des Momentes in Folge der Drehung eines Theilchens ist, wie oben:

$$n = \mu\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos\alpha\right] \text{ oder}$$

$$n = \mu\left[\cos\alpha\sqrt{1-\frac{\sigma^2}{T^2}} + \sin\alpha\,.\,\frac{\sigma}{T} - \cos\alpha\right].$$

Und hieraus, wie früher:

$$P = \frac{M}{2}\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\left\{\cos\alpha\sqrt{1-\frac{\sigma^2}{T^2}} + \sin\alpha\,.\,\frac{\sigma}{T} - \cos\alpha\right\}\sin\alpha\,d\alpha,$$

wo α_1 und α_2 durch die Gleichungen (21) definirt sind. Wir erhalten:

$$(23)\qquad P = \frac{M}{2}\,\frac{\sigma}{T}\left\{\arccos\frac{2\sigma}{S} + \frac{2\sigma\sqrt{S^2-4\sigma^2}}{S^2}\right\},$$

oder — s. (17):

$$(24)\qquad P = A\left\{\arccos\frac{2\sigma}{S} + \frac{2\sigma}{S}\sqrt{1-\left(\frac{2\sigma}{S}\right)^2}\right\}.$$

Für $S < 2\sigma$ erhalten wir für P einen imaginairen Werth. Bei $S = 2\sigma$ ist $P = 0$. Für $S = \infty$ erhalten wir die wichtige Formel:

$$(25)\quad \ldots\ldots\quad P(\infty) = A\,.\,\frac{\pi}{2}\,.$$

Ich habe die P für verschiedene S berechnet:

Digitized by Google

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{ll} P(2\sigma) & = 0, \\ P(2\tfrac{1}{2}\sigma) & = 1{,}1036 \ldots A, \\ P(3\sigma) & = 1{,}3349 \ldots A, \\ P(4\sigma) & = 1{,}4809 \ldots A, \\ P(6\sigma) & = 1{,}5364 \ldots A, \\ P(\infty) & = 1{,}5708 \ldots A. \end{array}\right.$$

Die Curve EP (Fig. 10), welche die Asymptote GH hat, stellt das Anwachsen des Momentes P dar.

II. *Ueber das Moment Q.* Ich habe auch das Moment Q der beiden Seitenzonen berechnet; doch unterlasse ich es, das Resultat mitzutheilen, da das Moment Q eine sehr untergeordnete Rolle spielt. Es ist nämlich leicht, den Verlauf des Momentes Q als Function von S ohne Rechnung sich klarzulegen. Es mufs nämlich Q mit wachsendem S aus drei Gründen äufserst schnell abnehmen und sich der Null nähern. Diese Gründe sind: 1) mit wachsendem S gehen die beiden Zonen immer mehr und mehr auseinander, weil die Gränzwinkel (deren Sinus $\frac{2\sigma}{S}$ und $\frac{\sigma}{S}$ sind) schnell kleiner werden. Dadurch wird *die Länge* der Zonen (rings herum gerechnet) abnehmen und daher auch die Anzahl der zu diesen Zonen gehörigen Theilchen; 2) ebenso wird *die Breite* ξ der Zonen schnell abnehmen, wie man aus (22) sieht, und 3) rücken die Zonen zu solchen Theilchen, deren Neigungswinkel α immer kleiner werden und deren Drehung, wie man leicht einsieht, immer weniger zur Verstärkung des Gesammtmomentes beiträgt. Die Curve für Q mufs daher etwa die Form BQ haben. Die Hauptsache ist, dafs Q für $S = \infty$ Null wird. Daraus folgt, dafs in der zweiten Periode die Curve für N etwa die Form BN haben mufs und dafs auch N sich asymptotisch dem Gränzwerthe $\frac{\pi}{2} A$ nähert. Nimmt man A aus (17), so erhält man die merkwürdige Formel:

Digitized by Google

(27) . . $N(\infty) = \frac{\pi}{4} . M . \frac{\sigma}{T}$, d. h.

Satz C. Das Maximum des permanenten Momentes ist proportional σ und umgekehrt proportional T und wird genau ausgedrückt durch die Formel (27), in welcher *M* das temporäre Moment bei $M = \infty$ bedeutet.

Verbindet man die Resultate (19) und (26), so erhält man:

$$
(28)\quad \begin{cases} N(\sigma) & = 0 \ldots A, \\ N(\frac{4}{3}\sigma) & = 0{,}2862 \ldots A, \\ N(\frac{6}{3}\sigma) & = 0{,}6925 \ldots A, \\ N(2\sigma) & = 1{,}1176 \ldots A = 71 \text{ Proc. } N(\infty), \\ N(2\frac{1}{2}\sigma) & > 1{,}1036 \ldots A, \\ N(3\sigma) & > 1{,}3349 \ldots A = 85 \text{ Proc. } N(\infty), \\ N(4\sigma) & > 1{,}4803 \ldots A = 94 \text{ Proc. } N(\infty), \\ N(6\sigma) & > 1{,}5364 \ldots A = 98 \text{ Proc. } N(\infty), \\ N(\infty) & = 1{,}5707 \ldots A. \end{cases}
$$

Wir erhalten daraus den

Grundsatz III. Das Gesetz, nach welchem das permanente Moment eines Konglomerates von Stahlmolecülen in Abhängigkeit von der magnetisirenden Kraft S wächst, wird ausgedrückt durch die Curve ABN (Fig. 10). *Wenn das permanente Moment sich erst bei $S = \sigma$ zu entwickeln anfängt, so wird das Konglomerat bei $S = 2\sigma$ bereits* 71 *Proc., bei $S = 3\sigma$ über* 85 *Proc. und bei $S = 6\sigma$ sogar über* 98 *Proc. desjenigen permanenten Momentes besitzen, welches es bei $S = \infty$ erhalten würde, und welches durch die Formel* (27) *ausgedrückt wird.*

Das Konglomerat wird also sehr bald dem Sättigungszustande sich nähern.

§. 3.

Wir wollen nun aus der eben entwickelten Theorie einige Schlufsfolgerungen ableiten in Bezug auf den Zu-

Digitized by Google

stand, in welchem sich die Molecüle eines Stabes befinden müssen, nach Einwirkung gegebener Ströme. Da wir uns lediglich mit dem *Mechanismus* der Induction beschäftigen, so kann die Frage über die *Vertheilung* des freien Magnetismus in der Längsrichtung und im Querschnitt eines Stabes nicht in den Kreis unserer Betrachtungen gezogen werden, da bei der Lösung dieser Frage vor Allem auf die *Wechselwirkung* der Theilchen Rücksicht zu nehmen wäre. Wir werden daher, was die erwähnte Vertheilung betrifft, unseren weiteren Betrachtungen gewisse *empirisch* festgestellte Thatsachen zu Grunde legen und zwar, dafs sich der freie permanente Magnetismus nur an der Oberfläche des Stabes entwickelt und mit wachsender Kraft S tiefer in das Innere desselben eindringt. Diese Thatsache wird erwiesen durch die obenerwähnten Versuche von Jamin und ferner durch die bekannten Versuche von Feilitsch (Pogg. Ann. LXXX, S. 321). — Siehe gleichfalls Dub, Elektromagn., S. 236 und über andere Versuche bei Wiedemann, Galv. II, Art. 380—382. Es ist auch nicht schwer, dies successive Eindringen zu begreifen, wenn man bedenkt, dafs sich die inneren Schichten im „magnetischen Schatten" der Oberflächenschicht befinden. — Von der Wirkung eines solchen „Schattens" erhält man eine noch klarere Vorstellung, wenn man sich an die Versuche von Beetz, Pogg. Ann. CXI, S. 107, und besonders Pogg. Ann. CLII, S. 484 erinnert. Es ist auch, wie gesagt, ganz leicht, theoretisch nachzuweisen, dafs eine Schicht freien Magnetismus an der Oberfläche der äufseren Kraft in ihrer Wirkung nach innen entgegenwirken mufs.

Wir gehen also aus von der Thatsache, dafs die Kraft Z, mit welcher die äufsere Kraft S auf einen inneren Punkt einwirkt, mit der Tiefe sich verringert. Es entwickelt sich nun freier Magnetismus bis zu einer solchen Tiefe, in welcher $Z = \sigma$ ist. Ferner haben wir den

Satz D. In den tieferliegenden Schichten existirt die Kraft Z; sie ist nicht Null, aber kleiner als σ.

Digitized by Google

Es ist ferner klar, daſs die Theilchen sich in der positiven extremen Lage befinden werden. Es entsteht nun die wichtigste Frage: welche Lagen werden die Theilchen einnehmen, nachdem ein schwächerer negativer Strom s gewirkt hat?

Dieser Strom wirke auf einen inneren Punkt mit der Kraft z. In derjenigen Oberflächenschicht nun, in welcher $z > \sigma$ ist, in welcher der Strom s also auch bei neutralem Stab freien permanenten Magnetismus erzeugen würde, werden die Theilchen nach der entgegengesetzten Lage hin gedreht werden. In den tiefer liegenden Schichten dagegen, in welchen sich die Theilchen gleichfalls in der extremen positiven Lage befinden, kann nach Grundsatz II die Wirkung der Kraft z nicht Null seyn: vielmehr werden die Theilchen gegen die normale Lage hin zurückgedreht und folglich aus der extremen in die stabile übergeführt werden. Dabei wird die normale Lage unerreicht bleiben, — denn dazu müſste $z = \sigma$ seyn. Wir erhalten somit den

Grundsatz IV. Wenn ein negativer Strom gewirkt hat, so befinden sich die Theilchen in der Oberflächenschicht in der negativen extremen (also labilen), die in den unteren Schichten dagegen in der positiven stabilen Lage.

Der Grundsatz II ist es somit, welcher zeigt, daſs die oft erwähnte Annahme von Jamin nicht richtig seyn kann; daſs die Wirkung des geringsten negativen Stromes sich in allen vorgängig erzeugten Schichten documentiren muſs und zwar dadurch, daſs alle Theilchen aus ihren extremen Lagen näher zu der normalen zurückgedreht werden. Im nächsten Capitel werden wir sehen, wie sich durch das im Grundsatz IV ausgesprochene Theorem die merkwürdigsten Erscheinungen, deren bisherige Erklärung eine höchst mangelhafte war, mit gröſster Leichtigkeit werden ableiten lassen. Hierher gehören besonders die im Cap. II, § 3, sub 7, 9, 10, 15 und 18 erwähnten Erscheinungen.

Digitized by Google

Capitel IV.

§ 1.

Wir wollen nun zeigen, wie einfach sich die verschiedenen im Cap. II, § 3 zusammengestellten Erscheinungen auf Grund der im vorigen Cap. III entwickelten Theorie erklären lassen und uns hiebei auf die in den vier Grundsätzen I—IV und den Sätzen *A*—*C* zusammengefafsten Resultate dieser Theorie stützen. Wir geben den Erklärungen die gleichen Nummern, wie im § 3, Cap. II.

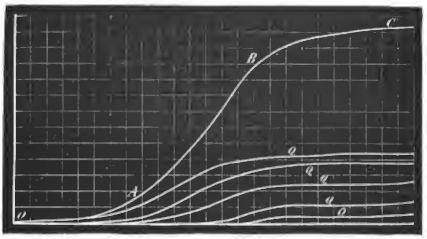
1) Als ich meine Untersuchungen fast zu Ende geführt hatte, fand ich, dafs schon im Jahre 1869 Villari, Pogg. Ann. CXXXIII, S. 330, den Gedanken ausgesprochen hat, dafs die Theilchen des magnetisirten Stahles sich im labilen Gleichgewichtszustande befinden mögen, — einen Gedanken, der mit dem Grundsatz II in Uebereinstimmung sich befindet. Villari findet, dafs die beim Entmagnetisiren auftretenden negativen Ströme unvergleichlich gröfser sind, als die bei eben so grofser Verstärkung des permanenten Momentes auftretenden. Hieraus folgert er, dafs die Drehung der Theilchen bei der Einwirkung negativer Ströme viel *schneller* vor sich geht, als es der Fall ist beim ersten Magnetisiren. Dieses ist ganz richtig und folgt direct aus unserer Theorie. Beim Schliefsen des ersten positiven Stromes beginnt die Bewegung erst dann, wenn der sich bildende Strom die Intensität σ erreicht hat und dann auch werden die Theilchen verhältnifsmäfsig langsam sich drehen, da die Kraft *T* der Drehung wachsend *entgegenwirkt;* wird dagegen nachher ein zweiter, wenn auch schwacher, aber negativer Strom geschlossen, so beginnt die Rückdrehung der Theilchen nach Grundsatz II *sofort*; das Theilchen beginnt sich rasch der normalen Lage zu nähern, da die Kraft *T* der Drehung *günstig wirkt;* nachdem es die normale Lage mit gröfster Geschwindigkeit passirt, wird es auch ver-

Digitized by Google

hältnifsmäfsig schneller weiter gehen, als es im ersten betrachteten Falle geschah.

2) Der gänzlich verschiedene Charakter der Curven (μ) und (m) erklärt sich durch die gänzlich verschiedenen Gesetze, nach welchen der temporäre Magnetismus des Eisens und der permanente des Stahles sich entwickeln. Das zweite dieser Gesetze findet seinen Ausdruck im Grundsatz III und seine graphische Darstellung in der Curve ABN, Fig. 10. In Wirklichkeit nun wird die Curve ein wenig anders verlaufen. Wir hatten für σ einen Mittelwerth angenommen, während es doch wohl auch solche Theilchen geben mag, für welche σ sehr klein ist, so dafs

Fig. 11.



ein schwaches Auftreten von freiem permanenten Magnetismus bereits anfangen mufs bei einem $S <$ als das mittlere σ. In Folge dessen wird die wahre Curve etwa die Form der in Fig. 10 mit Strichelchen gezeichneten Curve OBN haben. Um nun die Form der Curve m für einen Stab zu finden, hat man lauter derartige Curven Q für die verschiedenen Schichten zu zeichnen und die Ordinaten zu addiren. Dies ist auf Fig. 11 geschehen. Von den Curven Q ist jede folgende mehr nach rechts gerückt und aufserdem ist das erreichbare Maximum bei jeder folgenden Curve immer kleiner, da die Masse, folglich die Anzahl der vorhandenen Molecüle in einer Schicht mit der Annäherung zur Axe des Stabes immer kleiner wird. Durch Addition erhält man die Curve $OABC$, deren

Digitized by Google

Charakter allgemein übereinstimmt mit dem Charakter der für m experimentell gefundenen Curve (m) Fig. 8. Für μ dagegen mufs man berücksichtigen, dafs das Anwachsen des temporären Magnetismus *in jeder* Schicht sehr lange der wirkenden Kraft z proportional bleibt — auch dann noch, wenn der permanente Magnetismus längst dem Maximum sehr nahe gekommen ist, was, wie wir wissen, schon bei $z = 4\sigma$ der Fall ist.

3) In jeder Schicht beginnt das Auftreten des freien permanenten Magnetismus, wenn $z = \sigma$ geworden ist, und es ist fast beendigt bei $z = 3\sigma$ (s. Cap. III (19)). Da nun σ jedenfalls eine nur kleine Kraft ist, so ist es klar, dafs eine jede Schicht fast gesättigt seyn wird, wenn der freie Magnetismus nur sehr wenig weiter gedrungen ist, d. h. um eine nur sehr dünne Schicht, in welcher sich die Theilchen offenbar meist in stabiler Lage befinden werden. Vernachlässigen wir völlig das Vorhandenseyn dieser intermediären Schicht, so erhalten wir genau das von mir aus dem Versuch 4 von Jamin (s. S. 548) abgeleitete Gesetz, nach welchem der freie Magnetismus in das Innere der Stäbe eindringt.

4) Da beim successiv tieferen Eindringen des freien Magnetismus in den oberen, bereits durchdrungenen Schichten keine weitere Verstärkung des freien Magnetismus stattfindet, so ist es klar, dafs die Dichtigkeit desselben an der Oberfläche constant seyn mufs — wie es Feilitsch gefunden hat.

5) Die Hauptwirkungen der negativen Ströme sind von Jamin richtig erklärt worden — s. Cap. II.

6) Ebenso ist die Ableitung des I. Gesetzes, wie Jamin sie giebt, richtig.

7) Der Grundsatz IV widerspricht den Annahmen, welche Jamin der Erklärung seines II. Gesetzes zu Grunde gelegt hat. Dies Gesetz kann also nicht richtig seyn und ich habe gezeigt (Cap. II, § 2), dafs der Versuch dasjenige bestätigt, was wir aus der Theorie der drehbaren Molecularmagnete abgeleitet haben.

Digitized by Google

8) Da bei der Einwirkung eines schwächeren negativen Stromes s die in den tieferliegenden Schichten wirkende Kraft $< \sigma$ ist, so ist es klar, dafs die Theilchen in denselben nicht bis zur normalen Lage herangerückt werden können. Unter „tieferliegenden" Schichten verstehe ich hiebei solche Schichten, in welchen der Strom s, wenn er auf einen neutralen Stab einwirkte, gar keinen freien permanenten Magnetismus induciren würde. *Vernachlässigt man daher völlig das Vorhandenseyn der oben erwähnten intermediären Schicht*, so ist es klar, dafs in unteren Schichten keine völlige Vernichtung des vorhandenen freien Magnetismus, also kein Verlust von 100 Proc. stattfinden kann, während in der Oberflächenschicht ein Verlust von 200 Proc. stattfindet.

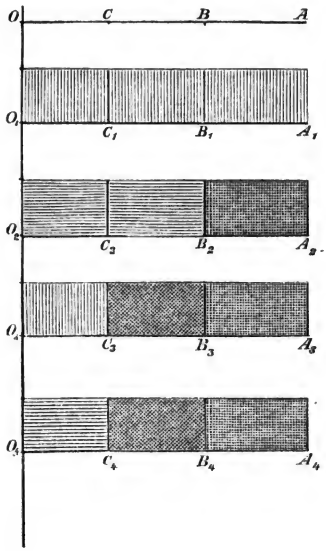
9) Nach dem Grundsatz IV bringt ein beliebig schwacher negativer Strom $-i$ die sämmtlichen Theilchen in den unteren Schichten aus der extremen in die stabile Lage. Ein neuer Strom $+i$ wird auf diese Theilchen gar keine Wirkung haben — er wird also auch nicht im Stande seyn, den auf jene unteren Schichten entfallenden Antheil an dem Verluste wiederzuersetzen. Dazu müfsten in den unteren Schichten die Theilchen aus der stabilen wieder in die extreme Lage weggedreht werden und das kann nur der Strom J, welcher ursprünglich gewirkt hat. Dafs der Strom $+i$ dies nicht thun kann, ist wohl einleuchtend, wenn man bedenkt, dafs in jenen Schichten der Strom $+i$ die Theilchen nicht einmal aus der normalen Lage wegdrehen, viel weniger daher sie weiterdrehen kann, wenn sie sich bereits in der stabilen Lage befinden.

10) Mit Hülfe des Grundsatzes IV werden wir im Stande seyn, auch den verwickelten Versuch 3 von Wiedemann zu erklären. Es sey OA — Fig. 12 — eine Normale zur Oberfläche des Stahlstabes. Die erste, ursprüngliche Magnetisirung mag sich bis zur Tiefe OA erstreckt haben; die Einwirkung der Ströme i_b und i_c auf den *neutralen* Stab bis zu den Tiefen OB und OC. Wir wollen

Digitized by Google

nun auf leicht zu begreifende Weise die extreme positive Lage durch verticale, die negative durch horizontale Striche, ferner die stabile positive mit einem geraden, die negative mit einem schiefen Netz bezeichnen. Die vier in Fig. 12 unter einander befindlichen Zeichnungen stellen

Fig. 12.



nun verschiedene Zustände eines und desselben Stabes dar, welche er *nach einander* annehmen kann — es sollen das also nicht etwa die gleichzeitigen Zustände an verschiedenen Stellen des Stabes vorstellen. Das ursprüngliche Moment A wird dargestellt durch die Zeichnung über $O_1 A_1$: durch den ersten Strom sind alle Theilchen in die positive extreme Lage gebracht worden. Der hierauf wirkende negative Strom giebt uns die Zeichnung über $O_2 A_2$: d. h. wir haben die negative extreme Lage in der

Digitized by Google

Schicht $O_2 B_2$ und die positive stabile Lage in der unteren Schicht $B_2 A_2$. Der dritte schwächere *positive* Strom führt endlich zu der Zeichnung über $O_3 A_3$: positive extreme Lage in der Schicht $O_3 C_3$, negative stabile in der Schicht $C_3 B_3$ und natürlich unverändert die frühere positive stabile Lage in der Schicht $B_3 A_3$. Wiedemann findet nun, dafs, um von $O_3 A_3$ wieder zu $O_2 A_2$ zurückzukehren, der Strom $-i_c$ nicht genügt, sondern der Strom $-i_b$ nothwendig ist. In der That! würden wir auf $O_3 A_3$ den Strom $-i_c$ wirken lassen, so würden wir die Vertheilung $O_4 A_4$ erhalten: in $O_4 C_4$ die negative extreme Lage, in $C_4 B_4$ die frühere negative stabile und in $B_4 A_4$ die positive stabile, — eine Vertheilung, welche sich von der gewünschten $O_2 A_2$ durch den Zustand der Schicht CB unterscheidet. Läfst man dagegen auf $O_3 A_3$ den Strom $-i_b$ wirken, so erhält man offenbar aus $O_3 A_3$ wieder den Zustand $O_2 A_2$.

Schwerlich dürfte auf Grund einer anderen Theorie dieser verwickelte Versuch eine so einfache und strenge Erklärung finden.

11) Wir nahmen an, dafs im neutralen Zustande alle Theilchen sich in der normalen Lage befinden. Es ist aber sehr wahrscheinlich, dafs sich viele Theilchen schon am Anfang in der stabilen, oder gar extremen Lage befinden. Es sey λ die Gesammtheit aller Theilchen, welche von Anfang an eine Ablenkung von der normalen Lage nach der positiven Seite hin haben und zwar derjenigen darunter, auf welche ein bestimmter positiver Strom $+S$ keine Einwirkung mehr hat. Wirkt also $+S$, so bleiben diese Theilchen in Ruhe. Wirkt aber $-S$, so werden sie sofort der normalen Lage genähert, es wird also ein gewisses negatives Moment ς inducirt. Wenn nun der Strom $+S$ wirkt, so bleibt dies negative Moment ς unzerstört, es wird also in diesem Falle das durch $+S$ inducirte Moment kleiner (um ς) seyn, als im ersten Falle, wo der Strom $-S$ nicht zuvor gewirkt hatte. So erklärt sich der Versuch 4 von Wiedemann.

Digitized by Google

12) Wir wollen nun sehen, zu was für Schlüssen die Formel (27), Cap. III und der daraus resultirende Satz *C* führt, d. h. von welchen Umständen das Maximum *N* des permanenten Momentes, welches in einem Konglomerat von Stahltheilchen inducirt werden kann, abhängt. Vor Allem zeigt jene Formel, ***dafs N wächst, wenn T kleiner wird.*** Dieser Satz giebt uns die Erklärung der sonderbaren, von Holz beobachteten Erscheinung, dafs in einem von Säure stark zerfressenen Stabe ein stärkeres permanentes Moment inducirt werden kann, als es vor der Einwirkung der Säure der Fall war. In der That! Die Säure wirkt nicht auf die Kohlentheilchen und läfst daher σ unverändert; dagegen löst sie auf und führt weg viele von den benachbarten Eisentheilchen und vermindert so die Kraft *T*, welche von der Gesammtwirkung aller benachbarten Theilchen herrührt (siehe die erste Abhandlung) und in Folge dessen mufs *N* wachsen.

Beim Durchglühen des Stahles wird sein specifisches Gewicht kleiner, die Theilchen sind weiter auseinandergerückt, — daher mufs auch *T* kleiner, also *N* gröfser werden.

13) Auch Bjoernstein hat durch Beimengung des Thonpulvers die wirkenden Nachbartheilchen abgetrennt, weiter weggebracht und daher die Directionskraft *T* verringert. In Folge dessen mufste auch das temporäre Moment gröfser seyn, als für den Fall massiver Metallstücke.

14) Die Erschütterung *während* des Magnetisirens macht die Theilchen freier, wodurch sie leichter abgelenkt werden können; Ausdehnung entfernt die Theilchen von einander und verringert *T*: durch beide Ursachen wird ***der sich bildende*** temporäre Magnetismus verstärkt. Durch die Erschütterung wird dabei auch der permanente Magnetismus wachsen, weil Theilchen abgelenkt worden sind, die sonst in Ruhe geblieben wären. Bei der Ausdehnung kann dagegen das permanente Moment kleiner ausfallen,

Digitized by Google

weil durch die Entfernung der Theilchen von einander auch σ kleiner wird.

Erschütterung *nach* dem Magnetisiren nähert *nach dem Grundsatz II* die in der extremen Lage befindlichen Theilchen zur normalen Lage und verringert so das vorhandene permanente Moment.

15) Die Wirkung von Erschütterungen auf einen entmagnetisirten Stab bietet eine der schönsten Bestätigungen unserer Theorie. Nach Grundsatz IV befinden sich nämlich in einem solchen Stab die Theilchen der Oberflächenschicht in der extremen negativen, also labilen, die der unteren Schichten in der positiven stabilen Lage. *Die Erschütterung wirkt daher nur auf die Theilchen der Oberflächenschicht*, welche der normalen Lage genähert werden. Dadurch bekommt die untere positive Schicht das Uebergewicht und ein Theil des früheren Magnetismus wird daher wiedererscheinen.

§ 2.

16) Wir gehen über zur theoretischen Betrachtung der Wärmewirkungen. Es unterliegt keinem Zweifel, dafs die Wirkung eine doppelte ist: erstens wird das Moment eines jeden Molecularmagneten verringert — vielleicht weil die Leitungsfähigkeit des Stoffes verringert wird und zweitens wird durch die Ausdehnung der moleculare Bau des Körpers, die relative Lagerung der Theilchen verändert; die Theilchen werden von einander entfernt und auch in ihren Bewegungen freier — *es wird daher sowohl T, als auch σ verringert.* Durch Verringerung des T wächst das temporäre Moment des weichen Eisens, wie schon die einfachen Weber'schen Formeln (Roeber, Pogg. Ann. CXXXIII, S. 53) zeigen. Dieses Wachsen des temporären Momentes wird solange dauern, bis die erste Wirkung der Wärme — Verminderung der Momente der Molecüle — das Uebergewicht erhält. Haben wir einen Stahlstab, der bei einer bestimmten Temperatur *temporär* magnetisirt

Digitized by Google

wurde, so wird die Erwärmung ebenso wirken, wie beim weichen Eisen. Bei der Abkühlung dagegen kann es geschehen, daſs trotz der Verstärkung von T ein Wachsen des Momentes stattfinden, d. h. die erste am Anfang erwähnte Wirkung der Wärme das Uebergewicht haben wird, weil durch das gleichzeitige Wachsen von σ die Theilchen fester in ihre neuen Lagen gleichsam eingeschnürt werden.

17) Es sey nun aber ein permanent magnetisirter Stahlstab gegeben. Bei Erhöhung der Temperatur wird T und σ kleiner. Durch das Sinken von T können sich die Theilchen, da kein Strom wirkt, natürlich nicht mehr *weiter* von ihren normalen Lagen fortdrehen; durch das Sinken von σ dagegen wird manches Theilchen dadurch, daſs es freier geworden ist, näher zur normalen Lage zurückgedreht werden — in Folge dessen und der ersten Wärmewirkung wird das Gesammtmoment sinken. Bei der Abkühlung dagegen werden σ und T gröſser. Durch das Wachsen von σ kann (da der Strom nicht mehr wirkt) natürlich die einmal vorhandene Ablenkung nicht wachsen — es wird also kein Molecül weiter weggedreht; durch das Wachsen von T dagegen wird manches Molecül zur normalen Lage hin zurückgedreht werden — es muſs also wieder ein gewisser Theil α des permanenten Momentes verschwinden. Dieser Theil α ist gröſser, als der bei der Abkühlung in Folge der ersten Eingangs erwähnten Wärmewirkung hinzukommende Theil β. Bringt man daher den Stab auf seine frühere Temperatur, so verschwindet wieder ein Theil des Momentes — nämlich der Theil β. Bei erneuter Abkühlung wächst dagegen das Moment, weil der Theil β wiedererscheint.

Kehren wir zum ersten Falle zurück. Wird der *zuerst erwärmte* Stab auf seine frühere Temperatur abgekühlt, so muſs ein Theil verloren bleiben. Da die Erwärmung den Stab völlig durchdringt, so muſs dieser Verlust in Procenten überall der gleiche, d. h. er muſs dem gesammten vorhandenen Moment proportional seyn.

Digitized by Google

Somit haben wir das Gesetz von Dufour und alle an dasselbe geknüpften Bemerkungen von Wiedemann und Mauritius abgeleitet.

18) Nach Grundsatz IV befinden sich in einem entmagnetisirten Stabe die Theilchen der oberen negativen Schicht in der extremen (labilen), die der unteren positiven in der stabilen Lage. Die Erwärmung wird daher nur auf die Theilchen der oberen Schicht so einwirken, dafs sie zur normalen Lage hin zurückgedreht werden; die Theilchen der unteren Schicht bleiben in ihrer stabilen Mittellage. Bei nachheriger Abkühlung, wenn die temporäre Wirkung der Wärme aufgehört hat, wird also ein Theil des negativen Momentes der Oberflächenschicht verschwunden seyn — die ursprüngliche Magnetisirung erhält das Uebergewicht und tritt wieder hervor, es ist, als hätte der Stab einen Theil seines verlorenen Momentes wiedergewonnen.

Die von Wiedemann gegebene Erklärung dieser Erscheinung ist unbefriedigend.

19) Es erübrigt, die merkwürdigen Resultate von Jamin zu erklären. In der Einleitung zu dieser Abhandlung habe ich ausführlich dargelegt, was ich unter einer „Kette" verstehe. Man begreift leicht, dafs eine Kette sich desto leichter bilden wird, je geringer T, also z. B. je höher die Temperatur ist. Bei einer gewissen, sehr hohen Temperatur mag sich das Moment OA (Fig. 3) gebildet haben; dabei besteht das ganze Moment aus lauter Ketten. Oeffnet man den Strom, so bleibt der ganze Magnetismus PB im ersten Moment unverändert, da die, eine Kette bildenden Theilchen sich im Gleichgewichte (labilen) befinden. Bei der Abkühlung wird in Folge des Wachsens der Kraft T und in Folge der Bewegung der Theilchen eine Kette nach der andern zerreifsen und verschwinden, so dafs der Magnetismus immer kleiner wird und zuletzt ganz verschwindet, da bei der entsprechenden Temperatur noch $\sigma = 0$ ist. Für eine tiefere Anfangstemperatur erhält man das Moment OE, welches $> OA$ ist, da das Moment

Digitized by Google

eines jeden Molecüles sich vergröfsert hat. Das Moment OE besteht nun nicht aus lauter Ketten; es wird daher ein Theil (FG) des Momentes beim Oeffnen des Stromes sofort verschwinden. Man begreift leicht, dafs gerade diejenigen Theilchen, für welche σ bereits einen ansehnlichen Werth erhalten hat, sich aufserhalb der Ketten befinden werden. Bei der Abkühlung, wenn die Ketten nacheinander zerreifsen und verschwinden, werden diese Theilchen daher ein gewisses restirendes Moment JH hervorrufen. Für noch tiefere Anfangstemperatur erhalten wir statt GH die Curve MN und endlich bei gewöhnlicher Temperatur eine der Abscissenaxe parallele Gerade.

Capitel V.

Eine jede theoretische Erklärung einer Reihe von Erscheinungen wird dann erst aus einer möglichen zu einer wahrscheinlichen, oder gar sicheren, wenn es auf Grund des Princips, welches als Ausgangspunkt der Erklärung der Erscheinungen gedient hat, möglich wird, *a priori* neue Erscheinungen in qualitativer oder quantitativer Hinsicht vorauszusagen. Auf Grund der im Cap. III in den Grundsätzen I—IV und Sätzen $A—C$ zusammengefafsten Theorie haben wir im vorigen Cap. IV die sonderbarsten Erscheinungen mühelos erklärt. Obgleich viele von diesen Erscheinungen, z. B. die sub No. 2, 4, 7, 8, 10, 15, 18 und 19 erwähnten, sich kaum auf Grund einer andern, einfacheren Theorie werden erklären lassen, so habe ich mich damit nicht begnügt, sondern war bestrebt, gewisse Erscheinungen *a priori* zu berechnen. Die dritte, früher erwähnte Abtheilung meiner Versuche führte nun zu der vollständigsten Bestätigung der von mir gefundenen Resultate.

Es mag auf einen Stab zuerst der Strom S gewirkt haben, der das Moment M inducirt; $-s$ ein zweiter negativer Strom und endlich ε ein dritter, wieder positiver, welchen ich den *„restituirenden“* nennen will. Wir haben

Digitized by Google

nun gefunden, dafs nach Einwirkung des Stromes $-s$ die Theilchen der Oberflächenschicht in der extremen negativen, die der unteren Schichten in der stabilen positiven Lage sich befinden (s. Grundsatz IV). Ich stellte mir nun die Aufgabe, die Wirkung des restituirenden Stromes ε *quantitativ* theoretisch zu untersuchen und dann die Resultate durch den Versuch zu prüfen.

1) Vor Allem schlofs ich, dafs wenn $\varepsilon = s$ ist, das frühere Moment nicht wieder hervorgerufen werden wird, da der Strom ε auf die unteren Schichten, in welchen die Theilchen durch den Strom $-s$ aus der extremen in die stabile Lage gebracht worden sind, nicht einwirkt. Der Versuch bestätigte meinen Schlufs, doch übergehe ich denselben, da ich später fand, dafs Wiedemann dasselbe Resultat schon längst experimentell gefunden hat und ich habe es daher bereits oben sub No. 9 besprochen.

2) Da nun Wiedemann die von ihm gefundene Wirkung des restituirenden Stromes $\varepsilon = s$ nicht erklären konnte, so war es ihm auch unmöglich, die *quantitativen* Gesetze dieser Wirkung für ein beliebiges ε aufzufinden. Ich war dagegen im Stande, aus der Theorie die Gröfse dieser Wirkung für die drei Fälle: $\varepsilon < s$, $\varepsilon = s$, $\varepsilon > s$ aufzufinden.

Ich beginne mit der Betrachtung des Falles $\varepsilon < s$. Es seyen x und y diejenigen Schichten, auf welche die Ströme s und ε gewirkt hätten, wenn der Stab sich im neutralen Zustande befände; in unserem (ersten) Falle wäre also $y < x$. Durch den Strom $-s$ ist das Moment M auf m gesunken und hierauf durch den Strom $+\varepsilon$ auf $m + \mu$ gewachsen. Es frägt sich, wie grofs ist μ? Es sey endlich $x = y + z$. Die Wirkung des positiven Stromes ε wird nun in Folgendem bestehen: 1) wird er das Moment der Schicht y in das umgekehrte verwandeln und 2) wird er das Moment der Schicht z verringern, da sich die Theilchen in demselben in Folge der Wirkung des Stromes $+s$ in der extremen negativen Lage befinden. Auf die unterhalb z liegenden Schichten hat der positive

Digitized by Google

Strom $+\varepsilon$ gar keine Wirkung, da sich die Theilchen in denselben bereits in der positiven stabilen Lage befinden. Genau dieselben Wirkungen würde der Strom $+\varepsilon$ aber offenbar haben, wenn gar kein Moment M vorgängig inducirt worden wäre, d. h. es möge zuerst s gewirkt und das Moment m' inducirt haben, welches durch den anders gerichteten Strom ε auf $m' - \mu'$ vermindert worden sey. Es mufs dann offenbar jenes μ diesem μ' gleich seyn und wir erhalten den Satz: ***Ist*** $\varepsilon < s$, ***so ist die restituirende Wirkung des Stromes*** ε ***von der Gröfse*** M ***des vorgängig inducirten Momentes unabhängig.***

Ich prüfte dies Resultat und erhielt folgende Zahlen:

15. März 1875.

I.

$s =$	30	m'	$= 3{,}8$
$\varepsilon =$	-20	$m' - \mu'$	$= -0{,}2$
		μ'	$= 4{,}0$

II.

$S =$	∞	M	$= 12{,}6$
$s =$	-30	m	$= -1{,}4$
$\varepsilon =$	$+20$	$m + \mu$	$= 2{,}7$
		μ	$= 4{,}1$

$$\mu = \mu'.$$

Beim Versuch I inducirte der Strom $s = 30$ im neutralen Stab das permanente Moment $m' = 3{,}8$, welches durch $\varepsilon = -20$ auf $-0{,}2$ herabsank, so dafs also die oben mit μ' bezeichnete Wirkung gleich 4,0 war. Beim zweiten Versuch wurde im Stabe zuerst durch einen sehr starken Strom S das Moment $M = 12{,}6$ inducirt, welches durch den negativen Strom $s = -30$ auf $m = -1{,}4$ herabsank und nachher durch den Strom $\varepsilon = +20$ wieder auf $+2{,}7$ stieg. Die restituirende Wirkung war also gleich $\mu = 4{,}1$.

Der Versuch bestätigte also das Resultat $\mu' = \mu$.

3) Wir gehen über zu dem Falle $\varepsilon = s$. In diesem Falle wird der Magnetismus der ganzen Schicht x durch

Digitized by Google

den Strom ε das umgekehrte Vorzeichen erhalten, während die tiefer liegenden Schichten wieder unberührt bleiben. Es mufs also die restituirende Wirkung μ des Stromes ε genau gleich $2m'$ seyn, wo wiederum m' das permanente Moment ist, welches der Strom $s = \varepsilon$ im neutralen Stabe induciren würde. Dagegen mufs, wie oft erwähnt, die durch den Strom $-s$ hervorgerufene Verminderung $M-m$ des Momentes M gröfser als $2m'$ seyn, da der Strom $-s$ auch auf die tiefer liegenden Schichten einwirkt. Der Versuch ergab folgende Zahlen:

I.

$$\varepsilon = s = 30 \quad | \quad m' = 3{,}8$$
$$2m' = 7{,}6$$

II.

$S = \infty$	$M = 12{,}6$
$s = -30$	$m = -1{,}4$
$\varepsilon = +30$	$m + \mu = 6{,}0$
	$\mu = 7{,}4$

$$M - m > 2m', \quad 2m' = \mu.$$

Im Versuch II hatte der Strom $\varepsilon = +30$ das Moment $\mu = 7{,}4$ restituirt, welches nahe gleich ist dem doppelten Moment $m' = 3{,}8$, welches im Versuch I der Strom $+30$ im neutralen Stabe inducirt hatte. Dagegen ist $M-m = 14{,}0$, also bedeutend gröfser.

4) Am verwickeltsten ist der Fall $\varepsilon > s$, wenn der dritte restituirende Strom ε gröfser ist, als der zweite entmagnetisirende s. Es sey in diesem Falle $y = x + z$, da ja $y > x$ ist. Die Wirkung des negativen Stromes $-s$ können wir in drei Theile zerlegen: 1) wird in der Schicht x das Moment $2m'$ verschwinden, wo, wie früher, m' das Moment ist, welches der Strom $+s$ im neutralen Stab induciren würde; 2) wird in der Schicht z eine Verminderung m'' und 3) in den noch tiefer liegenden Schichten eine Verminderung n' stattfinden. Der Strom $+\varepsilon$, der auf die Schicht $y = x + z$ einwirkt, *wird das Moment* $\mu = 2m' + m''$ *restituiren.*

Digitized by Google

Wir wollen nun einen ganz anderen Fall betrachten! Es möge vorerst im normalen Stab der Strom $+\varepsilon$ das Moment m_0 inducirt haben, welches durch den (kleineren!) Strom $-s$ auf $m_0-\mu'$ vermindert wurde. Diese Verminderung μ' wird nun offenbar aus der Zeichenveränderung in der Schicht x und der Verringerung in der Schicht z bestehen, d. h. es wird $\mu' = 2m' + m''$, folglich $\mu = \mu'$ seyn. Wir erhalten den Satz:

Für den Fall $\varepsilon > s$, ist die restituirende Wirkung μ des Stromes ε, nachdem der negative Strom $-s$ gewirkt hat, gleich der durch den Strom $-s$ hervorgerufenen Verminderung μ' des im neutralen Stabe durch den Strom $+\varepsilon$ inducirten Momentes m_0.

Zur Prüfung dieses Resultates theile ich zwei Versuchsreihen mit.

Folgendes sind die Resultate der ersten Reihe:

I.

$\varepsilon = 40$	$m_0 = 6{,}6$
$s = -30$	$m_0 - \mu' = -28$
	$\mu' = 9{,}4$

II.

$S = \infty$	$M = 12{,}6$
$s = -30$	$m = -1{,}4$
$\varepsilon = +40$	$m + \mu = 8{,}1$
	$\mu = 9{,}5$

$$\mu = \mu'.$$

In der zweiten Reihe erhielt ich:

I.

$\varepsilon = 51$	$m_0 = 10{,}2$
$s = -30$	$m_0 - \mu' = -1{,}3$
	$\mu' = 11{,}5$

II.

$S = \infty$	$M = 12{,}6$
$s = -30$	$m = -1{,}4$
$\varepsilon = +51$	$m + \mu = 9{,}8$
	$\mu = 11{,}2$

$$\mu = \mu'.$$

Digitized by Google

Wir sehen, dafs in allen Fällen der Versuch die aus der Theorie gezogenen Schlufsfolgerungen auf das Beste bestätigt.

5) Nur flüchtig will ich einige weitere Untersuchungen, die ich angestellt, erwähnen. Die hierbei auftretenden Fragen bedürfen einer ferneren theoretischen und experimentellen Bearbeitung und ich unterlasse daher jetzt jedes nähere Eingehen auf diese Fragen und beschränke mich auf Mittheilung der Resultate einiger Vorversuche.

Denken wir uns eine nach zwei Richtungen OA und OC symmetrische Stahlmasse. Diese Masse sey zuerst in der Richtung OA magnetisirt worden und habe das permanente Moment M erhalten. Es frägt sich, was wird geschehen, wenn man nun dieselbe Masse in der Richtung OC magnetisirt. Die Theorie der drehbaren Molecularmagnete führte mich zu dem Resultate, dafs wenn $OC \perp OA$ ist, das Moment M eine nur sehr geringe Verminderung erhalten mufs, während, wie es scheint, die Theorie der Flüssigkeiten zu einem ganz andern Resultate führen mufs.

Ich nahm nun runde Stahlplatten, deren Diameter 22^{mm} und deren Dicke 7^{mm} war. Auf dem Rande derselben waren 16 cylindrische Vertiefungen eingeschnitten, vermittelst welcher man sie auf die Spitze eines Messingstabes aufsetzen und so in verticaler Stellung in die Spirale einführen konnte. Nach der Magnetisirung in einer bestimmten Richtung wurden die Platten in ihrer eigenen Ebene um eine zu ihnen also senkrechte horizontale Axe gedreht und mit einer anderen Vertiefung aufgesetzt. Nun konnten sie in einer anderen Richtung OC magnetisirt werden, wo der Winkel $COA = \frac{n\pi}{8}$ war, wo n eine ganze Zahl.

Zuerst nahm ich $OC \perp OA$. M war gleich 10,6. Ein Strom $-S$, der in der umgekehrten Richtung wirkte, verminderte dies Moment bis auf 3,2, so dafs also die Verminderung gleich 7,4 war. Hierauf machte ich $M =$

Digitized by Google

8,6, drehte die Platte um 90° und liefs den Strom $+S$ wirken. Hierbei sank das Moment M nur bis 7,1 — die Verminderung war blos *1,5*.

In einer andern Versuchsreihe nahm ich für den Winkel $AOC = \alpha$ verschiedene Werthe und erhielt folgende Zahlen: $M = 10{,}0$.

α	δ
45°	0,1
90°	0,7
135°	1,5
180°	3,5.

In der ersten Reihe stehen die verschiedenen Winkel α, unter welchen ich den Strom S successive wirken liefs, in der zweiten die dabei hervorgerufenen Verminderungen des Momentes $M = 10{,}0$.

Ich theile die Resultate dieser letzten Versuche nur als Facta und in aller Reserve mit, ohne über die theoretische Bedeutung und den Werth derselben etwas Positives hinzuzufügen.

St. Petersburg, den $\frac{\text{21. Novbr.}}{\text{3. Decbr.}}$ 1875.

III. *Neue Untersuchungen über die Häufigkeit des Funkelns der Sterne in Bezug auf die Beschaffenheit ihres Lichtes nach der Spectral-Analyse; von Hrn. Ch. Montigny.*

(Mitgetheilt vom Hrn. Verf. aus d. *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, Sér. II, T. XXXVIII.*)

In einer neueren Arbeit habe ich gezeigt, dafs die Sterne, deren Spectren durch dunkle Streifen und schwarze Linien charakterisirt sind, weniger funkeln als die Sterne mit

Digitized by Google

feinen und vielen Spectrallinien und noch viel weniger als diejenigen, deren Spectra sich besonders durch einige Hauptlinien auszeichnen[1]). Diese hervorstechenden Unterschiede wurden hergeleitet aus dem Vergleiche der Häufigkeit des Funkelns von 41 Sternen und der Beschaffenheit des Spectrallichtes dieser Himmelskörper, welche respective den drei ersten Typen angehören, in die der Pater Secchi sie nach den allgemeinen Kennzeichen ihrer Spectren zerfällt hat. Die Unterschiede zwischen den mittleren Intensitäten des Funkelns dieser drei Typen habe ich erklärt, indem ich mich auf die unbestreitbare Thatsache stütze, dafs die Sternstrahlen, bei ihrer Dispersion durch die atmosphärische Luft, Lücken zwischen einander zeigen, die desto zahlreicher und relativ breiter sind als die Sterne, von denen sie herkommen, durch zahlreichere und breitere dunkle Linien oder Zonen in ihren Spectren charakterisirt sind. Die Folge dieser Thatsache ist, dafs die Entziehung einer grofsen Anzahl von Lichtstrahlen aus dem von einem Sterne herkommenden Bündel, welches durch die Dispersion in der Atmosphäre auseinander gelegt ist, nothwendig die Häufigkeit des Funkelns dieses Gestirns vermindert, verglichen mit dem, welches an Lichtstrahlen reichere Sterne charakterisirt.

In dieser Arbeit habe ich gesagt, dafs dieses Studium der erste Schritt wäre zur vollständigeren Lösung dieser ganz neuen Aufgabe, und dafs, um sie gänzlich zu lösen, man nicht blofs die Anzahl der Linien in den Sternspectren betrachten müsse, sondern auch ihre Breite und besonders die mehr oder weniger absolute Dunkelheit der Linien oder Banden, welche mehre dieser Spectren auf eine so merkwürdige Weise charakterisiren. In Ermangelung der nothwendigen Documente sah ich mich genöthigt, eine complementare Arbeit der früheren, in welcher diese particularen Vergleiche behandelt wären, aufzuschieben. Allein seit der Veröffentlichung meiner ersten Untersuchung hatte der Pater Secchi die ungemeine Artigkeit,

1) Diese Ann. Bd. 153, S. 277.

Digitized by Google

mir seine Abhandlungen zu übersenden, in welchen er sowohl seine Verfahrungsarten bei der Spectralanalyse aus einander gesetzt hat, als auch die besonderen Kennzeichen der Spectren einer grofsen Anzahl von Sternen, den hauptsächlichsten Planeten und mehreren Nebelflecken. Dank diesen, für meine Untersuchungen so köstlichen Angaben konnte ich wirklich nachweisen, dafs der Zusammenhang zwischen der Häufigkeit des Funkelns der Sterne und den Charakteren ihrer Spectren stattfindet ebensogut in Bezug auf jeden Stern, verglichen mit allen vier zu einem selben Spectraltypus gehörenden, als nach den relativen Mittelwerthen der drei Typen, welche die Hauptgrundlagen meiner ersten vergleichenden Arbeit waren.

Dies ist der Gegenstand meiner neuen Untersuchungen. Bevor ich sie auseinander setze, will ich einige allgemeine Anzeigen über die Art geben, wie in den Arbeiten des Paters Secchi die Hauptkennzeichen der Spectra der Sterne aufgeführt sind. Diese Anzeigen sind um so nöthiger, als diese Abhandlungen in italienischer Sprache geschrieben sind, und es daher gut ist, zu zeigen, dafs in der Tabelle, wo die Charaktere eines jeden Stern-Spectrums in Parallele gestellt sind mit der numerischen Intensität des Funkelns eines jeden Sterns, diese Charaktere in sehr bündiger Form getreu übertragen sind[1]).

In seiner ersten Arbeit beschreibt Hr. Secchi zunächst seine Apparate und Beobachtungsweisen, giebt

1) Folgendes sind die Titel der Abhandlungen des Pater Secchi über die Spectralanalyse der Himmelskörper:

I. Memoria sugli spettri prismatici delle stelle fisse, estratta dagli Atti della Società Italiana dei XL, Serie III, T. i. parte I.

II. Catalogo delle stelle di cui si è determinato lo spettro luminoso all' osservatorio del Collegio Romano; estratto dalle Memorie della Società Italiana dei XL, 3a Serie, Vol. I. 1367.

III. Memoria secunda sugli spettri prismatici delle stelle fisse, presentata alla Società Italiana nel novembre del 1368.

IV. Memoria sugli spettri prismatici de' corpi celesti; estratta dagli Atti dell' Academia pontifica de nuovo Lincei, Anno XXV, sessione IVa, del 24. *Marzo* 1872.

Digitized by Google

dann die unterscheidenden Kennzeichen der drei ersten Typen, auf welche er die von ihm untersuchten Sternspectra bezieht und klassificirt darauf nach jedem dieser Typen die dreihundertsechszehn Sterne, welche er bisher untersucht hat. Die zweite Abhandlung ist ein Katalog derselben Sterne, vereinigt zu Sternbildern. Diese Arbeit ist unstreitig diejenige des italienischen Physikers, die mir am nützlichsten war wegen der allgemeinen Angaben, die sie meistens enthält über die Menge der Spectrallinien für jeden Stern, über ihre Intensität und die Art, wie die breitesten gegen ihre Ränder hin verlaufen und endlich über die Ausdehnung und Constitution der dunklen Streifen, welche die Spectren der Sterne des dritten Typus charakterisiren.

In den Abhandlungen III und IV vervollständigt Hr. Secchi die obigen Data durch neue Beobachtungen, welche die früheren verschärfen und vervollkommnen. Da die neueren Untersuchungen unter günstigeren atmosphärischen Umständen geschahen, so erkannte Hr. Secchi z. B., dafs die Spectralbanden der Sterne des dritten Typus, welche bei den älteren Beobachtungen continuirlich erschienen, in Wirklichkeit in gesonderte Linien zerfällbar sind. In solchen Fällen habe ich besonders die Angaben der letzteren Abhandlungen in Betracht gezogen, um sie in der nachfolgenden Tafel unter einer concisen Form aufzustellen.

Nicht ohne Interesse ist es, hier des Sternes Aldebaran zu erwähnen als eines der merkwürdigsten Beispiele von Unterschieden, welche zwei Beobachtungsreihen darbieten können. Dieser Stern hat uns nämlich gezeigt, dafs die Beschaffenheit seines Spectrallichts sehr wahrscheinlich in ziemlich kurzen Zeiträumen charakteristische Veränderungen erleidet. Vor dem Jahre 1867 zeigte das Spectrum des Aldebaran breite, nicht neblige, sondern scharf begränzte Linien, welche sich nicht zu wirklichen Zonen vereinigten. Am Schlusse desselben Jahres fand Hr. Secchi in dem Spectrum dieses Sternes Zonen,

Digitized by Google

die er vordem nicht gesehen hatte und die ihm das Ansehen eines canellirten Spectrums gaben. Nach Hrn. Secchi stehen diese Veränderungen im Ansehen des Aldebaran-Spectrums in Beziehung zu den Veränderungen, welche die rothe Farbe dieses Sterns erleidet[1]).

Ich mache bemerklich, dafs angesichts dieser Thatsachen der Aldebaran, der, nach dem Verfasser, als Uebergangsglied zwischen dem zweiten und dritten Typus dient, nothwendig seinen Platz in dem dritten behalten mufs, den ich ihm angewiesen habe.

Die Unterschiede, welche sowohl die Striche oder Linien, als die Zonen oder Streifen der Spectren unter sich zeigen, werden vom Pater Secchi deutlich beschrieben. Bei gewissen Sternen sind die einen und die anderen kräftig gezogen und an ihren Rändern scharf begränzt; bei anderen dagegen hat ihre Gesammtheit ein nebelhaftes Ansehen, oder vielmehr ihre Farbe verläuft und erlischt nur an den Rändern dieser Linien und Striche. Es ist wichtig, solche Unterschiede zu beachten, wenn es sich um den Zusammenhang handelt, der uns beschäftigt. In

1) Die Veränderungen, welche ihm das Aldebaran-Spectrum gezeigt, charakterisirt Hr. Secchi folgendermafsen:

II. Mem. p. 30: — „α Toro magnifico tipo a righa mediocremento larghe però non a zone. Le righe sono larghe, ma non nebulose, nè in fondo semilucido, ma taglienti. Essa sta un posto prima di Arturo per la facilità di decomposizione; il sodio è netto quanto nel Sole, ma fina è la sua riga. Ve ne sone alcune communi col Sole, ma altre particolari a questa stella che merita molto studio . . .“

III. Mem. p. 33: — „Aldebaran α Toro. Lo spettro di questa stella fu dato nella prima memoria. Essa è rossa assai quest' anno, e impicciolita. Lo spettro mostra adesso trace di zone che non vidi l'anno scorso. Essa è tipo a colonnato, ed l'anno scorso non lo era. E ciò dovuto alla variazione del certamente (13. Dec. 1867).

„Esaminata di nuovo sotto questo rispetto ai 24. marzo 1868, *e veduto che nel verde vi sono le righe caratteristiche del terzo tipo, e molto netto, è il sodio. Essa è rossa decisa, e certamente non è senza relazione col colore l'apparenza non dublia dic colonnato, che ora essa presenta. (Vedi la I. Memoria). Essa in somma è come Arturo, cioè del tipo delle arancie: l'anno scorso non vi vedevano le zone e quest' anno si. Quindi una sorgente di variabilità nelle stelle.“*

Digitized by Google

der That, jede einer vollkommen dunklen Linie oder Zone des Spectrums entsprechende Lücke, die in unserer Atmosphäre die von einem selben Stern herkommenden Strahlen von einander trennt, enthält keinen Strahl, der in's Auge des Beobachters gelangt. Allein, wenn die Linie oder Zone mehr oder weniger neblig ist, und sie sonach mehr oder weniger schwache Ausgangspunkte des Lichtes darbietet, so wird die Lücke, welche, unter den zum Beobachter gelangenden Strahlen, diesem nebligen Theil entspricht, von Lichtstrahlen durchlaufen seyn. Allein nach dem, was ich in meiner ersten Arbeit gesagt habe, mufs das Funkeln eines Sternes desto häufiger eintreten als, unter sonst gleichen Umständen, die Lücken, welche die von der Atmosphäre dispergirten Strahlen trennen, nicht allein schmäler und weniger zahlreich sind, sondern auch von einer gröfseren Zahl von Lichtstrahlen durchlaufen werden.

Der Verf. giebt, wenn es möglich ist, die Substanzen, welche gewisse Linien der Sternspectra charakterisiren, genau an und schliefst auf das Daseyn derselben in diesen Sternen. Ich habe nicht für nöthig erachtet, seine speciellen Angaben in der folgenden Tabelle aufzuführen, obgleich sie in anderer Beziehung wichtig sind.

Um die Klassification der Sternspectra zu vereinfachen, hat der Pater Secchi sie bekanntlich auf vier Typen bezogen, von denen drei hauptsächlich sind Die unterscheidenden Kennzeichen dieser drei letzten sind in meiner ersten Arbeit genau aufgeführt durch die Angaben, welche ich von dem Verf. entlehnte. Sie werden es auf's Neue seyn mittelst der folgenden Angaben, die ich für die Spectra von α Lyrae, Pollux und α Herculis für nützlich hielt, die drei typischen Sterne, die der Verf. anführt als respective Repräsentanten der speciellen Charaktere jeder der drei Hauptgruppen. Auch begnügt er sich häufig zu sagen, dafs dieser oder jener Stern sich vollkommen auf den Spectraltypus von α Lyrae beziehe

Digitized by Google

(*Tipo di α Lira perfetto, puro, preciso, ben netto . . .*), ohne eine weitere Angabe über das Spectrum zu geben.

Vega oder α Lyrae, das merkwürdigste Beispiel des ersten Typus unter der grofsen Anzahl der zu denselben gehörigen Sterne, liefert ein continuirliches Spectrum, worin man vier grofse schwarze Linien, respective im Roth, Grünblau, Violett und äufserstem Violett unterscheidet, und aufserdem viele feine Linien besonders im Grün.

Pollux ist der Stern, der die zweite Gruppe am besten charakterisirt, weil sein Spectrum nach Hrn. Secchi vollkommen dem der Sonne ähnelt durch feine und zahlreiche Linien, die mit denen des Sonnenspectrums zusammenfallen.

Der typische Stern der dritten Gruppe, α Herculis, zeigt ein Spectrum mit sehr charakteristischen schwarzen Linien und dunklen Streifen. Die Reihe dieser Linien und Streifen, welche übrigens sehr helle Linien trennen, giebt diesem Spectrum das Ansehen einer Reihe neben einander stehender und von der Seite her beleuchteter Säulen. Die diese Säulen trennenden Linien sind sehr schwarz und heben sich vollkommen ab von den hellen Theilen, welche übrigens nach Seite des Roth das lebhafteste Licht zeigen.

Die typischen Spectren dieser drei ersten Gruppen sind auf Taf. VI, Fig. 13, 14 u. 15 abgebildet.

In der folgenden Tabelle habe ich die Intensität oder Häufigkeit des Funkelns der 41 von mir beobachteten Sterne in Parallele gestellt mit den merkwürdigsten Kennzeichen ihrer Spectren. Ich erinnere dabei, dafs die Häufigkeit des Funkelns eines Sterns die Anzahl der Veränderungen ausdrückt, welche die Farben bei 60° Zenithdistanz durchschnittlich in einer Secunde erleiden, nach der Gesammtheit meiner Beobachtungen und einer in meiner ersten Arbeit auseinander gesetzten Rechnungsweise. Was die Kennzeichen der Spectren der Sterne

Digitized by Google

betrifft, so bestätigen sie in sehr bündiger, aber sehr genauer Weise die in den Abhandlungen des Pater Secchi enthaltenen Angaben.

Erster Typus.

Sterne, deren Spectrum vier Hauptlinien zeigt.

	Funkeln.	Charakter des Spectrums.
ε im grofsen Bären	111	Typisches Spectrum, sehr rein.
β im grofsen Bären	104	Typisches Spectrum, vollkommen.
Prokyon	103	Typisches Spectrum, sehr viele feine Linien.
α d. Leyer (Vega)	98	Typisches Spectrum.
α d. Andromeda	92	Starke Linien im Blau und Violett; viele feine im Grün; Spuren ähnlicher Linien im Gelb und im Roth, welches bisweilen wenig sichtbar ist.
ζ im grofsen Bären	88	Linie *F* ziemlich stark im Blau.
γ im grofsen Bären	87	Breite, neblige Linien, ausgenommen *F*, das recht scharf ist.
Regulus	85	Linie *F* zu einer schwarzen Zone verbreitert; feine Linien im Grün. Das Roth in diesem Spectrum wenig merkbar.
Atair	82	Hauptlinien gut ausgebildet im Gelb und Violett. Viele feine Linien besonders im Grün.
α im Ophiuchus	81	Linie *V* im Violett breit und wohl ausgeprägt. Linie *F* neblig an den Rändern. Leichte Zonen im Grün.
Algol	78	Hauptlinien gut deutlich im Grün, Blau und Violett.
α im Pegasus	73	Linien *F* und *V* sehr markirt; feine Linien in anderen Theilen des Spectrums.
γ im Pegasus	72	Linie *F* gewöhnlich; viele feine, aber schwache Linien, die sich denen des Sonnentypus nähern.
Castor	62	Linie *F* zu einer Zone mit nebligen Rändern verbreitert. Viele feine Linien im Grün. Am Ende des Violett fehlt Licht.
α der Krone	61	Linie *V* des Violett noch deutlich.
η im grofsen Bären	61	Linie *F* diffuse; andere Linien auch zu Zonen verbreitert.
Mittel	86	

Digitized by Google

Zweiter Typus.

Sterne, deren Spectra feine Linien oder schwache Streifen zeigen.

	Funkeln.	Charakter des Spectrums.
α im Perseus	98	Linien *F* und *V* wahrnehmbar. Gruppen sehr feiner Linien im Grün und anderen Theilen des Spectrums.
Pollux	96	Typisches Spectrum.
γ der Andromeda	93	Linie *F* ausgeprägt, aber schmäler als im ersten Typus. Spuren von Zonen im Violett.
Deneb	89	Viele feine Linien. *F* besteht aus mehreren solcher Linien. Das Roth des Spectrums schmal.
Capella	77	Linien sehr zahlreich, sehr deutlich und wie im Sonnenspectrum vertheilt, aber weniger zart als die im Pollux.
α im Widder	76	Linie *F* schmal; sehr viele feine Linien.
β im Stier	67	Linie *V* deutlich im Violett. Feine Linien im Grün. Das Roth des Spectrums schmal, das Grün vorherrschend.
β im Hercules	65	Viele feine Linien. Das Grün vorherrschend.
β im Löwen	55	Linien *F* und *V*; die erstere erscheint neblig.
β der Schlange	42	Linien *F* und *V*; die erstere erscheint neblig.
α im Wassermann	40	Schöne Gruppe feiner Linien im Grün. Verschiedene Linien im Gelb.
γ im Orion	60	Linie *F* schmal, aber gut ausgeprägt. Die schwarze Linie *V* wahrnehmbar im Violett. Eine Menge feiner Linien durchziehen das Spectrum, worin das Roth fehlt.
γ im Orion (Rigel)	57	Linie *F* schmal, aber wohl ausgeprägt. Eine Menge sehr feiner und mannigfaltiger Linien. Das Grün im Spectrum vorwaltend, das Roth sehr schmal.
x im Orion	53	Viele feine Linien, Farbe grün.
	Mittel 69	

Digitized by Google

Dritter Typus.

Sterne, deren Spectra neblige Streifen und schwarze Linien zeigen.

	Funkeln.	Charakter des Spectrums.
ϱ im Perseus	70	Spectrum durchsetzt von Zonen oder Banden, geordnet in Cannelirungen, die ihm das Ansehen einer Colonnade geben, dadurch erinnernd, obwohl entfernt, an das noch besser charakterisirte von α im Orion. Die Zonen sind zerlegbar in gesonderte Linien.
β im Pegasus	66	Die Banden des Spectrums geben ihm das Ansehen einer Colonnade wie α im Hercules, lösen sich aber leichter in feine Linien auf.
α im Orion (Betelgeize)	64	Spectrum merkwürdig durch seine breiten und vielen leicht in schwarze Striche auflösbaren Zonen. Die hauptsächlichsten nehmen die mittleren Lagen ein, wie im Spectrum von α des Hercules. Die Zonen und Striche sind getrennt durch leuchtende Banden, die sich von einem wenig erhellten Grunde abheben.
Aldebaran	59	Das Ansehen des Spectrums ist wechselnd; anfangs zeigt es nur zahlreiche und scharf geschnittene Striche, bald darauf aber aufser diesen Strichen dunkle Zonen, die ihm das Ansehen einer Colonnade geben.
Arcturus	59	Viele stark ausgeprägte Striche, die aber nicht zu Zonen vereinigt sind.
β der Andromeda	57	Spectrum mit feinen, vollkommen deutlichen Strichen, die zuweilen zu getrennten Gruppen vereinigt sind. Der Strich *F* befindet sich in einem dieser dunklen Theile.
α im Wallfisch	56	Zonen geordnet zur Colonnade; aber auflösbar in feine Striche.
Antares	55	Breite und mannigfaltige Zonen, mit deutlichen Strichen.
α im Hercules	49	Typisches Spectrum.
ι im Pegasus	49	Sehr viele feine Striche, vereinigt zu Zonen auf einem wenig erhellten Grunde.
α der Schlange	40	Zonen mit vielen feinen Strichen; Licht schwach. Dunkle Zonen an ihrem gewöhnlichen Ort.
	Mittel 56	

Digitized by Google

Die hauptsächlichsten Folgerungen aus dieser Tafel sind nun:

1) Die beiden Sterne, deren Spectra als Typen respective der ersten und zweiten Gruppe gewählt wurden, und diejenigen, welche, in jeder, ihnen am meisten hinsichtlich ihrer Spectra nahe kommen, unterscheiden sich auch durch das häufigste Funkeln.

2) In der dritten Unterabtheilung ist α Herculis, welcher wegen seines Spectrums mit zahlreicheren und breiteren Zonen der Typus derselben ist, einer der Sterne, dessen Funkeln am schwächsten ist nicht blofs in dieser Gruppe, sondern auch unter allen von mir beobachteten Sternen.

3) Die am Ende des ersten Typus aufgeführten Sterne, welche viel weniger funkeln, als die an die Spitze dieser Gruppe gestellten, unterscheiden sich von diesen letzteren im Allgemeinen durch zahlreiche Spectrallinien. Ueberdiefs sind unter den Sternen am Ende dieser Gruppe η ***Ursae majoris*** und Castor charakterisirt durch Spectrallinien, welche sich zu mehr oder weniger diffusen Zonen verbreitern. Bemerken wir auch, dafs in dem Spectrum des Castors das äufserste violette Licht fehlt.

4) Wenn wir in dem zweiten Typus die drei Sterne des Orion ausnehmen, welche nach dem Pater Secchi eine Gruppe für sich bilden, da in ihnen das Roth fast gänzlich fehlt, so sind die Spectrallinien der zweiten Hälfte dieser Gruppe sehr zahlreich und oft in Gruppen vereinigt, wie α im Wassermann uns zeigt.

5) Alle Sterne des dritten Typus, bis auf Arcturus, dessen zahlreiche und stark ausgeprägte Linien sich nicht zu Streifen vereinigen, sind merkwürdig wegen ihrer Spectra mit dunklen und verschieden breiten Zonen, deren helle Trennungslinien sehr hervortretend sind.

Nach diesen Allgemeinheiten wollen wir bei einigen Besonderheiten, welche die Tafel darbietet, verweilen.

Die zu einem selben Sternbilde gehörigen Sterne α, β, γ Andromedae wurden unter wenig verschiedenen Um-

Digitized by Google

ständen der Lufttemperatur beobachtet. Ueberdiefs fällt hier der Einflufs, den der Glanz des Sterns zuweilen auf das Funkeln haben kann, von selber fort, weil diese Sterne fast von derselben Gröfse sind, wie man aus meiner ersten Arbeit ersehen haben wird. Diese drei Sterne sind also untereinander vollkommen vergleichbar in doppelter Hinsicht auf ihre Spectren und die Häufigkeit ihres Funkelns. In der ersten Gruppe zeigt α stark ausgeprägte Striche, viele feine Linien und wenig Roth in seinem Spectrum. In der zweiten zeigt β ebenfalls feine Linien, einen ziemlich starken Strich und einige Spuren von Zonen in dem brechbarsten Theil. Nach diesen Anzeigen ist es erlaubt, anzunehmen, dafs die Lücken, welche die Strahlen dieser beiden Sterne trennen, sehr wahrscheinlich aequivalent sind in Summa, von einem zum andern, in Bezug auf die Anzahl, die Breite und die Dunkelheit dieser Lücken. So würde es sich erklären, wie die numerische Häufigkeit des Funkelns dieselbe ist bei beiden Sternen. Aber der Stern β, dessen zahlreiche und feine Linien zu vollkommen deutlichen Zonen geordnet sind und zuweilen dunkle Partien bilden, funkelt viel weniger als die beiden andern Sterne. Die Farbenveränderungen, welche er in einer Secunde erleidet, betragen nur die Zahl 57, während dieselben Veränderungen sich bei α und γ auf 93 belaufen[1]). Die Breite und relative Dunkelheit der Lücken in den Zonen des Spectrums von β, welche die Strahlen dieses Sterns in unserer Atmosphäre trennen, erklären hinreichend

1) In seiner zweiten Abhandlung sagt Hr. Secchi in Bezug auf β Andromedae Folgendes:

β Andromedae Gialla oro: tipo a righe fine disposte a zone perfettamente misurabile e distinte. Magnifico oggetto: è di 3o grado dopo Aldebaran. I vari grappi di righe fine formano quasi zone, una delle quali nel primo verde: al posto della F vi è spazio oscuro, ma poco prima vi è una riga molto lucida. Magnesio ben distinto E notata come tipo piuttosto di α Ercole che del Sole al 10. agosto c. 4. settembre; ma ai 26. dicembre ci ripete tipo a righe fine. Quindi non è irragionevole sospettare di variabilità.

Digitized by Google

die Schwäche seines Funkelns, verglichen mit dem von α und γ, deren Spectren reicher an Lichtstrahlen sind.

In der zweiten Gruppe ist das Funkeln von Capella merklich schwächer als das von Pollux, obwohl die Spectren beider Sterne viele feine und gleich deutliche Linien zeigen. Aber die im Spectrum des Pollux sind nach Pater Secchi[1]) noch viel zarter als die Spectrallinien von Capella; angesichts dieses Unterschiedes ist es nicht überraschend, dafs das Funkeln des ersten dieser Sterne merklich stärker ist als das des andern oder Capella, weil aus der gröfseren Breite der Spectrallinien dieses hervorgeht, dafs die Lücken, welche seine Strahlen in unserer Atmosphäre trennen, in Summa ausgedehnter sind.

Die Sterne ϱ im Perseus, β im Pegasus und α im Orion, welche im dritten Typus oder im Typus mit nebligen Streifen obenan stehen, sind in Bezug auf das Funkeln durch Zahlenwerthe repräsentirt, die einerseits denen der Mitte des zweiten Typus und andrerseits den schwächsten Werthen des ersten entsprechen.

Die obigen Vergleiche zeigen, welchen besonderen Einfluſs die Breite und die Dunkelheit der Lücken zwischen den Sternstrahlen in unserer Atmosphäre auf die Häufigkeit des Funkelns ausüben, je nachdem diese Lücken den breiten Zonen der dritten Gruppe oder den feinen und zahlreichen Strichen der zweiten Gruppe oder auch einigen Hauptstrichen der ersten Gruppe entsprechen.

Nach diesen Deductionen, die ausschliefslich auf den Untersuchungen des Pater Secchi beruhen, bemerke ich, dafs die HH. Huggins und Miller gleichfalls die Spectra von etwa 50 Sternen studirt, und die Lage der Spectrallinien von Aldebaran, α im Orion, Capella und β im Pegasus gemessen haben. In diesen zarten Untersuchungen haben diese gelehrten Beobachter sich besonders damit beschäftigt, das Daseyn der charakteristischen Linie irdischer Elemente, wie Wasserstoff, Magnesium usw. in den Sternspectren nachzuweisen. Sie geben auch einige Eigen-

1) *Memorie II, p.* 19.

Digitized by Google

thümlichkeiten dieser Spectra an, die ich hier wiederhole, geordnet nach abnehmender Intensität des Funkelns der angeführten Sterne.

Prokyon. Feine und zahlreiche Striche, Striche *D* des Natriums.

Vega. Viele feine Striche. Strich *D* doppelt, Striche *C* und *F* intensiv, Strich *b* dreifach.

Pollux. Spectrum reich an Strichen.

γ Andromedae. Sehr interessantes Spectrum.

Deneb. Viele feine Striche.

Capella. Sehr viele Striche; etwa 20 wurden gemessen.

β im *Pegasus.* Spectrum sehr ähnlich dem von *α* im Orion. Striche zu Gruppen vereint wie bei letzteren. Funfzehn Linien wurden gemessen.

α im *Orion* (Betelgeize). Spectrum complicirt, sehr merkwürdig Striche stark und zu Gruppen vereint, zuweilen dunkle Streifen bildend. Gemessen 80 Striche.

Arcturus. Sehr viele Striche, unter denen Strich *D*. Gemessen 30 Striche.

Aldebaran. Sehr viele und sehr starke Striche, besonders im Orange, Grün und Blau des Spectrums. Die Lage von 10 dieser Striche wurde bestimmt, aber viele andere, im Blau sichtbare Striche sind nicht darunter begriffen.

Aus diesen Angaben der HH. Huggins und Miller erhellt, dafs diejenigen Sterne, welche am wenigsten funkeln, auch die sind, welche sehr viele, sehr starke und oft zu dunklen Zonen vereinte Striche darbieten.

Die allgemeinen und besonderen Folgerungen in dem Vorhergehenden beweisen mit voller Sicherheit, dafs zwischen der Häufigkeit des Funkelns der Sterne und der Beschaffenheit ihres Lichtes nach der Spectralanalyse ein Zusammenhang da ist, ein Zusammenhang, den der Vergleich der den drei Typen zugehörigen allgemeinen Mittelwerthe schon in meiner früheren Arbeit klar darlegte.

Es ist hier angethan, approximativ zu berechnen, wie grofs der Zwischenraum ist, der, bei einem gegebenen Abstand in der Luft, zwei in derselben Verticalebene liegende lineare Farbenstrahlen trennt, die den beiden Rändern einer spectralen Linie oder Zone angehören.

Gesetzt, der Beobachter befinde sich in dem Punkt *A* (Taf. VI, Fig. 16) der Erdoberfläche, wo der Lichtstrahl *bmA* anlangt, der zum brechbarsten Rande der Linie ge-

Digitized by Google

hört. Bezeichnen wir mit $rm'A$ die Bahn eines andern Strahls von etwas geringerer Brechbarkeit, welcher folglich dem Rande der Linie oder Zone angehört. Die respectiven Tangenten At und At' dieser beiden Bahnen im Punkte, wo sie das Auge des Beobachters treffen, bilden unter sich einen äufserst kleinen Winkel, welcher in dem *Luftspectrum* eines Sterns, erzeugt in einem so schwach brechenden Mittel wie die Luft, selbst wenn der Stern dem Horizont sehr nahe wäre, ganz und gar unwahrnehmbar seyn würde. Aber dieser Winkel hat nichts desto weniger einen reellen Werth, welchen wir mit s bezeichnen, und welcher mit der scheinbaren Zenithdistanz YAt oder Z des Sternes zunimmt.

In einer früheren Arbeit habe ich mittelst der Bradley'schen Formel gezeigt[1]), dafs wenn bezeichnen: n und n' die Brechungsindices für die obigen Strahlen in Luft, und R die in Secunden ausgedrückte astronomische Brechung, welche in den Refractionstafeln nach gemachter Correction wegen der Temperatur und des Luftdrucks der Zenithdistanz Z entspricht, man zur Berechnung des Werthes von s die folgende Gleichung hat:

$$\text{tang } s = \frac{n^2 - n'^2}{2n^2 n'^2} \times \frac{R}{60'',666}.$$

Wenn man diesen Werth kennt, berechnet man leicht die Linie pp' oder d, welche die Tangenten At und At' in einem Abstand Ap' oder x trennt, denn man hat

$$d = x \text{ tang } s.$$

Im Fall eines relativ kleinen Abstandes x können wir den Werth von a als nahezu gleich betrachten dem des Zwischenraums mm' der beiden Trajectorien bei demselben Abstand $Am' = x$. In der That differiren die beiden Strahlen in Brechbarkeit nur um eine aufserordentlich

1) *Notice sur la séparation des trajectoires décrites dans l'atmosphère par des rayons de même origine stellaire, mais de réfrangibilité différente, et sur les effets de cette séparation à l'égard de la scintillation (Bull. de l'Acad. de Belgique, Sér. III, T. XXXIX).*
Auch: *Sur le pouvoir dispersif de l'air.* (Ib. *Sér. II, T. XXIV.)*

Digitized by Google

kleine Gröſse, weil sie den Rändern einer spectralen Linie oder Zone entsprechen; folglich haben ihre Bahnen sehr nahe dieselbe Krümmung. Denkt man sich, daſs die Bahn $rm'A$ sich in ihrer lothrechten Ebene um den Punkt A drehe, und dabei in ihrer sehr kleinen Bewegung gegen die Bahn bmA die Tangente $t'A$ mit fortführt, so wird diese mit der Tangente tA zusammenfallen im Moment, wo durch seine Verschiebung der Punkt m' der ersten Bahn den Punkt m der zweiten trifft, und das ist es, was wir voraus gesetzt haben, sobald der Abstand Am' oder x nicht eine gewisse Gröſsengränze übertrifft.

Da der Unterschied der Indices n und n' äuſserst klein ist, so kann der Coëfficient $\frac{n^2-n'^2}{2n^3\,n'^2}$ der Tangente s unter die Form $\frac{n-n'}{n^3}$ gesetzt werden. Wegen der Schwäche der Brechkraft der Luft ist der Unterschied $n-n'$ nicht direct bestimmbar, sobald es sich um Strahlen handelt, die zu den beiden Rändern einer Linie gehören. Allein man kann diesen Unterschied auf folgende Weise berechnen. Bezeichnet man nämlich, nach Cauchy, mit a und b die beiden numerischen Coëfficienten, welche hier von der Refraction und Dispersion durch Luft abhängen, und mit λ und λ' die auf das Vacuum reducirten Wellenlängen, welche den Indices n und n' entsprechen, so hat man folgende Gleichungen:

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2}, \qquad n' = a + \frac{b}{\lambda'^2}.$$

Hieraus folgt:

$$n-n' = b\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda'^2}\right)$$

und nach dem Vorhergehenden:

$$d = x\,\frac{b}{n^3}\left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda'^2}\right)\frac{R}{60'',666}.$$

Ich muſs daran erinnern, daſs ich die numerischen Werthe der Constanten a und b der Cauchy'schen Formel bestimmt habe, gestützt einerseits auf die Bestimmung der Brechungsindices mehrer Farbenstrahlen in Luft, die

Digitized by Google

ich früher aus älteren von Bessel nahe am Horizont gemachten Messungen von Sternspectren hergeleitet hatte, und andrerseits auf die von Mascart in Millionteln von Millimetern bestimmten Messungen der entsprechenden Wellenlängen[1]). Der numerische Werth von b ist offenbar der zweite numerische Coëfficient der folgenden Gleichung, die ich aus diesen Daten hergeleitet habe:

$$n = 1{,}00029143 + \frac{0{,}948383}{\lambda^2}.$$

Hinzugefügt sey, dafs die mittelst dieser Gleichung berechneten Brechungsindexe vollständig übereinstimmten mit den aus den Beobachtungen selbst abgeleiteten Werthen.

Substituiren wir den numerischen Werth von b in dem Ausdruck für d und vollziehen die Rechnungen, indem wir n seinen Werth 1,00029438 geben, welches der mittlere Index der Luft ist, so erhalten wir schliefslich den Ausdruck:

$$d = x \times 0{,}01561 \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda'^2}\right) R.$$

Benutzen wir diese Formel zur Berechnung des Zwischenraums zweier Strahlen eines Sterns, von denen der eine der brechbarsten und der andere der wenigst brechbaren Linie der Gruppe D des Sonnenspectrums angehört, wenn dieser Stern, der in seinem Spectrum ebenfalls diese Linien zeigt, eine scheinbare Zenithdistanz von 70° hat, an einem um 5000 Meter vom Beobachter entfernten Ort. Die folgenden Berechnungen gelten für 0° und 0^m,760. Nach Mascart haben diese beiden Linien, ausgedrückt in Millionteln des Millimeters, eine Wellenlänge $\lambda = 588{,}8$ und $\lambda' = 589{,}43$. Nach Vollziehung aller dieser Rechnungen findet man für den Werth des Zwischenraums a, bei 5000 Met. Entfernung vom Beobachter, 0^m,07. Das ist die Breite der Lücke, welche bei 5000 Met. in der Atmosphäre und bei 20° Höhe des Sterns über dem Ho-

1) *Ann. de chim. et de phys. Sér. IV, T. XIII.*

2) *Notice sur le pouvoir dispersif de l'air (Bull. de l'Acad. de Belgique, Sér. II, T. XXIV.*

Digitized by Google

rizont die äufsersten Strahlen der Liniengruppe *D* trennt bei jedem Stern, welcher diese Linien und folglich das Daseyn des Natriums unter seinen Elementen darbietet. Hat der Stern nicht mehr als 10° Höhe, so wird die Breite der Lücke, bei derselben Entfernung vom Beobachter, das Doppelte seyn oder $0^m,14$, denn bei 80° Zenithdistanz ist der Werth *R* der Refraction genau das Doppelte von der bei 70°.

Wie schmal auch solche Lücken sind, so ist doch ihre Anzahl sehr grofs und folglich ihr Einfluſs sehr merklich in einem Bündel, das von einem Sterne kommt, dessen Spectrum von einer grofsen Anzahl Linien durchfurcht ist.

Berechnen wir jetzt den angenäherten Werth des Zwischenraums *a* zwischen den äufsersten Strahlen, welche den Gränzen einer ausgedehnten Zone in dem Spectrum eines Sterns entsprechen. Die Abhandlung IV des Paters Secchi ist begleitet von einer Abbildung des Spectrums von α Orion, wie er es im März 1872 beobachtete. Dieses Spectrum ist bis zur Länge von $0^m,37$ entwickelt. Unter den Streifen, welche es verdunkeln, ist einer, welcher beinahe die Hälfte des Zwischenraums zwischen den Linien *A* und *B* einnimmt. Hr. Mascart hat die Wellenlänge der Linie *A* nicht gemessen; allein Hr. van der Willigen, dessen sämmtliche Wellenmessungen, die den Vergleich mit denen anderer Physiker vortheilhaft bestanden haben, sehr gut mit denen des Hrn. Mascart übereinstimmen, hat für die der Linie *A* entsprechende Wellenlänge 706,33 gefunden. Was die Messung für *B* betrifft, so ist sie gleich 686,58. Geben wir λ diesen Werth und λ' den des Mittels der Wellenlängen von *A* und *B*, um die Wellenlänge, welche im Spectrum von α Orion der Extremität der in der Mitte dieser beiden Linien liegenden Zone nahezu entspricht, zu repräsentiren, so erhalten wir $\lambda' = 723{,}45$. Bei Anwendung dieser Werthe auf die Berechnung von *d*, mit denselben Voraussetzungen, $Z = 70°$ und $x = 5000^m$, findet man für den Werth des

Digitized by Google

Zwischenraums d bei dieser letzteren Entfernung $2^m,62$. Bei 10° Höhe oder 80° Zenithdistanz des Sterns steigt der Werth von d auf das Doppelte oder $5^m,24$. Die Lücken zwischen den beiden Strahlen, welche den beiden Extremitäten der Zone entsprechen, haben also, wie man sieht, bei einem nicht sehr über den Horizont erhobenen Stern eine merkliche Breite, selbst bei einer beschränkten Entfernung vom Beobachter.

Berechnet man, wie ich es in einer vorhin angeführten Arbeit gethan, die ganze, verticale Ausdehnung des Luftspectrums eines Sterns, begriffen zwischen den in der Luft gebrochenen rothen und violetten Strahlen, wenn die Zenithdistanz des Sterns 80°, so findet man 5″,5. Der lineare Bogen, welcher diesem Winkelwerth bei 5000 Met. Entfernung entspricht, ist $133^m,3$. Das Verhältnifs der Breite $5^m,24$ der Lücke, welche der besagten Zone in dem Spectrum von α Orion bei dieser totalen Ausdehnung des Luftspectrums entspricht, ist sehr nahe $\frac{1}{25}$.

Dieser relative Werth erlaubt uns zu schätzen, um wieviel die absolute Häufigkeit des Funkelns von α Orion verringert wird durch das Daseyn dieser Lücke in den von diesem Stern ausgehenden Strahlenbündeln, welche nach ihrer Zerstreuung in der Atmosphäre in's Auge des Beobachters gelangen. Diese Verringerung ist offenbar am stärksten, wenn die spectrale Zone, welche dieser Lücke entspricht, von absoluter Dunkelheit ist.

Das erwähnte numerische Verhältnifs bleibt bei verschiedenen Zenithdistanzen nahezu dasselbe, vorausgesetzt, die Breite des Zwischenraums d und die des Bündels zwischen den extremen Strahlen seyen respective proportional der atmosphärischen Refraction, welche jeder Zenithdistanz entspricht. Die Proportionalität der ganzen Breite des Bündels bei dieser Refraction erklärt hinreichend, weshalb die Häufigkeit des Funkelns eines selben Sterns bis zu einer gewissen Gränze proportional ist der atmosphärischen Refraction, gemäfs dem zweiten Gesetz des

Digitized by Google

Hrn. Dufour, wie ich das in einer früheren Arbeit gezeigt habe[1]).

IV. *Zur Theorie der elastischen Nachwirkung*[2]); *von Ludwig Boltzmann in Wien.*

(Aus Bd. LXX der Berichte der Wiener Akad. vom Hrn. Verf. übersandt.)

I. Aufsuchung des mathematischen Ausdruckes für die elastische Nachwirkung.

Schon Weber und Kohlrausch, welche zuerst die elastische Nachwirkung untersuchten (Pogg. Ann. Bd. 54, 119 und 128), waren bemüht, eine allgemeine, und zwar sogar eine auf Betrachtungen über die Molecularconstitution der Körper gegründete Formel für die Gesetze derselben aufzustellen. Ihre Formeln sind jedoch nur auf die speciellen von ihnen untersuchten Fälle anwendbar. Sie lösen das Problem nicht vollkommen allgemein, d. h. sie sind nicht im Stande, folgende Frage zu beantworten: wie grofs ist die elastische Nachwirkung, wenn die vorangegangene Deformation des Körpers eine ganz beliebige Function der Zeit ist. Später wurde meines Wissens nur noch eine Theorie der elastischen Nachwirkung aufgestellt, und zwar von Hrn. Oskar Emil Meyer (Pogg. Ann. Bd. 131, S. 108). Dieselbe sucht allerdings das Problem in dieser Allgemeinheit zu lösen; allein die Gleichungen Hrn. Meyer's sind so beschaffen, dafs man sich unschwer überzeugen kann, dafs sie die charakteristischen Eigenthümlichkeiten der elastischen Nachwirkung auch nicht qualitativ wiederzugeben im Stande sind. Dieselben enthalten nämlich nur Differentialquotienten der Verschie-

1) *Notice sur scintillation des étoiles (Bull. de l'Acad. de Belgique, Sér. III, T. XXV).*

2) Es ist dies der Aufsatz, von welchem Hr. O. E. Meyer (diese Ann. Bd. 154, S. 360) behauptet, dafs die daselbst aufgestellten Gleichungen mit den seinigen vollständig übereinstimmen.

Digitized by Google

bungen nach den Coordinaten und nach der Zeit, woraus folgt, dafs die auf eine Deformation folgende elastische Nachwirkung wesentlich von der Art und Weise abhängt, wie der Körper aus der Deformation wieder in die ursprüngliche Lage zurückkehrt. Sie müfste ganz verschwinden, wenn jedes Element des Körpers nach einer beliebigen Deformation desselben auch nur sehr kurze Zeit durch entsprechende Kräfte in seiner ursprünglichen Lage ruhend erhalten würde, und sie müfste aufserordentlich klein werden, wenn man den Körper langsam in seine Ruhelage zurückkehren liefse. Natürlich kann auch die Anwendung der Meyer'schen Formeln auf specielle Fälle nicht mit der Erfahrung stimmen. In den beiden Fällen, die Hr. Meyer der Betrachtung unterzieht, dem der Dehnung und dem der Torsion eines Drahtes, findet er allerdings elastische Nachwirkung, allein dieselbe rührt blos daher, dafs die hohen Obertöne in gewissen Fällen schwächer als der Grundton gedämpft werden.

Ein in Folge der elastischen Nachwirkung gedehnter Draht müfste also keineswegs gleichförmig gedehnt seyn; in demselben wäre vielmehr das untere Ende am stärksten nach abwärts verschoben. Dann würden solche Stellen kommen, welche fast gar nicht nach abwärts, vielleicht sogar nach aufwärts verschoben wären, dann wieder solche, die stärker nach abwärts verschoben wären usw. Aehnlich verhielte sich ein tordirter Draht. Aufserdem würde der von Hrn. Meyer hervorgehobene Fall, dafs die elastische Nachwirkung länger dauert, als die (nicht von aufsen gedämpften) Schwingungen, nur dann eintreten, wenn die Bewegung des Drahtes bereits bei $\sqrt{2}$mal kleinerer Länge desselben aperiodisch würde. Doch dies alles ist noch nicht die Hauptsache. Hr. Meyer hat sich nämlich die Integration dadurch sehr erschwert, dafs er einen Fall der Rechnung unterzog, der von den bisher experimentell geprüften und leicht zu prüfenden total verschieden ist, indem er das dehnende (resp. tordirende) Gewicht als massenlos betrachtet. Das Gewicht spielt bei

Digitized by Google

Hrn. Meyer keine andere Rolle, als dafs zu den Schwingungen eine constante Dehnung (resp. Torsion) des Fadens hinzukömmt, welcher sonst ganz so schwingt, als ob sein unteres Ende vollkommen frei wäre, und er unter entsprechender Anregung schwänge. Legt man dem angehängten Gewichte eine Masse bei, so verwandelt sich die für das freie Ende geltende Bedingung in folgende:

$$A - B\frac{d^2u}{dt^2} = a\frac{du}{dx} + 2b\frac{d^2u}{dx\,dt}, \qquad (1)$$

wobei für den Fall der Dehnung $A = \frac{P}{\varepsilon Q}$, $B = \frac{M}{\varepsilon Q}$, für den der Torsion $A = \frac{2D}{\pi R^4 \varepsilon}$, $B = \frac{2K}{\pi R^4 \varepsilon}$ ist. M ist die Masse, K das Trägheitsmoment des dehnenden Gewichts. Im Uebrigen sind die Bezeichnungen die Meyer'schen. Setzt man

$$u = \frac{A}{a}x + \omega$$

und

$$\omega = \Sigma C e^{-\alpha t} \sin \gamma x,$$

so mufs γ eine beliebige Wurzel der Gleichung

$$\gamma\, tg\, \gamma\lambda = \frac{1}{B} \qquad (2)$$

seyn; das dazu gehörige α ist durch die Gleichung:

$$\alpha^2 + a\gamma^2 - 2b\,\alpha\gamma^2 = 0$$

bestimmt. B ist die Länge, welche man dem Drahte, ohne dessen Dichte und Querschnitt zu ändern, geben müfste, damit er im Falle von Longitudinalschwingungen dieselbe Masse, im Falle von Torsionschwingungen bezüglich seiner Mittellinie dasselbe Trägheitsmoment, wie das angehängte Gewicht hätte. Dieselbe ist bei den Beobachtungen meist sehr grofs gegen die wirkliche Länge des Drahtes. Dann ist eine Wurzel der Gleichung (2) nahe gleich $\frac{1}{\sqrt{B\lambda}}$, die übrige nahe gleich $\frac{k\pi}{\lambda}$, wobei k irgend eine ganze Zahl bedeutet. Die erste Wurzel entspricht

Digitized by Google

einer einfachen Pendelschwingung, die unverhältnifsmäfsig langsam gegen alle übrigen geschieht, und welche allein der Beobachtung unterzogen zu werden pflegt.

Ihre Schwingungsdauer sey τ'.

Alle anderen Wurzeln entsprechen sehr raschen Pendelschwingungen, welche fast so vor sich gehen, als ob das untere Ende des Drahtes ebenfalls fix wäre.

Bezeichnen wir den reellen (positiven) Theil von α als den Extinctionscoëfficienten. Dann ist der Extinctionscoëfficient ε_1 der langsamsten Pendelschwingungen $= \frac{b}{B\lambda}$, der kleinste Extinctionscoëfficient ε_2 jener raschen Schwingungen, denen Hr. Meyer die elastische Nachwirkung zuschreibt, aber ist $= \frac{a}{2b}$. Das Verhältnifs $\varepsilon_1 : \varepsilon_2$ ist also nahe gleich $\frac{1}{2\pi^2}\varepsilon_1^2\tau_1^2$. Denn für die Schwingungsdauer τ_1^2 der langsamsten Schwingungen findet man den Werth $\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{a}{B\lambda} - \frac{b^2}{B^2\lambda^2}}}$, also nahezu $2\pi\sqrt{\frac{B\lambda}{a}}$.

$\varepsilon_1\tau_1$ ist die Gröfse, welche man gewöhnlich als das logarithmische Decrement bezeichnet. Dieselbe war sowohl bei den Versuchen Warburg's (Berl. Monatsb. Juli 1869), als auch bei denen Streintz's (Wiener Sitzungsber. Bd. 69), die sich auf gewöhnliche Temperaturen bezogen, kleiner als 0,01. Es folgt daraus, dafs die langsamsten Schwingungen unter den Verhältnissen, wie sie bei den bisher untersuchten Fällen statt hatten, nach den Meyer'schen Gleichungen weitaus den kleinsten Extinctionscoëfficienten haben, und daher die Formeln Meyer's keine Spur elastischer Nachwirkung liefern, nicht einmal dann, wenn die langsamsten Schwingungen durch äufsere Einflüsse hunderttausendmal so rasch beruhigt würden. Wenn man das dehnende Gewicht mittelst der Hand langsam in seine ursprüngliche Lage zurückkehren läfst, so werden übrigens dadurch nicht blos die langsamsten, sondern auch die raschen Schwingungen aufgehalten.

Digitized by Google

Bei dieser Sachlage dürfte es kaum überflüssig seyn, wenn ich hier einige Formeln mittheile, welche ebenfalls eine allgemeine Auflösung des oben angeführten Problems der elastischen Nachwirkung in seiner gröfsten Allgemeinheit geben, und welche jedenfalls qualitativ die Phänomene der elastischen Nachwirkung richtig liefern dürften; ob auch quantitativ, wird erst entschieden werden können, wenn mannigfaltigere experimentelle Daten vorliegen. Doch habe ich wenigstens in den wichtigsten Fällen die Rechnung so weit durchgeführt, dafs eine unmittelbare Vergleichung mit dem Experimente ohne alle Schwierigkeit möglich ist. Dafs behufs einer unbedingten Uebereinstimmung mit der Erfahrung meine Formeln noch einer Correction bedürfen werden, darauf deutet schon der von Weber und Kohlrausch beobachtete Umstand hin, dafs dauernde Deformationen (unvollkommene Elasticität) eintritt, wenn der Draht nicht vorher einigemal hin und her tordirt wurde, sowie auch der von Streintz gefundene Einfluſs vorangegangener Deformationen auf das logarithmische Decrement. Trotzdem dürften meine Formeln den Experimentatoren vielleicht willkommene Anhaltspunkte geben.

Die Grundvorstellung, welche meinen Formeln zu Grunde liegt, ist folgende. Denken wir uns einen elastischen parallel epipedischen Körper, dessen Kanten parallel den Coordinatenaxen sind. Derselbe sey in der Richtung jeder der Coordinatenaxen gleichförmig gedehnt. Die Dehnung der Längeneinheit sey α in der Richtung der x-Axe, β in der Richtung der y-Axe, γ in der Richtung der z-Axe. Dann müfsten auf die Begränzungsfläche des Körpers lauter constante normale Zugkräfte wirken, und zwar auf die beiden Flächen, welche senkrecht zur x-Axe stehen, mufs auf die Flächeneinheit eine Zugkraft von der Intensität

$$N_1 = \lambda(\alpha + \beta + \gamma) + 2\mu\alpha \qquad (3)$$

wirken. Analoges gilt von der y- und z-Axe. λ und μ sind die bekannten von Lamé in seiner Elasticitätslehre

Digitized by Google

gebrauchten Constanten. Aus dieser Thatsache lassen sich die allgemeinen Gleichgewichts- und Bewegungsgleichungen für den als isotrop vorausgesetzten Körper ableiten, sobald man nur die Voraussetzung hinzunimmt, dafs auch bei ungleichförmiger Dehnung sehr kleine Parallelepipede als gleichförmig gedehnt betrachtet werden können. (Vergleiche die Elasticitätstheorie von Clebsch.) Von denselben Principien gehe auch ich aus; nur nehme ich an, dafs die Kräfte, die auf die Begränzungsflächen des Parallelepipedes zu einer bestimmten Zeit wirken, nicht blos abhängen von den Dehnungen des Parallelepipeds zu jener Zeit, sondern auch von den vorhergegangenen Dehnungen desselben, wobei jedoch eine Dehnung einen um so geringeren Einfluſs hat, vor je längerer Zeit sie stattfand; und zwar ist die Kraft, welche zur Erzeugung einer bestimmten Dehnung erforderlich ist, geringer, wenn schon früher eine Deformation im gleichen Sinne Statt hatte. Ich will diese Thatsache, dafs eine früher vorhandene Dehnung die Kraft, welche zur Erzeugung einer Dehnung im gleichen Sinne nothwendig ist, vermindert, „die durch jene frühere Dehnung erzeugte Kraftverminderung“ nennen. Wenn zu irgend einer Zeit τ während des Zeitdifferentials $d\tau$ der Körper die Dehnung $\alpha(\tau)$ hatte, so nehme ich an, dafs die Kraftverminderung, welche diese Dehnung auf die zur Zeit t wirkende Kraft ausübt, proportional $d\tau$, $\alpha(\tau)$ und einer Function der Zeit $t-\tau$ ist, vor welcher die Dehnung Statt hatte.

Hiezu braucht man nur noch die Annahme hinzuzufügen, dafs sich der Einfluſs der zu verschiedenen Zeiten vorhandenen Deformationen superponirt, d. h. dafs die Kraftverminderung, welche eine bestimmte vor einer bestimmten Zeit stattgefundene Dehnung erzeugt, nicht abhängt von den Zuständen, welche der Körper inzwischen durchlaufen hat[1]), um sofort bis auf zwei Functionen der

1) Dieses Princip der Superposition ist für nicht allzugroſse Deformationen ziemlich plausibel, während es für sehr starke vielleicht nicht mehr anwendbar ist, für welche dann natürlich auch meine später entwickelten Formeln nicht mehr gelten würden.

Digitized by Google

Zeit $\varphi(t)$ und $\psi(t)$, welche angeben, in welcher Weise die kräftevermindernde Eigenschaft vorangegangener Deformationen von der Zeit abhängt, die Bewegungsgleichungen für isotrope Körper mit elastischer Nachwirkung aufstellen zu können. Wir betrachten zunächst wieder ein Parallelepiped der Substanz. Die drei Dehnungen α, β, γ der Längeneinheit der drei Seiten seyen zu jeder Zeit gleichförmig, aber zu verschiedenen Zeiten verschieden gewesen. Sie werden also Functionen der Zeit t seyn, weshalb wir sie mit $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ bezeichnen wollen.

Aus meinen Voraussetzungen ergiebt sich dann, wenn man $t - \tau = \omega$ setzt und auch $d\omega$ für $d\tau$ einführt, statt der Formel (3) folgende:

$$N_1 = \lambda\,[\alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t)] + 2\mu\,\alpha(t) - \\ - \int_0^\infty d\omega\,.\,\varphi(\omega)\,.\,[\alpha(t-\omega) + \beta(t-\omega) + \gamma(t-\omega)] \\ - 2\int_0^\infty d\omega\,\psi(\omega)\,.\,\alpha(t-\omega).$$

Hieraus findet man, wenn man genau so verfährt, wie es Clebsch an der citirten Stelle thut, folgende allgemeine Gleichungen:

$$N_1 = \lambda(t) + 2\mu\,\frac{du(t)}{dx} - \int_0^\infty d\omega\left[\varphi(\omega)\,.\,\theta(t-\omega) + 2\,\psi(\omega)\,\frac{du(t-\omega)}{dx}\right] \qquad (4)$$

$$T_1 = \mu\left(\frac{dv(t)}{dz} + \frac{dw(t)}{dy}\right) - \int_0^\infty d\omega\,\psi(\omega)\left[\frac{dv(t-\omega)}{dz} + \frac{dw(t-\omega)}{dy}\right].$$

Die Gleichungen für die übrigen Kräfte können nach Analogie gebildet werden. Die Bezeichnungen sind ganz die Lamé's; $\theta(s)$, $u(s)$ . . sind die Werthe dieser Gröſsen zur Zeit s; die Bewegungsgleichungen (Lamé, *Leçons sur la théorie de l'élasticité*, p. 66, *équations* [4]) bleiben vollständig unverändert. Aehnliche Gleichungen lassen sich auch aus der von mir Borchardt's Journal, Bd. 81 er-

Digitized by Google

wähnten Hypothese ableiten, wurden aber von Hrn. Meyer meines Wissens niemals daraus abgeleitet.

Die Function ψ wird durch Torsionsversuche bestimmt.

Werde ein Draht, der die Gestalt eines Cylinders von der Länge l und dem Radius R hat, tordirt; die Cylinderaxe sey die x-Axe, für den obersten fixen Querschnitt sey $x = 0$.

Wir könnten die langsamsten Schwingungen, sowie sämmtliche Obertöne genau nach der Methode berechnen, von der wir sahen, dafs sie bei Lösung der Meyerschen Gleichungen angewendet werden mufs. Da wir jedoch annehmen, das Trägheitsmoment des Gewichtes, mit dem der Draht beschwert ist, sey sehr grofs, so erzielen wir sicher eine genügende Genauigkeit, wenn wir annehmen, dafs der Draht in jedem Augenblicke gleichförmig tordirt ist. Wir haben dann zu setzen:

$$u = 0,\ v = -\frac{xz\vartheta(t)}{l},\ w = \frac{xy\vartheta(t)}{l}$$

und erhalten, indem wir nach Berechnung des Momentes sämmtlicher elastischer Kräfte, die auf den untersten Querschnitt des Drahtes wirken, die Bewegungsgleichung für das angehängte Gewicht aufstellen:

$$D - K\frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} = \frac{\pi R^4}{2l}\left[\mu\vartheta(t) - \int_0^\infty d\omega\,\psi(\omega)\vartheta(t-\omega)\right] \quad (5).$$

Dabei ist $\vartheta(t)$ der Winkel, um den in Folge der Torsion der unterste Querschnitt des Drahtes zur Zeit t verdreht ist; D das auf denselben zur selben Zeit von aufsen wirkende Drehungsmoment.

Die Function ψ kann durch verschiedene Versuche bestimmt werden.

1. Der Draht sey anfangs vollkommen untordirt; dann werde er um einen gewissen Winkel c tordirt und diese Torsion constant erhalten. (Ich sage immer, der Draht sey um einen gewissen Winkel tordirt, wenn sein unterster Querschnitt um diesen Winkel gedreht ist, sowie ich sage, ein Drehungsmoment wirkt auf den Draht, statt auf dessen untersten Querschnitt.) Sieht man von den jedenfalls

Digitized by Google

rasch wieder verschwindenden, durch die Torsion erzeugten Schwingungen ab, so ist also zu setzen: von $t = -\infty$ bis $t = 0$, $\vartheta(t) = 0$; für alle späteren t aber $\vartheta(t) = c$, und man erhält:

$$D = \frac{\pi R^4 c}{2l}\left[m - \int_0^t d\omega\,\psi(\omega)\right] \qquad (6),$$

folglich

$$\psi(t) = -\frac{2l}{\pi R^4 c}\cdot\frac{dD}{dt} \qquad (7).$$

Bezeichnet man das Drehungsmoment, welches gleich nach der Torsion wirkte, mit D_0, so ist

$$D_0 = \frac{\pi R^4 c\mu}{2l} \qquad (8),$$

daher

$$\psi(t) = \frac{\mu}{D_0}\,\frac{dD}{dt} \qquad (9).$$

Führt man lieber die übrigens nur um eine Gröfse von der Ordnung der elastischen Nachwirkung von D_0 verschiedene Gränze D_∞ ein, der sich das Drehungsmoment nach sehr langer Zeit nähert, und bezeichnet mit μ' die Constante

$$\mu - \int_0^\infty d\omega\,\psi(\omega),$$

so ist

$$\psi(t) = \frac{\mu'}{D_\infty}\,\frac{dD}{dt} \qquad (10).$$

Die Function $\psi(t)$ kann also bestimmt werden, wenn man D als Function der Zeit bestimmt hat. μ' ist der Werth der Lamé'schen Constante μ, den man erhält, wenn man die elastischen Kräfte durch jene Verschiebungen ausdrückt, die nach sehr langer Zeit unter deren Einflufs entstehen.

2. Man ertheilt dem Drahte nur während kurzer Zeit $\left(\text{von } t = -\frac{\tau}{2} \text{ bis } t = +\frac{\tau}{2}\right)$ eine constante Torsion um den Winkel γ. Er würde dann, wenn nach der Zeit $+\frac{\tau}{2}$ auf sein unteres Ende keine Kraft mehr wirken

Digitized by Google

würde, in Folge der Nachwirkung noch längere Zeit ein wenig in demselben Sinne tordirt bleiben. Man bestimmt das Moment, welches zu irgend einer Zeit $t > +\frac{\tau}{2}$ auf das untere Ende wirken muſs, um dasselbe fortwährend in jener Lage zu erhalten, welche es vor aller Torsion inne hatte. In diesem Falle ist $\vartheta(t)$ immer gleich Null, nur von $t = -\frac{\tau}{2}$ bis $t = +\frac{\tau}{2}$ ist es gleich γ.

Man hat also

$$D = -\frac{\pi R^4 \gamma}{2l} \int_{t+\frac{\tau}{2}}^{t-\frac{\tau}{2}} d\omega \, \psi(\omega) \qquad (11),$$

und weil τ klein ist, nahe

$$D = -\frac{\pi R^4 \gamma \tau}{2l} \psi(t) \qquad (12)$$

$$\psi(t) = -\frac{2lD}{\pi R^4 \gamma \tau},$$

oder wenn μ' dieselbe Bedeutung wie früher hat, Δ_0, Δ_∞, aber die Werthe sind, die aus den früher mit D_0, D_∞ bezeichneten Gröſsen entstehen, wenn man darin γ für c substituirt:

$$\psi(t) = -\frac{\mu}{\tau}\frac{D}{\Delta_0} = -\frac{\mu'}{\tau}\frac{D}{\Delta_\infty} \qquad (13).$$

Wir haben bisher während der Zeit, während welcher die Nachwirkung beobachtet wird, die Torsion auf einem constanten Werthe c erhalten, und die Art und Weise studirt, wie sich das hiezu nothwendige Drehungsmoment D verändert; wir wollen diesen Fall immer den der Kraftnachwirkung nennen. Unter „Verschiebungsnachwirkung“ dagegen wollen wir den Fall verstehen, wo das auf das freie Ende wirkende Drehungsmoment auf einem constanten Werthe D' erhalten wird, und die Verdrehung ϑ des unteren Querschnittes beobachtet wird. Es wäre daher bei der Verschiebungsnachwirkung in jedem Momente $D - D'$ dasjenige Drehungsmoment, welches zu dem schon vorhandenen D hinzugefügt werden müſste, um die Torsion

Digitized by Google

auf c zu bringen, also um $c - \vartheta$ zu vermehren. Weil die Nachwirkung immer klein ist, so kann man sie bei Aufstellung der Relation zwischen dem Momente $D - D'$ und der dadurch erzeugten Torsion $c - \vartheta$ vernachlässigen, wodurch man erhält:

$$c - \vartheta = \frac{2\,l\,(D - D')}{\pi R^4 \mu} \qquad (14).$$

Aus dem sub 1 betrachteten Falle wird dadurch folgender:

3. Von $t = -\infty$ bis $t = 0$ war der Draht untordirt, für die folgenden Zeiten wirke auf ihn das constante Drehungsmoment D'. Im ersten Momente der Wirksamkeit des Drehungsmomentes D' verhält sich der Draht dann ganz, wie in dem sub 1 betrachteten Falle, weſshalb c und D' durch dieselbe Gleichung wie dort c und D_0 verbunden sind, also durch die Gleichung (8). Man hat also:

$$D' = \frac{\pi R^4 c \mu}{2\,l}.$$

Die Torsion ϑ des Drahtes zur Zeit t findet man, indem man den durch Formel (6) gegebenen Werth von D in die Formel (14) substituirt und daraus ϑ berechnet, wodurch sich ergiebt:

$$\vartheta = c + \frac{c}{\mu} \int_0^t d\omega\, \psi(\omega) \qquad (15),$$

oder wenn man die Gröſse D' einführt:

$$\vartheta = \frac{2\,l\,D'}{\pi R^4 \mu} \left[1 + \frac{1}{\mu} \int_0^t d\omega\, \psi(\omega) \right] \qquad (16).$$

Die nach sehr langer Zeit eintretende Verdrehung c_∞ ist

$$c + \frac{c}{\mu} \int_0^\infty d\omega\, \psi\omega.$$

4. Vergleichen wir hiemit noch folgenden Fall. Von $t = -\infty$ bis $t = 0$ sey der Draht um einen gewissen Winkel c_∞ verdreht gewesen, für alle folgenden Zeiten

Digitized by Google

wirke keine Kraft auf denselben, in Folge der Nachwirkung sey er zur Zeit t noch um den Winkel ϑ' gedreht. Dann ist $\vartheta' = c_\infty - \vartheta$, wobei ϑ die durch Formel (15) gegebene Gröfse ist. Man hat also:

$$\vartheta' = \frac{c_\infty}{\mu} \int_t^\infty d\omega\, \psi(\omega),$$

$$\psi(t) = -\frac{\mu}{c_\infty} \frac{d\vartheta}{dt} \qquad (17).$$

Beobachtet man bei dem sub 2 betrachteten Falle die Verschiebungsnachwirkung, so hat man in Formel (14) $c = 0$, $D' = 0$, für D aber dessen Werth aus Gleichung (12) zu setzen, und erhält folgenden Fall:

5. Sey der Draht von $t = -\infty$ bis $t = -\frac{\tau}{2}$ unterordinirt, von $t = -\frac{\tau}{2}$ bis $t = +\frac{\tau}{2}$ um den Winkel γ tordirt gewesen, worauf auf den unteren Querschnitt keine Kraft mehr wirke, dann ist er in Folge der Nachwirkung zur Zeit t noch um den Winkel

$$\vartheta = \frac{\gamma\tau}{\mu} \psi(t) \qquad (18)$$

tordirt. Sucht man aus derartigen Versuchen ψ, so ist also

$$\psi(t) = \frac{\mu}{\gamma\tau} \vartheta \qquad (19).$$

6. Wir hängen an ein und denselben Draht Gewichte von verschiedenem Trägheitsmomente K an und bestimmen das logarithmische Decrement $\varepsilon\tau$ oder der Extinctionscoëfficienten ε als Function der Schwingungsdauer τ, wenn während der Schwingungen auf den Draht und das angehängte Gewicht keine anderen als die elastischen Kräfte wirken. Dann ist in Formel (5) $D = 0$ zu setzen.

Setzen wir jetzt:

$$\vartheta(t) = Ce^{-\varepsilon t} \sin . (n + \alpha)\, t,$$

wobei $n = \sqrt{\frac{\pi R^4 \mu}{2lK}}$, so werden ε und α sehr klein seyn;

Digitized by Google

man kann daher in dem bestimmten Integrale der Gleichung (5), welches ebenfalls klein ist, $\varepsilon = \alpha = 0$ setzen und erhält:

$$\varepsilon = \frac{n}{2\mu}\int_0^\infty \sin(n\omega)\,\psi(\omega)\,d\omega,$$
$$\alpha = -\frac{n}{2\mu}\int_0^\infty \cos(n\omega)\,\psi(\omega)\,d\omega \qquad (20).$$

Bezeichnet man ε als Function von n mit $\varepsilon(n)$, so erhält man aus der ersten der Gleichungen (20) leicht $\psi(t)$ mittelst des Fourier'schen Satzes.

Es ist nämlich:

$$\psi(t) = \frac{4\mu}{\pi}\int_0^\infty \frac{\varepsilon(n)}{n}\sin.(nt)\,dn \qquad (21).$$

Das logarithmische Decrement L ist $\varepsilon\tau$, τ aber ist $\frac{2\pi}{n}$. Sey $L = \chi(\tau)$, so ist also:

$$\varepsilon = \frac{1}{\tau}\chi(\tau) = \frac{n}{2\pi}\chi\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

woraus man findet:

$$\psi(t) = 2\mu\int_0^\infty \chi\left(\frac{2\pi}{n}\right)\sin(nt)\,dn \qquad (22).$$

Dies ist die Formel, nach welcher die Function $\psi(t)$ aus dem Schwingungsversuche berechnet werden kann. Wirkt auch eine äußere ϑ proportionale Kraft auf den Draht, so vereinigt sie sich mit μ, was aber dann eventuell unter dem Integralzeichen stehen muſs.

Die Function φ kann in ganz analoger Weise aus Drehungsversuchen bestimmt werden. Da jedoch die meisten Nachwirkungsversuche bisher die Torsion zum Gegenstande hatten, und da zudem höchst wahrscheinlich φ dieselbe Form wie ψ hat, so will ich mich hierauf vorläufig nicht weiter einlassen.

Mittelst der Formeln (7) und (19) könnte man leicht aus den verschiedenen Beobachtungen Kohlrausch's

Digitized by Google

(l. c.) die Function ψ bestimmen, wobei nur noch ein für sehr grofse t verschwindender Factor hinzuzufügen wäre, um das Unendlichwerden von $\int_t^\infty \psi(\omega)\, d\omega$ zu verhindern. Doch erhält man in dieser Weise nur wenig übereinstimmende Werthe von ψ, weil Kohlrausch's Zahlen dem Principe der Superposition nur sehr unvollkommen genügen.

Aus Neesen's Versuchen (Berl. Monatsber. Febr. 1874) würde $\psi(t) = a\mu e^{-bt}$ folgen, wobei a und b zu bestimmende Constanten sind. Es ginge also die Formel (6) über in

$$D = \frac{\pi R^4 c}{2l}\left(\mu + \frac{a\mu}{b} c^{-bt}\right) = D_0\left(1 + \frac{a}{b} e^{-bt}\right)$$
$$= D_\infty\left[1 - \frac{a}{b}(1 - e^{-bt})\right] \qquad (23),$$

die Formel (18) in

$$\vartheta(t) = \gamma\tau a e^{-bt} \qquad (24),$$

die Formel (20) in

$$\varepsilon = \frac{an^2}{2(n^2+b^2)} = \frac{a}{2\left(1 + \frac{\tau^2 b^2}{4\tau^2}\right)}, \quad \alpha = -\frac{abn}{2(n^2+b^2)} \qquad (25).$$

Hat man also die auf eine kurze Torsion γ während der Zeit τ folgende Nachwirkung $\vartheta(t)$ beobachtet und in der Form (24) dargestellt, so läfst sich aus den Constanten a und b der Extinctionscoëfficient ε berechnen und mit der Erfahrung vergleichen. Ebenso, wenn die auf eine sehr lange Deformation folgende Nachwirkung beobachtet worden wäre. Sey von $t = \infty$ bis $t = 0$ der unterste Querschnitt um den Winkel c gedreht gewesen, dann ist nämlich die Drehung ϑ, welche zur Zeit t in Folge der elastischen Nachwirkung noch vorhanden ist, nach Formel (17)

$$\vartheta' = \frac{ca}{b} e^{-bt} \qquad (26).$$

Digitized by Google

Schwingungsversuche, aus denen die Function $\psi(t)$ nach Formel (21) bestimmt werden kann, wurden von Streintz angestellt.

Derselbe fand das logarithmische Decrement von der Schwingungsdauer unabhängig, also $\chi\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ in Formel (22) constant. Die Formel (22) wird dann unbestimmt. Man kann aber diesem Uebelstande abhelfen, indem man annimmt, dafs $\chi(\tau)$ für mäfsige τ constant ist, wenn aber τ aufserordentlich klein wird, continuirlich abnimmt, was den Beobachtungen Streintz's jedenfalls nicht widerspricht. Dann liefert die Formel (22) $\psi(t) = \frac{B}{t}$, wobei B eine Constante ist. Dieser Werth von ψ kann noch nicht unmittelbar in die Formeln eingesetzt werden, weil sowohl $\int_t^\infty \psi(t)\,dt$ als auch $\int_0^t \psi(t)\,dt$ unendlich wird. Dem ersten Uebelstande hilft man ab, indem man im Zähler von $\psi(t)$ statt der Constanten B eine Function $f(t)$ substituirt, die für mäfsige t fast constant ist, und erst für sehr grofse t immer kleiner wird, z. B. die Function Ae^{-kt} oder $\frac{A}{t^k}$, wobei k sehr klein ist.

Dem zweiten Uebelstande kann man dadurch abhelfen, dafs man $\mu = \int_0^\infty \frac{f(\omega)\,d\omega}{\omega}$ setzt, und dann beide Glieder der Formel (5) in eins zusammenzieht.

II. Aufstellung und Discussion jener Formeln für die elastische Nachwirkung, welche mir als die wahrscheinlichsten erscheinen.

Wir wollen voraussetzen, dafs die Function φ denselben Bau wie die Function ψ besitze.

Dann können wir die allgemeinen Gleichungen für die elastischen Kräfte so schreiben:

Digitized by Google

$$N_1 = \lambda\,\theta(t) + \int_0^\infty [\theta(t) - \theta(t-\omega)]\,F(\omega)\,\frac{d\omega}{\omega}$$

$$+ 2\int_0^\infty \left[\frac{du(t)}{dx} - \frac{du(t-\omega)}{dx}\right] f(\omega)\,\frac{d\omega}{\omega} \qquad (27).$$

$$T_1 = \int_0^\infty \left[\frac{dv(t)}{dz} + \frac{dw(t)}{dy} - \frac{dv(t-\omega)}{dz} - \frac{dv(t-\omega)}{dy}\right] f(\omega)\,\frac{d\omega}{\omega}$$

Von den beiden Functionen $F(\omega)$ und $f(\omega)$ genügt es, zu wissen, daſs sie für mäſsige ω constante Werthe haben, für sehr groſse ω aber sich so der Gränze Null nähern, daſs $\int_1^\infty f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}$ und $\int_1^\infty F(\omega)\frac{d\omega}{\omega}$ convergiren. Dabei sind $u(t)$ $v(t)$, $w(t)$ die Verschiebungen des Punktes mit den Coordinaten x, y, z parallel den Coordinatenaxen, $\theta(t)$ ist $= \frac{du(t)}{dx} + \frac{dv(t)}{dy} + \frac{dw(t)}{dz}$. Auf ein Flächenelement vom Flächeninhalte df, welches senkrecht auf der x-Axe steht, wirken die Kräfte $N_1\,df$, $T_3\,df$, $T_2\,df$ parallel der x-, y- und z-Axe. Die Ausdrücke für die übrigen Kräfte können nach Analogie gebildet werden. Dazu kommen noch dieselben Bewegungsgleichungen, welche Lamé (l. c.) aufstellt, nämlich:

$$\varrho\,\frac{d^2u(t)}{dt^2} = \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} + X$$

$$\varrho\,\frac{d^2v(t)}{dt^2} = \frac{dT_3}{dx} + \frac{dN_2}{dy} + \frac{dT_1}{dz} + Y \qquad (28).$$

$$\varrho\,\frac{d^2w(t)}{dt^2} = \frac{dT_2}{dx} + \frac{dT_1}{dy} + \frac{dN_3}{dz} + Z$$

Dabei ist ϱ die Dichte, X, Y, Z sind die beschleunigenden Kräfte, die auf das Innere des Körpers wirken. Ich will diese Formeln wieder vorläufig nur auf denjenigen Fall anwenden, welcher am leichtesten zu untersuchen ist, nämlich auf den der Torsion.

Der vertical herabhängende Draht sey genau wie früher ein gerader Kreiscylinder von der Länge l und dem Radius R. Das Centrum seiner oberen fixen Endfläche sey der

Digitized by Google

Coordinatenanfangspunkt, seine Axe die Abscissenaxe, sein unteres Ende mit einem Gewichte belastet, dessen Trägheitsmoment K sehr grofs ist gegenüber dem des Drahtes (alles bezogen auf die gemeinsame Drehungsaxe). Dann werden, wenn wir von der durch die Schwere des Gewichtes erzeugten Dehnung abstrahiren, die sich nur zur Schwingungsbewegung superponirt, die Verschiebungen u, v, w folgende Werthe besitzen:

$$u = 0,\ v = \frac{-zx\,\vartheta(t)}{l},\ w = \frac{yx\,\vartheta(t)}{l},$$

wobei $\vartheta(t)$ der Winkel ist, um welchen zur Zeit t der unterste Querschnitt verdreht ist, und wenn D das Moment ist, mit welchem zur Zeit t der unterste Querschnitt gedreht wird, so hat man:

$$D - K\frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} = \frac{\pi R^4}{2l}\int_0^\infty [\vartheta(t) - \vartheta(t-\omega)]\,f(\omega)\frac{d\omega}{\omega} \quad (29).$$

Wir wollen nun wieder diese Formel auf die wichtigsten in der Praxis vorkommenden Fälle anwenden.

Sey zunächst die Bewegung des Drahtes so gering, dafs man seine Beschleunigung vernachlässigen, also $\frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} = 0$ setzen darf; bis zu einer gewissen Zeit T sey der Draht untordirt gewesen; erst wenn t gröfser als T ist, sey $\vartheta(t)$ von 0 verschieden. Die Gleichung (29) verwandelt sich dann in folgende:

$$D = \frac{\pi R^4}{2l}\vartheta(t)\int_\infty^{t-T} f(\omega)\frac{d\omega}{\omega} + \frac{\pi R^4}{2l}\int_{t-T}^{0}[\vartheta(t) - \vartheta(t-\omega)]\,f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}.$$

Wir bezeichnen nun mit ϱ irgend eine beliebige Constante; so können wir das erste Integral rechts in zwei, eines von $t-T$ bis ϱ, das andere von ϱ bis ∞ zerlegen und erhalten so:

$$D = \frac{\pi R^4}{2l}\vartheta(t)\int_\varrho^\infty f(\omega)\frac{d\omega}{\omega} + \frac{\pi R^4}{2l}\vartheta(t)\int_{t-T}^{\varrho} f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}$$
$$+ \frac{\pi R^4}{2l}\int_0^{t-T}[\vartheta(t) - \vartheta(t-\omega)]\,f(\omega)\frac{d\omega}{\omega} \quad (30).$$

Digitized by Google

Das erste bestimmte Integral ist constant, wir wollen es z. B. mit A bezeichnen, so dafs

$$A = \int_{\varrho}^{\infty} f(\omega) \frac{d\omega}{\omega} \qquad (31);$$

in dem zweiten bestimmten Integrale durchläuft ω nur endliche Werthe, so dafs $f(\omega)$ unserer Annahme gemäfs einen nahezu constanten Werth B hat, ebenso im dritten. Wir können daher, wenn wir noch setzen:

$$a = \frac{\pi R^4}{2l} \cdot A = \frac{\pi R^4}{2l} \int_{\varrho}^{\infty} f(\omega) \frac{d\omega}{\omega}$$
$$b = \frac{\pi R^4}{2l} \cdot B = \frac{\pi R^4}{2l} f(0) \qquad (32),$$

die Gleichung (30) so schreiben:

$$D = a\,\vartheta(t) - b\,\vartheta(t) \log . nat . \left(\frac{t-T}{\varrho}\right)$$
$$+ b \int_{0}^{t-T} [\vartheta(t) - \vartheta(t-\omega)] \frac{d\omega}{\omega} \qquad (33).$$

Wir wollen diese Formel zuerst zur Discussion folgender Fälle anwenden:

1. Der Draht sey bis zur Zeit Null untordirt gewesen; dann werde seine Torsion constant gleich c erhalten (d. h. wieder sein unterster Querschnitt werde um den Winkel c verdreht). Wir fragen nach der Kraftnachwirkung, d. h. welches Drehungsmoment D zu irgend einer Zeit t auf den Draht (also wieder auf seinen untersten Querschnitt) wirken mufs, um jene constante Torsion zu erhalten. Wir haben in diesem Falle in Formel (33) $T = 0$, $\vartheta(t) = \vartheta(t-\omega) = c$ zu setzen, und erhalten:

$$D = c \left[a - b \log nat \left(\frac{t}{\varrho}\right)\right] \qquad (34).$$

Diese Formel enthält scheinbar drei zu bestimmende Constanten a, b und ϱ, in Wirklichkeit aber nur zwei, da sich die Constante $\log nat\, \varrho$ zur Constante α addirt. Es

Digitized by Google

ist also ϱ ganz willkürlich und kann z. B. gleich einer Secunde gesetzt werden. Die Formel (34) gilt natürlich nicht für sehr kleine und auch nicht für sehr grofse t. Die Schuld davon liegt jedoch nicht an der Gleichung (33), sondern daran, dafs in diesen Fällen die Vernachlässigungen unerlaubt werden, die wir uns bei ihrer Integration gestatteten. Für mäfsige t ist die Nachwirkung klein, daher nahe

$$D = ca \qquad (35);$$

a ist also das Drehungsmoment, welches die Torsion um den Winkel 1 erzeugen würde, und welches wir etwa als den Torsionsmodul bezeichnen wollen.

2. Der Draht sey bis zur Zeit $-\frac{\tau}{2}$ untordirt, von $-\frac{\tau}{2}$ bis $+\frac{\tau}{2}$ um den constanten Winkel γ tordirt gewesen; man frägt nach dem Momente D, welches in den folgenden Zeiten auf ihn wirken mufs, um der Nachwirkung das Gleichgewicht zu halten, also um den untersten Querschnitt in die Lage zu bringen und daselbst zu erhalten, die er vor der Zeit $-\frac{\tau}{2}$ hatte. Bei diesem Probleme ist in Formel (33):

$$T = -\frac{\tau}{2},\ \vartheta(t) = 0,\ \vartheta(t-\omega) = \gamma \text{ von } t-\omega = -\frac{\tau}{2} \text{ bis } +\frac{\tau}{2}$$

sonst $= 0$ zu setzen, und man erhält, wenn man das bestimmte Integral angenähert ausrechnet:

$$D = -\frac{b\gamma\tau}{t}\,^{1}) \qquad (36).$$

Fragt man in diesen beiden Fällen nach der Ver-

1) Wenn man bei Berechnung des Integrals τ nicht als sehr klein voraussetzt, ergiebt sich:

$$D = -b\gamma \log nat \left(\frac{t+\frac{\tau}{2}}{t-\frac{\tau}{2}} \right) \qquad (36a).$$

Digitized by Google

schiebungsnachwirkung ϑ bei constantem Drehungsmomente D', so ist wieder nahe

$$c - \vartheta = \frac{1}{a}(D - D') \qquad (37)$$

zu setzen; aus dem sub 1 betrachteten Falle wird der folgende:

3. Der Draht war untordirt; plötzlich wirkt auf denselben das constante Drehmoment D'.

Nach Verlauf der Zeit t wird dann sein unteres Ende um den Winkel

$$\vartheta = \frac{D'}{a}\left[1 + \frac{b}{a}\log.nat.\left(\frac{t}{\varrho}\right)\right] \qquad (38)$$

verdreht erscheinen. Auf diesen Fall kann man leicht folgenden reduciren:

4. Habe durch eine sehr lange Zeit auf den Draht das Drehungsmoment D' gewirkt; plötzlich werde dasselbe aufgehoben. Nach Verlauf der Zeit t sey der untere Querschnitt des Drahtes um den Winkel ϑ gegen die Position verdreht, die er im Momente des Aufhörens des Drehungsmomentes D' hatte; dann ist ϑ wieder durch die Formel (38) gegeben. Dieselbe Formel gilt auch angenähert, wenn der Draht lange Zeit um einen constanten Winkel c tordirt war, und im letzten Momente dieser Drehung das Drehungsmoment D' auf denselben wirkte.

Die Torsion c darf aber nicht unendlich lange Zeit gedauert haben, weil sonst nach den Formeln dieses Abschnittes keine Rückkehr in die alte Position stattfände.

5. Der sub 2 betrachtete Fall aber geht, wenn man nach der Verschiebungsnachwirkung fragt, in folgenden über: der anfangs untordirte Draht wurde während der Zeit τ um einen constanten Winkel γ tordirt erhalten, und dann wieder sich selbst überlassen. In Folge der elastischen Nachwirkung wird er später noch eine kleine Torsion zeigen, und zwar sey dieselbe nach Verlauf der Zeit t gleich ϑ. (Die Zeit t werde von demjenigen Zeitpunkte an gezählt, der in der Mitte zwischen Anfang und Ende der Torsion γ liegt.) Dann hat man

Digitized by Google

$$\vartheta = \frac{b\gamma\tau}{at} \qquad (39).$$

Wenn eine dauernde Deformation eintritt, superponirt sich dieselbe wahrscheinlich mit der Nachwirkung; dann ist also ϑ aus der Formel

$$\vartheta = \frac{b\gamma\tau}{at} + c\,^{1}) \qquad (40)$$

zu berechnen, wobei c eine neue zu bestimmende Constante ist, die kein t, wohl aber γ und τ enthält.

Aus den sub 1, 3 oder 4 angeführten Beobachtungen können beide Constanten a und b bestimmt werden. ϱ ist ganz willkürlich und kann gleich einer Secunde gesetzt werden.

Aus den sub 2 oder 5 angeführten kann nur, aus den ersteren b, aus den letzteren $\frac{b}{a}$ bestimmt werden. Um a und b einzeln zu bestimmen, mufs noch die durch ein bestimmtes Drehungsmoment hervorgerufene Torsion und daraus nach Formel (35) der Torsionsmodul a gerechnet werden.

6. Wir wollen endlich noch das Schwingungsproblem der Betrachtung unterziehen, d. h. wir nehmen an, zur Zeit Null sey das am Drahte hängende Gewicht irgendwie in Bewegung versetzt worden; Draht und Gewicht schwinge nun, ohne dafs andere als die elastischen Kräfte darauf einwirken; dann ist $D = 0$, für negative t ist $\vartheta(t) = 0$, für positive dagegen ist jedenfalls nahezu:

$$\omega(t) = Ce^{-\varepsilon t} \sin \frac{2\pi t}{\tau}.$$

Behufs Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichung (29) zur Bestimmung der Constanten ε und τ finden wir zunächst:

1) Ist τ nicht klein, so tritt an die Stelle dieser Formel folgende:

$$\vartheta = \frac{b\gamma}{a} \log nat \left(\frac{t + \frac{\tau}{2}}{t - \frac{\tau}{2}} \right) + c.$$

Digitized by Google

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\left(\frac{4\pi^2}{\tau^2} - \varepsilon^2\right) Ce^{-\varepsilon t} \sin\frac{2\pi t}{\tau} - \frac{4\pi\varepsilon}{\tau} Ce^{-\varepsilon t} \cos\frac{2\pi t}{\tau},$$

ferner

$$\int_0^\infty [\vartheta(t) - \vartheta(t-\omega)] f(\omega) \frac{d\omega}{\omega}$$

$$= Ce^{-\varepsilon t} \sin\frac{2\pi\varepsilon}{\tau}\left[\int_0^\infty f(\omega)\frac{d\omega}{\omega} - \int_0^t e^{\varepsilon\omega} \cos\frac{2\pi\omega}{\tau} f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}\right]$$

$$+ Ce^{-\varepsilon t} \cos\frac{2\pi t}{\tau} \int_0^t e^{\varepsilon\omega} \sin\frac{2\pi\omega}{\tau} f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}.$$

Substituirt man diese Werthe in Gleichung (29) und setzt die mit $\sin\frac{2\pi t}{\tau}$ multiplicirten Glieder, sowie auch die mit $\cos\frac{2\pi t}{\tau}$ multiplicirten separat einander gleich, so erhält man:

$$K\left(\frac{4\pi^2}{\tau^2} - \varepsilon^2\right) = \frac{\pi R^4}{2l}\left[\int_0^\infty f(\omega)\frac{d\omega}{\omega} - \int_0^t e^{\varepsilon\omega} \cos\frac{2\pi\omega}{\tau} f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}\right] \quad (41),$$

$$K\frac{4\pi\varepsilon}{\tau} = \frac{\pi R^4}{2l}\int_0^t e^{\varepsilon\omega} \sin\frac{2\pi\omega}{\tau} f(\omega)\frac{d\omega}{\omega} \quad (42).$$

Diese Gleichungen zeigen, dafs ε und τ nicht exact constant sind; doch sind sie es nahezu, wie aus folgenden Betrachtungen ersichtlich ist. Auf den Werth des Integrals der Formel (42) haben diejenigen Werthe des ω, welche zwischen Null und mäfsigen ganzen Vielfachen von τ liegen, weitaus den gröfsten Einfluſs. Für diese Werthe des ω kann aber, weil ε klein ist, $e^{\varepsilon\omega} = 1$, $\frac{\pi R^4}{2l} f(\omega) = b$ gesetzt werden; es ist also nahezu:

$$\frac{\pi R^4}{2l}\int_0^t e^{\varepsilon\omega} \sin\frac{2\pi\omega}{\tau} f(\omega)\frac{d\omega}{\omega} = b\int_0^\infty \sin\frac{2\pi\omega}{\tau}\cdot\frac{d\omega}{\omega} = \frac{b\pi}{2}.$$

Das Integrale $\int f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}$ hat wegen der anfangs aufserordentlich langsamen Abnahme von $f(\omega)$, wenn man es

Digitized by Google

von einem endlichen Werthe bis ∞ erstreckt, einen sehr grofsen Werth; von 0 bis zu einer endlichen Gränze erstreckt, würde es unendlich. Dies Unendlichwerden ist aber in Formel (42) durch Subtraction des zweiten Integrals compensirt.

Das gesammte Aggregat

$$\int_0^\infty f(\omega)\frac{d\omega}{\omega} - \int_0^t e^{\varepsilon\omega}\cos\frac{2\pi\omega}{\tau} f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}$$

ist also jedenfalls gleich $\int_\varrho^\infty f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}$, wobei ϱ eine endliche Gröfse ist, die nicht weit verschieden von der kleinsten positiven Wurzel der Gleichung

$$\int_\varrho^\infty \cos\frac{2\pi\omega}{\tau}\,\frac{d\omega}{\omega} = 0,$$

also wohl auch nicht weit verschieden von $\frac{\tau}{4}$ ist. Wir werden sogleich sehen, dafs der Werth des Integrals $\int_\varrho^\infty f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}$ sich nur äufserst wenig verändert, selbst wenn die untere Gränze ϱ bedeutende Aenderungen erfährt; wir können also ohne merklichen Fehler ϱ mit der in Formel (31) so bezeichneten Gröfse identificiren, wodurch wir erhalten:

$$\frac{\pi R^3}{2l}\int_\varrho^\infty f(\omega)\frac{d\omega}{\omega} = a.$$

Die Bestimmungsgleichungen (41) und (42) für die Schwingungsdauer τ und den Extinctionscoëfficienten ε liefern also jetzt folgende sehr einfache Werthe:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{K}{a}} = \sqrt{\frac{8\pi l K}{R^4 A}} \qquad (43)$$

$$\varepsilon = \frac{b\tau}{8K} = \frac{\pi b}{4\sqrt{aK}} = \sqrt{\frac{\pi^3 R^4 B^2}{32 l K A}} \qquad (44).$$

Digitized by Google

Da wir bereits a als Torsionsmodul kennen gelernt haben, so war der Ausdruck für τ zu erwarten. Das logarithmische Decrement aber ist

$$L = \varepsilon\tau = \frac{\pi^2 b}{2a} = \frac{\pi^2}{2}\frac{B}{A} \qquad (45),$$

wobei A und B blos von dem Materiale des Drahtes abhängige Constanten sind. Das logarithmische Decrement ist also aufser dem Materiale des Drahtes (natürlich auch dessen Zustand, wie Härtung, Temperatur) von nichts anderem abhängig, welches Gesetz zuerst Streintz auf experimentellem Wege auffand.

Wir können jetzt zeigen, in wie weit das Integrale $\int_{\varrho}^{\infty} f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}$ von ϱ abhängt. Wir haben nämlich:

$$\frac{\pi^2}{2L} = \frac{A}{B} = \frac{1}{B}\int_{\varrho}^{\infty} f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}.$$

Bei den Versuchen Warburg's und sämmtlicher von Streintz bei gewöhnlicher Temperatur angestellten war $L < 0{,}01$, daher

$$\int_{\varrho}^{\infty} f(\omega)\frac{d\omega}{\omega} > 500\,B.$$

Setzt man statt ϱ einen anderen Werth ϱ', so erhält man

$$\int_{\varrho'}^{\infty} f(\omega)\frac{d\omega}{\omega} = \int_{\varrho}^{\infty} f(\omega)\frac{d\omega}{\omega} + \int_{\varrho}^{\varrho'} f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}.$$

Hier ist das erste Glied der rechten Seite $> 500B$, das zweite aber jedenfalls kleiner als $B \log nat. \left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)$, weil $f(\omega)$ für mäfsige ω nahe gleich B, sonst aber kleiner als B ist.

Vergleichen wir also z. B. die beiden Werthe des Integrals $\int_{\varrho}^{\infty} f(w)\frac{d\omega}{\omega}$, wo die untere Gränze einmal eine

Digitized by Google

Secunde, das anderemal ein Tag ist, so ist ϱ gleich ein Tag, ϱ' gleich eine Secunde zu setzen, dann wird log $nat\left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right) = 11{,}4$.

Selbst bei dieser enormen Verschiedenheit der unteren Gränzen ändert sich daher das bestimmte Integrale nicht einmal um 3 Proc. seines Betrages, was, da wir nur Annäherungsformeln geben, zu vernachlässigen seyn dürfte.

Wir können nun aus Beobachtungen, auf welche die Formeln (34) bis (39) anwendbar sind, und welche ich Versuche mit statischer elastischer Nachwirkung nennen will, weil dabei Geschwindigkeiten und Beschleunigungen vernachlässigt werden können, die beiden Constanten a und b oder A und B berechnen und mittelst derselben Schwingungsdauer und Decrement ausrechnen und mit den Beobachtungen vergleichen. Wir können aber auch umgekehrt aus Schwingungsbeobachtungen a und b oder A und B ausrechnen, und dann daraus die statische elastische Nachwirkung in den verschiedenen Fällen berechnen und mit den Beobachtungen vergleichen. Ich bemerke, dafs es sich dabei empfiehlt, in jenen Formeln, in denen ϱ vorkommt, ϱ nicht viel verschieden von $\frac{\tau}{4}$, also von dem vierten Theile der bei den Schwingungsbeobachtungen angewendeten ganzen Schwingungsdauer zu wählen, ohne dafs aber selbst enorm verschiedene Werthe des ϱ ein bemerkbar anderes Resultat liefern würden.

Sehr einfach wird die Formel (40), welche dann die Relation zwischen dem logarithmischen Decrement L und der auf eine kurze Torsion folgenden statischen, elastischen Nachwirkung giebt. Sey ein Draht während einer kurzen Zeit τ um einen constanten Winkel γ tordirt gewesen und werde dann sich selbst überlassen. Dann ist die Torsion ϑ, welche nach einer gewissen Zeit t in Folge der elastischen Nachwirkung noch übrig ist, durch die Formel

Digitized by Google

$$\vartheta = \frac{2\tau\gamma L}{\pi^2 t} + c \qquad (46)$$

oder wenn τ nicht sehr klein ist:

$$\vartheta = \frac{2L\gamma}{\pi^2} \log nat \left(\frac{t + \frac{\tau}{2}}{t - \frac{\tau}{2}} \right) + c$$

gegeben. Diese Relation, welche experimentell noch nicht geprüft worden ist, würde den einfachsten Prüfstein für die Brauchbarkeit meiner Formeln liefern, wobei es natürlich wünschenswerth ist, dafs die Zeit t, nach welcher die statische elastische Nachwirkung beobachtet wird, von derselben Gröfsenordnung, wie die Schwingungsdauer ist. Ich bemerke noch, dafs die Formeln alle nur Annäherungsformeln sind. Eine weiter getriebene Annäherung, wodurch jedoch gröfsere Weitläufigkeit erzeugt würde, wäre leicht erzielbar; ich halte sie jedoch vorläufig für vollkommen überflüssig.

Sollten sich diese Formeln in ihren allgemeinen Umrissen bestätigen, so wäre es auch interessant, die Gränzen festzustellen, wo ihre Giltigkeit aufhört, da es nur Annäherungsformeln sind; vielleicht könnte daraus auch eine nähere Bestimmung der bisher ganz unbestimmt gelassenen Function $f(\omega)$ gewonnen werden, was aber nur aus Beobachtungen, die ein sehr grofses Zeitintervall umfassen, möglich wäre.

Nachtrag.

(Ueberreicht in der Sitzung am 22. October.)

Experimentelles.

Es unterliegt keinem Zweifel, dafs eine eingehende experimentelle Prüfung der elastischen Nachwirkung einen Aufwand von freier Zeit erfordern würde, welcher mir

Digitized by Google

jetzt keineswegs zur Verfügung steht. Die wenigen Versuche, welche ich hierüber anstellte, und deren Beschreibung ich hier folgen lasse, hatten also nur den Zweck, die Brauchbarkeit meiner Formeln, namentlich des Superpositionsprincips, wenigstens in einigen Fällen nachzuweisen. Sie wurden an einem etwa 5′ langen ausgezogenen Glasfaden angestellt, dessen oberes Ende festgemacht, an dessen unteres aber mit Klebwachs der zur Spiegelablesung dienende Spiegel angeklebt war. Die Scala war in Millimeter getheilt, der Spiegel hatte die Distanz 1380 Mm. vom Fernrohre. Die Elasticitätsgränze des Glasfadens wurde vor Beginn der Versuche durch öfteres Hin- und Herdrehen des unteren Endes um etwa 540° erweitert und längere Zeit darauf das Fernrohr so gestellt, dafs sein Fadenkreuz genau auf den Nullpunkt der Scala einspielte. Jede der hierauf angestellten Versuchreihen bestand aus folgenden Operationen. Das untere Ende des Glasfadens wurde zuerst um 360° gedreht, was ich den Proceſs des Aufwindens nenne; er dauerte etwa 3 Secunden. Dafs die Drehung genau 360° betrug, wurde dadurch constatirt, dafs bei unverändertem Stande des Auges des Beobachters das Bild irgend eines Gegenstandes im Spiegel wieder an den Ort gelangt war, den es vor dem Drehen gehabt hatte. Dann wurde das untere Ende einige Zeit constant gedreht erhalten, und schliefslich liefs man es wieder mit mäfsiger Geschwindigkeit in die alte Lage zurückkehren, jedoch so, dafs möglichst geringe Schwingungen entstanden (Proceſs des Abwindens, wieder etwa 3 Sec.). Nun wurde nach Verlauf verschiedener Zeiten τ der Scalentheil ϑ beobachtet, welcher mit dem Fadenkreuze coïncidirte. Nach Verlauf einer langen Zeit coïncidirte immer der Theilstrich Null; dauernde Deformation war also nicht zu bemerken. Mit τ bezeichne ich die Zeit, welche von der Mitte des Vorganges des Aufwindens bis zur Mitte des Vorganges des Abwindens verstrich. Die Zeit t zähle ich von der Mitte der Zeit τ an. Die Zeiten sind durchweg in Minuten gemessen.

Digitized by Google

Jeder Beobachtung ist der Werth $\frac{\vartheta t}{\tau}$ beigefügt, der nach Formel (39) constant für alle Beobachtungen seyn soll, und es auch in der That mit genügender Annäherung ist.

	$\tau = \frac{1}{4}'$		$\tau = \frac{1}{2}'$		$\tau = 1'$		$\tau = 2'$	
t	ϑ	$\frac{\vartheta t}{\tau}$	ϑ	$\frac{\vartheta t}{\tau}$	ϑ	$\frac{\vartheta t}{\tau}$	ϑ	$\frac{\vartheta t}{\tau}$
2′	5,5	44	11	44	21	42	43	43
3′	3,6	43,2	7,5	45	14	42	28	42
4′	2,8	44,8	5,7	45,6	10,3	41,2	21	42
6′	1,8	43,2	3,9	46,8	7	42	14,2	42,6
8′	1,4	44,8	2,8	44,8	5,3	42,4	10,9	43,6
12′	0,9	43,2	1,9	45,6	3,6	43,2	7,5	45,0
16′	0,7	44,8	1,4	44,8	2,6	41,6	6	48
24′					1,8	43,2	3,7	44,4
32′					1,3	41,6	2,8	44,8

Das Mittel der verschiedenen Werthe von $\frac{\vartheta t}{\tau}$ ist etwa 44.

Um ein Urtheil über die Anwendbarkeit der Formel (39) zu geben, habe ich in derselben $\frac{b\gamma}{a} = 44$ gesetzt, und die daraus berechneten Werthe des s mit den beobachteten in folgender Tabelle zusammengestellt:

	$\tau = \frac{1}{4}'$		$\tau = \frac{1}{2}'$		$\tau = 1'$		$\tau = 2'$	
t	ϑ beob.	berechn.	beob.	berechn.	beob.	berechn.	beob.	berechn.
2′	5,5	5,5	11	11	21	22	43	44
3′	3,6	3,7	7,5	7,3	14	14,7	28	29,3
4′	2,8	2,8	5,7	5,5	10,3	11	21	22
6′	1,8	1,9	3,9	3,7	7	7,3	14,2	14,7
8′	1,4	1,4	2,8	2,8	5,3	5,5	10,9	11
12′	0,9	1,9	1,9	1,9	3,6	3,7	7,5	7,3
16′	0,7	0,7	1,4	1,4	2,6	2,8	6	5,5
24′					1,8	1,8	3,7	3,7
32′					1,3	1,4	2,8	2,8

Die Gröfse $\frac{\vartheta t}{\tau} = 44$ Scalentheilen ist nach Formel (39) gleich $\frac{b\gamma}{a}$, γ, die Verdrehung des untersten Fadenendes

Digitized by Google

während der Zeit τ, war bei meinen Versuchen 2π. 44 Scalentheile entsprechen einer Verdrehung um den Winkel $\frac{44}{2\times 1380}$ in Bogenmafs, und weil diese Gröfse gleich $\frac{\gamma b}{a}$ $= \frac{2\pi b}{a}$ seyn mufs, so folgt $\frac{b}{a} = \frac{44}{4\pi\times 1380}$.

Das nach Formel (45) berechnete logarithmische Decrement würde also den Werth $\frac{44\pi}{8\times 1380} = 0{,}0013$ annehmen. Um auch diese Formel mit der Erfahrung zu vergleichen, liefs ich den Glasfaden Torsionsschwingungen ausführen, wobei jedoch, um die Schwingungen zu verlangsamen, unten ein Gewicht von bedeutendem Trägheitsmomente angehängt werden mufste, auf welches aber aufser der Torsion des Fadens keine andere Kraft wirkte. Bei den früheren Versuchen hing unten nur der Spiegel und ein Rest der Glasröhre, aus der der Faden ausgezogen worden war. Die doppelten Amplitüden der Torsionsschwingungen waren: 336, 308, 275, 250, 230, 209, 193, 176, 160,3, 145, wobei zwischen je zwei Amplitüden immer 10 Halbschwingungen lagen. Das logarithmische Decrement hieraus berechnet, ergiebt sich gleich: 0,00207, 0,00184, 0,00180, 0,00167, 0,00181, 0,00159, 0,00184, 0,00187, 0,00200. Die Uebereinstimmung ist nur gering, da die Beobachtungen nur in roher Weise ausgeführt wurden, namentlich war der Apparat nicht genügend vor Luftströmungen geschützt. Eine andere als beiläufige Uebereinstimmung konnte ja ohnedies nicht erwartet werden, da der Luftwiderstand nicht eliminirt wurde. Doch stimmt der Werth wenigstens ungefähr mit dem theoretisch berechneten Werthe des logarithmischen Decrements. Um zu constatiren, dafs das angehängte Gewicht die Elasticitätsverhältnisse des Fadens nicht wesentlich verändert hatte, machte ich noch eine Reihe von Nachwirkungsversuchen, wobei das Gewicht angehängt und $\tau = 1'$ war. Sie sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Digitized by Google

t	ϑ beob.	ϑ ber.	$\frac{\vartheta t}{\tau}$
2′	22,3	22	44,6
3′	13,8	14,7	41,4
4′	10,5	11	42,5
6′	7,4	7,3	44,4
8′	5,6	5,5	44,8
12′	3,9	3,6	46,8

Es scheint demnach, dafs bei Substanzen, bei denen keine dauernde Deformation auftritt, meine Formeln jedenfalls einige Annäherung an die wirklichen Vorgänge bieten. Das Verhalten anderer Substanzen müfste erst näher untersucht werden.

Ich lasse hier noch einige allgemeine Formeln nachfolgen.

Bei der früher für das logarithmische Decrement aufgestellten Formel setzte ich voraus, dafs auf das Gewicht, mit dem der Draht belastet ist, keine Kraft aufser der Torsion wirkt.

Wenn auf dieses Gewicht aufserdem noch eine dem Torsionswinkel proportionale Kraft $H\vartheta$ wirkt, so geht die Bewegungsgleichung über in

$$-K\vartheta' = H\vartheta + \int_0^\infty [\vartheta(t) - \vartheta(t-\omega)] \frac{\varphi(\omega)\, d\omega}{\omega},$$

woraus, wenn

$$\vartheta = Ae^{\varepsilon t} \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

gesetzt wird, folgt:

$$\frac{4\pi^2 K}{\tau^2} = a + H, \quad \varepsilon = \frac{b\tau}{8K}.$$

a und b sind dieselben Constanten wie früher. Wenn man also, wie es Warburg (Berl. Monatsber. 8. Juli 1869) that, das Trägheitsmoment K constant läfst, und die Schwingungsdauer durch Veränderung der Kraft H abändert, so ist nach meinen Formeln der Extinctionscoëffi-

Digitized by Google

cient ε der Schwingungsdauer proportional, was wenigstens qualitativ mit Warburg's Versuchen stimmt.

Ich bemerke endlich noch, dafs die von mir für einen festen Körper mit elastischer Nachwirkung aufgestellten Gleichungen in die für eine Flüssigkeit mit Reibung geltenden übergehen, wenn wir nur annehmen, dafs bei der Flüssigkeit die Functionen $\varphi(\omega)$ und $\psi(\omega)$ für sehr kleine ω grofs, für alle übrigen ω aber verschwindend klein sind. Dann reducirt sich nämlich

$$\int_0^\infty [u(t) - u(t-\omega)] \frac{\varphi(\omega)\, d\omega}{\omega}$$

auf

$$c \frac{\partial u(t)}{\partial t},$$

wobei c eine Constante ist, und die Formeln (27) gehen über in

$$N_1 = \gamma\theta + c\frac{\partial\theta}{\partial t} + 2c'\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}, \quad T_1 = c'\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial t}\right)\ldots,$$

was mit den Gleichungen für eine mit Reibung begabte Flüssigkeit stimmt, wenn man bedenkt, dafs

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial w}{\partial t}$$

die Geschwindigkeitscomponenten der Theilchen sind. Es wäre interessant, zu erforschen, ob nicht auch das Verhalten weicher oder zähflüssiger Körper durch die Gleichung (27) gegeben ist, wobei dann das Verhalten der Functionen φ und ψ in der Mitte stehen müfste, zwischen dem die elastische Nachwirkung und dem die innere Reibung charakterisirenden. Dasselbe könnte natürlich nur experimentell bestimmt werden. Es wäre auch nicht uninteressant, durch combinirte Torsions- und Drehungsversuche das Verhältnifs der Functionen φ und ψ zu bestimmen. Es ist nicht unwahrscheinlich, dafs φ und c gleich Null sind, dafs also für kubische Compression keine Nachwirkung stattfindet.

Digitized by Google

V. *Neues Heber-Barometer; von H. Wild.*

(Aus d. *Bull. de l'acad. de St. Pétersbourg;* vom Hrn. Verf. übersandt.)

In meiner Abhandlung „Ueber die Bestimmung des Luftdrucks“ [1]) habe ich auf S. 77 unter dem Titel: „Neues Heber-Barometer“ kurz ein Instrument beschrieben, welches ich gewissermaafsen als Resultat meiner bezüglichen Studien zu Anfang des Jahres 1873 von der Werkstätte für physikalische Instrumente in Genf, die unter der Direction des Hrn. Turrettini steht, habe anfertigen lassen. Es ist dort ebenfalls bereits erwähnt, dafs das neue Instrument eigentlich nur eine Verbesserung von älteren Heber-Barometern repräsentirt, welche Hr. Kupffer seiner Zeit von Girgensohn und Krause für meteorologische Observatorien und Stationen in Rufsland hat construiren lassen und die, wie es scheint, nicht allgemein bekannt geworden sind.

Seither sind über 40 dieser neuen Instrumente an meteorologische Stationen in Rufsland vertheilt worden; andere haben mit dem besten Erfolge auf weiten und beschwerlichen Reisen im Innern gedient, so dafs ich es nunmehr für gerechtfertigt halte, eine genauere Beschreibung des Instrumentes zu geben.

Dasselbe ist sammt einigen Zuthaten in Fig. 12 auf Taf. VI mit Weglassung seines mittlern Theils in $\frac{1}{4}$ natürlicher Gröfse in der Vorderansicht und im Durchschnitt dargestellt.

Die beiden Glasröhren *a* und *b* sind vermittelst Ringe von Leder (auch schwefelfreiem Kautschuk), die durch ringförmige Eisenmuttern ein- und angepreſst werden, in Durchbohrungen des Eisengefäfses *c* quecksilberdicht eingesetzt und zwar endigt die kurze Röhre *b* unmittelbar an der innern Wandung des Gefäfses, während die längere

1) Repertorium für Meteorologie, Bd. III, No. 1, Mai 1873.

Digitized by Google

a im Innern sehr nahe bis zu einer eisernen Scheidewand *d* im Gefäfse heruntergeht, welche Scheidewand nur vertical unter dem Rohre *b* eine kleine Oeffnung besitzt. Sie scheidet gewissermaafsen den obern festen Theil des Gefäfses von dem untern, der einen Ledersack ähnlich demjenigen des Fortin'schen Gefäfs-Barometers repräsentirt. Das Leder ist an einem Eisenringe *e* befestigt, welcher durch einen zweiten Ring und eine Schraubenmutter *f* quecksilberdicht an die Scheidewand *d* angepreſst wird.

Aufsen auf das Gefäfs *c* schraubt sich dann ebenfalls ganz ähnlich wie beim Fortin'schen Barometer der Eisendeckel *g* mit der Schraube *h* zum Heben des Ledersackes auf. Die kurze Röhre *b* ist an ihrem obern Ende ebenfalls vermittelst umgepreſster Leder- oder Kautschukringe quecksilberdicht durch eine Eisenfassung mit Stahlhahn *i* verschlossen. Die Durchbohrung des Hahnes geht zuerst vertical aufwärts und dann in seiner Axe nach hinten; vorn besitzt er ein Viereck, auf welches sich ein kleiner Schlüssel zum Drehen des Hahns aufschieben läfst, und ein Stift mit Anschlägen rechts und links regulirt wie bei einem Gashahn die Bewegungsgränzen des Hahnes.

Auf die Fassungen der beiden Röhren am Eisengefäfse *c* schrauben sich nun aufsen die Messingröhren *k* und *l* auf, die dann oben durch einen Bügel *m* mit der Aufhängevorrichtung *n* verbunden sind. Beide Röhren sind am untern Ende auf eine Länge von nahe 100^{mm} verstärkt und aufsen parallel zu ihrer Längsaxe genau cylindrisch abgedreht. Die Röhre *k*, welche die längere, oben geschlossene und durch ein Korkstück *o* gehaltene Glasröhre umschliefst, trägt eine Millimeter-Theilung, die auf der obern Hälfte bis zum Rande eines Längsschlitzes herangeht, so dafs der in diesem Schlitze verschiebbare Nonius zur Ablesung der $\frac{1}{10}$ Millimeter unmittelbar die Theilung berührt. Dieser Nonius sitzt an einem die Glasröhre umschliefsenden Ring, mit dessen unterm Rande seine Null-Linie zusammenfällt, und wird vermittelst einer die Glasröhre nach unten zu umschliefsenden innern Messingröhre

Digitized by Google

mit seitlicher Zahnstange durch Drehen des Getriebes *p* verschoben. Um den andern Rand des Ringes oder Nonius auf die Quecksilberkuppe einstellen zu können, ist zur Beleuchtung von hinten auch die Rückseite der Röhre mit einem entsprechenden Längsschlitz versehen. Die zweite Röhre *l* ist an ihrem untern Ende ebenfalls mit solchen diametral gegenüberstehenden Längsschlitzen versehen, besitzt aber keine Theilung; es wird vielmehr der Nullpunkt der Theilung auf der Röhre *k* oder irgend ein anderer Theilstrich dadurch auf die zweite Röhre für die Einstellung der zweiten Quecksilberoberfläche in dieser übertragen, dafs ein ∞-förmiger Doppelring (*q*), der beide Röhren umfafst und dessen unterer Rand senkrecht zu seiner Axe abgedreht ist, mit dem letztern auf den bezüglichen Theilstrich der Röhre *k* eingestellt und dann geklemmt wird. Zur bessern Einstellung auf den Theilstrich besitzt der Ring in der Gegend der Theilung einen kleinen Ausschnitt (siehe die Vorderansicht). Die zweite Röhre hat ferner oberhalb der Schlitze zwei kreisförmige Oeffnungen, von welchen die vordere zum Aufstecken des Schlüssels auf den Hahn, die hintere zum Austritt des Quecksilbers aus der Durchbohrung desselben dient. In den obern Theil der Röhre *l* ist endlich das in einer besondern Messingröhre oben und unten durch Korke befestigte Thermometer eingeschoben, dessen Gefäfs *r* denselben Durchmesser wie das Barometerrohr hat und das auf der Röhre einfach in ganze Grade getheilt ist. Diametral gegenüberstehende Schlitze in den Messingröhren gestatten, das von hinten beleuchtete Thermometer leicht und sicher abzulesen.

Zur Aufhängung sind dem Instrument ein oberer Halter *t*, in dessen aufgeschnittenen Ring mit konischer Vertiefung sich der Knopf *s* der Aufhängevorrichtung *n* des Instruments einlegt, und ein unterer Ring *u* mit Stellschrauben beigegeben, welche gegen das Gefäfs *c* seitlich angeschraubt werden und so die genaue Vertikalstellung des Instruments gestatten. Hiebei kann der vermittelst

Digitized by Google

einer Oese an einem Faden aufzuhängende Schlüssel *v* zum Stahlhahn als Senkel benutzt werden. Von den Schlüsseln *w* und *x* endlich dient der erstere zum Anziehen der Klemmmuttern für die Röhrenfassungen und der letztere zum Anziehen der Mutter, welche den Ledersack anpreſst. Der Ring an der Aufhängevorrichtung *n* bezweckt, das Instrument auch unter Umständen an einem gewöhnlichen Nagel aufhängen zu können.

Die Füllung und Zusammensetzung des Barometers ist eine sehr einfache. Nach Reinigung aller Theile des zerlegten Instrumentes wird zunächst auf das eine Ende der kurzen Glasröhre der Stahlhahn aufgepreſst, derselbe geschlossen und das andere Ende der Röhre in der betreffenden Oeffnung des Eisengefäſses befestigt. Darauf wird die — entweder durch Auskochen oder nach der von mir angegebenen Methode mit Hülfe der Luftpumpe oder endlich vermittelst des vortrefflichen Weinholdschen Apparates mit Quecksilber gefüllte — Barometerröhre mit der Oeffnung nach oben ebenfalls in das mit seiner Oeffnung nach oben gekehrte Eisengefäſs dicht eingesetzt und jetzt das ganze Gefäſs (sammt der kurzen Röhre) bis nahe zum Rande mit Quecksilber gefüllt. Man legt dann die Scheidewand *d* und den nach innen gestülpten Ledersack ein, — erstere so, daſs ihre Oeffnung über die kurze Röhre zu stehen kommt — preſst letztern vermittelst der Mutter *f* stark an und schraubt den Deckel *g* auf, wobei man zugleich die Schraube *h* so weit als möglich hebt. Kehrt man jetzt das Instrument um und bringt es in eine wenig von der vertikalen abweichende Lage, wobei man die Seite der kurzen Röhre stets nach oben wendet, so tritt die allenfalls im Sack noch zurückgebliebene Luft durch die Oeffnung in der Scheidewand nach oben und entweicht in die kurze Röhre. Durch Oeffnen des Hahnes und Nachschrauben der Schraube *h* wird sie leicht vollständig entfernt, was daran zu erkennen ist, daſs ein Quecksilbertropfen an der Oeffnung des

Digitized by Google

Hahnes erscheint[1]). Nunmehr werden bei wieder geschlossenem Hahn die beiden Messingröhren aufgeschraubt, der Doppelring *q* aufgeschoben, das Thermometer eingesetzt und beide Röhren durch den Bügel *m* am obern Ende verbunden. So gefüllt kann das Instrument ohne jede Gefahr transportirt werden, wenn es nur dabei vor plötzlichen, sehr heftigen Stöfsen bewahrt wird.

Beim Gebrauch dreht man, nach vertikaler Aufhängung des Instruments, zuerst die Schraube *h* etwas rückwärts, öffnet dann den Hahn und setzt darauf die Rückwärtsbewegung der erstern fort, bis das Quecksilberniveau im kürzeren Schenkel am untern Ende des Schlitzes in der Messingröhre angelangt ist. Zur Messung des Barometerstandes in gewöhnlicher Weise wird der Doppelring *q* mit seinem untern Rand auf den Theilstrich 0 gestellt, durch Drehen der Schraube *h* das Quecksilber in beiden Schenkeln langsam gehoben, bis die Kuppe im kürzern Schenkel den untern Ringrand zu berühren scheint und darauf vermittelst des Getriebes der Ring des Noniusschiebers im langen Rohr gesenkt, bis sein unterer Rand dort in gleicher Weise die Quecksilberkuppe zu berühren scheint. Die Ablesung des Nonius giebt unmittelbar den Barometerstand, der dann vermittelst des vorher beobachteten und corrigirten Thermometerstandes in üblicher Weise auf 0° reducirt wird.

Wenn das Instrument sorgfältig ausgeführt ist, d. h. die Ränder der Visirringe genau senkrecht zu ihren resp. Axen abgedreht sind und die letzteren parallel zur Längsaxe der Messingröhren stehen, so ist an dem so gemesse-

1) Um für den Fall, dafs selbst bei der höchsten Stellung der Schraube *h* nicht genug Quecksilber vorhanden ist, die kurze Röhre ganz zu füllen und so alle Luft zu verdrängen, nicht den Sack wieder abschrauben zu müssen, ist an der hintern Wand des Eisengefäfses *c* (in der Zeichnung aber nicht sichtbar) eine mit einer Schraube verschliefsbare Oeffnung angebracht, durch welche man in horizontaler Lage des Instruments leicht noch die nöthige Menge Quecksilber nachfüllen kann.

Digitized by Google

nen Barometerstand nur noch die Correction wegen fehlerhafter Theilung und wegen allfällig in der Toricellischen Leere noch vorhandenen Luft anzubringen. Die letztere ist bei guter Füllung des Instrumentes gleich Null, kann aber, wenn im Laufe der Zeit Zweifel darüber entstehen sollten, jeweilen nach der Arago'schen Methode mit dem Instrumente selbst verificirt und bestimmt werden. Zu dem Ende läfst man blofs auf die Beobachtung des Barometerstandes in der oben beschriebenen gewöhnlichen Weise eine zweite folgen, wobei man z. B. den untern Ring statt auf 0 auf 40^{mm} einstellt. Fällt dann die Ablesung oben genau um 40^{mm} gröfser aus, so ist der Raum oberhalb des Quecksilbers als hinreichend luftleer zu betrachten; wird sie hingegen merklich kleiner, so ist die wegen Luft in der Toricelli'schen Leere am Barometerstand anzubringende Correction gegeben durch

$$z = \frac{a}{b-1},$$

wo a die Differenz der beiden erhaltenen Stände und b das Verhältnifs des Inhalts des Raumes oberhalb des Quecksilbers im geschlossenen Schenkel bei der ersten Beobachtung zu dem des verkleinerten Raumes bei der zweiten darstellen[1]). In unserem Falle entspricht dieses Verhältnifs genau genug dem Verhältnifs der Längen der

1) Die obige Formel setzt allerdings die Gültigkeit des Mariotte'schen Gesetzes auch für sehr niedrige Drucke voraus. Durch die bezügl. Untersuchungen von Siljeström (Svenska Vet. Acad. Handl., Bd. II, 1873, auch Pogg. Ann., Bd. 154) und die vorläufige Notiz der HH. Mendelejef und Kirpitschof (Bd. XIX, S. 469 dieses Bulletins 1874), sowie Kritik der erstern durch Mendelejef (Repert. für Experimentalphysik von Carl, Bd. X, S. 434), ist dieselbe allerdings in Zweifel gestellt worden; da indessen die Resultate dieser beiderlei Untersuchungen über denselben Gegenstand sich in Beziehung auf den Sinn der Abweichung vom Mariotte'schen Gesetz widersprechen, auch die letzteren zur Beurtheilung ihres Werthes nicht ausführlich genug dargelegt sind, so scheint es gerechtfertigt, vor der Hand noch, namentlich für Anwendungen wie die vorliegende, das Mariotte'sche Gesetz auch bei niedrigen Drucken als richtig anzunehmen.

Digitized by Google

leeren Rohrstücke. Ist z. B. wie bei den bis dahin construirten Instrumenten bei einem Barometerstand von 755^{mm} die Länge der Röhre oberhalb des Quecksilbers bei der gewöhnlichen niedrigen Stellung des letztern 80^{mm}, so wird die angenommene Hebung des Quecksilbers von 40^{mm} die Länge des leeren Röhrendes auf die Hälfte reduciren, somit $b = 2$ werden und folglich die Differenz a der beiden Stände unmittelbar die an dem in gewöhnlicher Weise beobachteten Barometerstand anzubringende Correction repräsentiren.

Die Theilungs-Correction kann gleich von Anfang an durch Vergleich der getheilten Röhre mit einem Normalmaafsstabe ein für alle Male bestimmt werden. Dieselbe ist für die Länge von 0 bis 780^{mm} in dieser Art durch Vergleichung mit dem Normalmeter des physikalischen Central-Observatoriums bei 3 Instrumenten direct bestimmt worden und wurde bei allen sehr nahe übereinstimmend gleich — 0,34 Millimeter gefunden. Da die Werkstätte in Genf im Besitz eines hinlänglich richtigen Meters und einer ausgezeichneten Theilmaschine ist, so beruht dieser Fehler einer gefälligen Mittheilung des Hrn. Turrettini zufolge blofs darauf, dafs in Folge eines sonderbaren Mifsverständnisses angenommen worden war, die Theilung solle ihre wahre Länge nicht bei 0°, sondern bei 17°,5 C. haben. Er wird also in Zukunft vermieden werden können.

Bei drei Instrumenten, die ich selbst nach dem Normalbarometer des Central-Observatoriums verificirt habe, fand ich nun in der That die Gesammt-Correction sehr nahe gleich der vorstehenden Theilungs-Correction. Ich stelle die Resultate dieser Vergleichungen nachstehend zusammen:

Digitized by Google

Turettini No. 0.

Datum	Absol. Corr. auf wahren Stand				Beobachter
	mm	mm			
1873 März	— 0,35	± 0,05	13	Vergl. von	Mägis.
April	— 0,37	± 0,06	8	- -	Wild.
Dec.	— 0,38	± 0,04	20	- -	-
1875 Jan.	— 0,37	± 0,05	10	- -	-

Turettini No. 1.

1874 Sept.	— 0,39	± 0,04	10	- -	Mägis.
1875 Jan.	— 0,38	± 0,04	10	- -	Wild.

Turettini No. 15.

1875 Aug.	— 0,34	± 0,08	10	- -	Mielberg.
-	— 0,35	± 0,04	5	- -	Wild.

Bei diesen drei Instrumenten scheinen also die Visirringe sehr nahe die richtige Stellung zu haben. Andere Instrumente der Art, welche ich indessen nicht selbst verglichen habe, haben dagegen bei der Verification im Observatorium oder auf Inspectionsreisen häufig von den vorstehenden sehr verschiedene Correctionen ergeben, was neben persönlichen Vergleichungsfehlern wohl hauptsächlich auf eine schiefe Stellung der Visirringe zurückzuführen seyn dürfte. Es wird also immerhin auch hier die Vergleichung des gefüllten Instruments mit einem Normalbarometer als Norm zur Ermittlung seiner Gesammt-Correction gelten können.

Die nahezu zwei Jahre umfassenden Beobachtungen am Instrumente No. 0 zeigen anderseits eine höchst befriedigende Constanz der einmal bestimmten Correction, was hauptsächlich dem Umstande zuzuschreiben ist, dafs das neue Heber-Barometer nur aus Metall und Glas zusammengesetzt ist und dafs die Absehvorrichtungen keinen Verbiegungen u. dergl. ausgesetzt sind.

Neben dieser Garantie gröfserer Unveränderlichkeit mit der Zeit gegenüber andern Instrumenten der Art bietet

Digitized by Google

das neue Heber-Barometer gegenüber allen Gefäfs-Barometern und also auch gegenüber dem sonst nahestehenden Fortin'schen Barometer den grofsen Vortheil dar, dafs die Ablesungsweise für beide Quecksilberniveaux eine genau gleichartige ist, also die persönlichen Differenzen ganz eliminirt werden.

Es ist ferner durch das Ansteigen des Quecksilbers in beiden Schenkeln des Barometers vor jeder Beobachtung, wie ich in der citirten Abhandlung S. 17 und folg. gezeigt habe, der störende Einfluſs der Capillarität, sowohl was ihren ganzen Betrag, als was ihre Variabilität betrifft, auf ein Minimum reducirt[1]).

Das Thermometer giebt, weil sein Gefäfs gleichen Durchmesser wie das Barometerrohr hat und in ganz gleicher Weise wie das letztere umhüllt ist, die Temperatur des Quecksilbers in diesem, auf welche es ja besonders ankommt, viel sicherer an, als bei den bisher üblichen Constructionen. Die Möglichkeit, die Anwesenheit von Luft in der Toricelli'schen Leere zu constatiren und ihren Einfluſs zu messen, dürfte für Reisen und entfernte, schwer zugängliche Stationen wohl ebenfalls sehr in's Gewicht fallen.

Das neue Instrument ist endlich erfahrungsgemäfs auf Reisen mindestens ebenso leicht und sicher gefüllt zu transportiren wie das Fortin'sche Gefäfs-Barometer, besitzt aber dabei gegenüber diesem den sehr erheblichen Vorzug, dafs das Quecksilber, weil es blofs mit Eisen,

1) Der bedeutende Vortheil, welchen das Heben des Quecksilbers in beiden Schenkeln des Heber-Barometers unmittelbar vor der Beobachtung gegenüber dem üblichen Klopfen hat, geht auch daraus hervor, dafs zufolge einjähriger gleichzeitiger Beobachtungen zu je 3 täglichen Terminen an dem obigen Instrument No. 0 und einem vorzüglichen Naudet'schen Aneroïd das erstere Instrument unerwarteter Weise dem Aneroïd in seinen Angaben vorauseilte und zwar durchschnittlich bei steigendem Barometer um $0^{mm},05$, bei fallendem um $0^{mm},06$. Diese gröfsere Empfindlichkeit des Quecksilberbarometers ist jedenfalls nur der Beseitigung variabler Capillaritätswirkungen zuzuschreiben.

Digitized by Google

Glas und Leder zur Berührung kommt, nicht schmutzt. Bei allen Fortin'schen Barometern nämlich, die ich bis jetzt auf Reisen benutzt habe, wurde das Quecksilber in der Cisterne bald so unrein, dafs sein Niveau nicht mehr sicher auf die Spitze einzustellen war und dafs deshalb entweder schon während der Reise oder wenigstens unmittelbar nach derselben behufs neuer Verification das Quecksilber in der Cisterne durch frisches ersetzt werden mufste. Hr. Mielberg hat das neue Heber-Barometer, Turrettini No. 15, auf seine zweimonatliche Inspectionsreise nach Archangelsk und Kem im Juni und Juli dieses Jahres mitgenommen. Dasselbe hat dabei nicht nur den streckenweise höchst beschwerlichen Transport ganz gut ausgehalten, sondern es erwies sich auch das Quecksilber und die Röhre nach seiner Rückkunft noch so rein, dafs ohne Weiteres eine neue Verification des Instrumentes erfolgen konnte. Gleiche Erfahrungen haben Hr. Dohrandt auf seiner ebenfalls mit bedeutenden Transportschwierigkeiten verbundenen Reise nach dem Amu-Darja im Frühjahre 1874, sowie Hr. Dr. Fritsche auf seiner 4monatlichen Rückreise von St. Petersburg nach Peking über Sibirien und durch die Mongolei im Sommer 1874 an zwei andern Instrumenten dieser Art gemacht.

Wenn man bei Benutzung des neuen Instruments auf einer festen Station die Vorsicht beobachtet, nach jeder Messung das Quecksilber im offenen Schenkel wieder bis zum untern Rande des Schlitzes zu senken und darauf den Hahn abzuschliefsen, so wird man finden, dafs das bei Heber-Barometern sonst so lästige Erblinden des Glases im offenen Schenkel und Verunreinigen des Quecksilbers daselbst durch Staub und Oxydation jedenfalls erst nach vielen Jahren eintritt.

Das neue Heber-Barometer besitzt nur zwei Nachtheile gegenüber dem Fortin'schen Gefäfs-Barometer, es ist schwerer und kommt im Preise höher zu stehen. Ich glaube indessen, dafs diese Nachtheile durch die erwähnten Vorzüge mehr als ausgeglichen werden.

A. W. Schade's Buchdruckerei (L. Schade) in Berlin, Stallschreiberstr. 47.

Digitized by Google

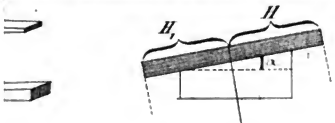


Fig. 5.

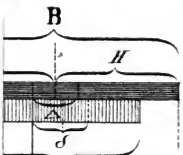


Fig. 8.

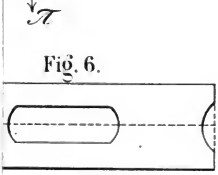
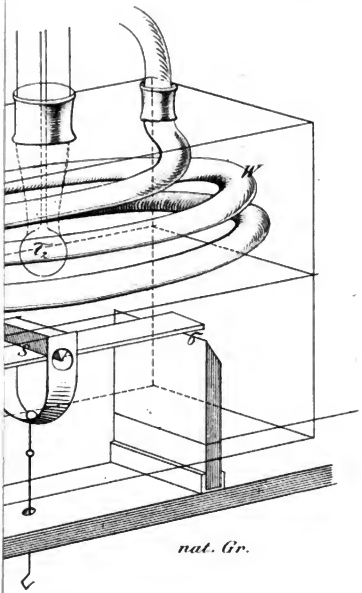


Fig. 6.



Digitized by Google

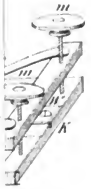


Fig. 19.

Fig. 22.

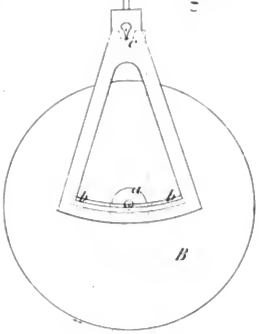


Fig. 30.

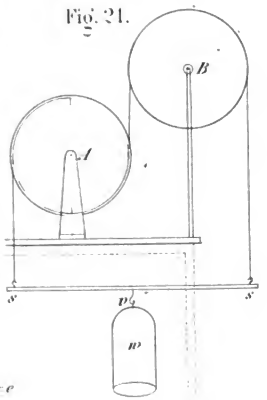


Fig. 21.

Fig. 20

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 9. Kadmium.

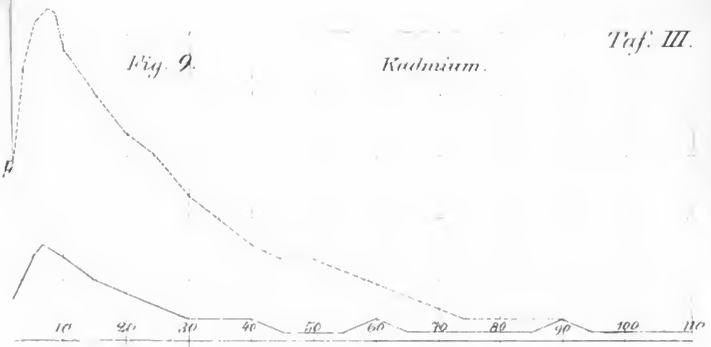
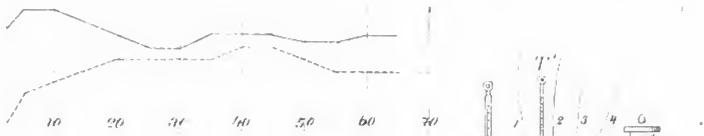


Fig. 10. Zinn.



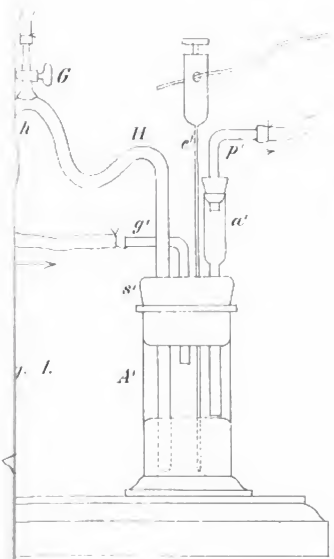


Fig. 1.

Fig. 4.

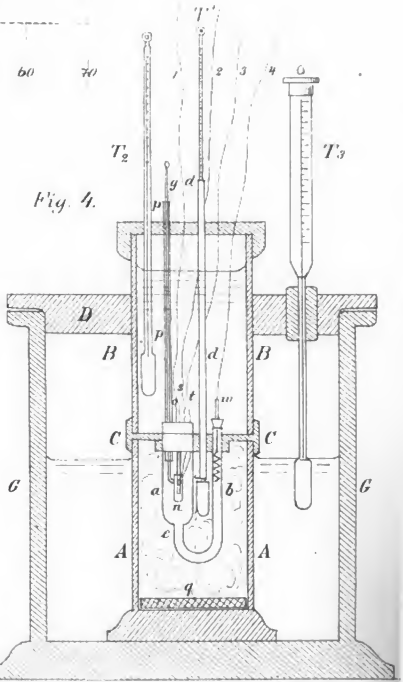


Fig. 5.

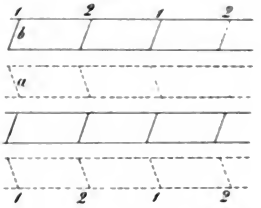
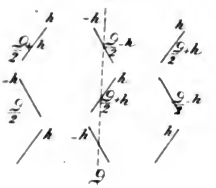


Fig. 10.


h
-h
h
-h
h
-h

Digitized by Google

Fig. 23.

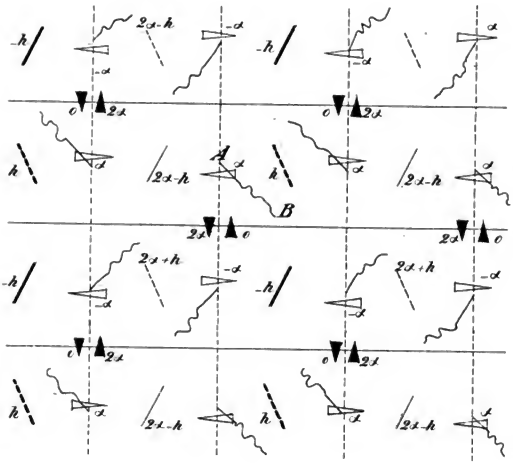


Fig. 26.

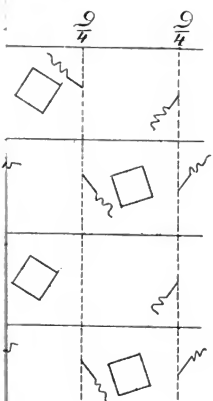
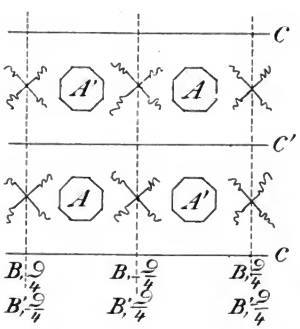


Fig. 27.



Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 13.

Typus I. Leyer, Regulus, etc.

Fig. 14.

Typus II. Sonne, Pollux, Capella etc.

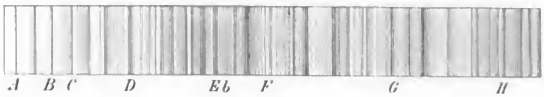


Fig. 15.

Typus III. Hercules, Bételgeuze, etc.

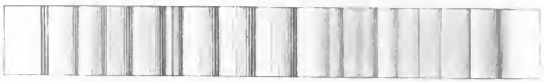
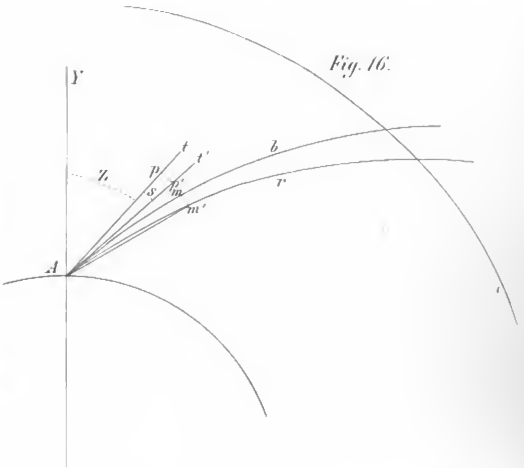


Fig. 16.



Digitized by Google

Digitized by Google

AUXILIARY COLLECTION

DOES NOT CIRCULATE

Physics
Library

Stanford University Library
Stanford, California

In order that others may use this book, please return it as soon as possible, but not later than the date due.

Digitized by Google